Anordnung der reellen Zahlen

Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ stehen in genau einer der folgenden Beziehungen zueinander:

$$a < b \qquad a = b \qquad b < a.$$

$a \leq b$ bedeutet $a < b$ oder $a = b$.
$a \geq b$ bedeutet $a > b$ oder $a = b$.

Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gelten folgende **Eigenschaften**:

- Transitivität: $a < b$ und $b < c \implies a < c$.
- Monotonie der Addition: $a < b \implies a + c < b + c$.
- Monotonie der Multplikation:
  Falls $c > 0$: $a < b \implies ac < bc$.
  Falls $c < 0$: $a < b \implies ac > bc$.

Folgerungen aus den Anordnungseigenschaften

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

- $a < 0 \implies -a > 0$.
- $0 \leq a < b \implies a^n < b^n$.
- $0 \leq a < b \implies \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

Hierbei ist die *n*-**te Wurzel** wie folgt definiert:

Definition 1.26

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$. Unter $\sqrt[n]{a}$ („n-te Wurzel aus a“) versteht man diejenige *nichtnegative* reelle Zahl x, für die $x^n = a$ gilt.

Äquivalenzumformungen für Ungleichungen

Wie für Gleichungen haben auch Ungleichungen eine Definitions- und Lösungsmenge.
Die Lösungsmenge einer Ungleichung bleibt bei Anwendung der folgenden Operationen unverändert:

- Termumformungen,
- Addition bzw. Subtraktion desselben Terms auf beiden Seiten der Gleichung,
- Multiplikation mit einer Zahl > 0 bzw. Division durch eine Zahl > 0,
- Multiplikation mit einer Zahl < 0 bzw. Division durch eine Zahl < 0 bei gleichzeitiger Änderung des Ungleichungszeichens:
  Aus $<$ wird $>$, aus $\leq$ wird $\geq$ und umgekehrt.

Ein Beispiel

Beispiel 1.27

Welche Lösungsmenge hat $\frac{2x+1}{x-1} < 1$?

Intervalle

Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ werden **Intervalle** genannt. Dabei seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (rechts) halboffenes Intervall
  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (links) halboffenes Intervall
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
  $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
  $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
  $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$

Sprechweise: a heißt *linker Randpunkt*, b *rechter Randpunkt*, $(b - a)$ **Intervall-Länge**.

Betrag und Signum

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann heißt

$$|x| := \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

(Absolut-) Betrag von x und

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Signum oder **Vorzeichen** von x.

Eigenschaften von Betrag und Signum

- Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|x|$ der Abstand von x zum Nullpunkt. Entsprechend ist $|x - y|$ der Abstand von x zu $y \in \mathbb{R}$.
- Es gilt $x = |x| \operatorname{sgn}(x)$ und $|x| = x \operatorname{sgn}(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|x| \geq 0$ und $(|x| = 0 \iff x = 0)$.
- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $|-x| = |x|$ und $-|x| \leq x \leq |x|$.
- Es gilt $x^2 \leq y^2 \iff |x| \leq |y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\sqrt{x^2} = |x|$.

Graphische Darstellung für Betrag und Signum

Die Funktionen $|x|$ und $\operatorname{sgn}(x)$ haben folgenden Verlauf: