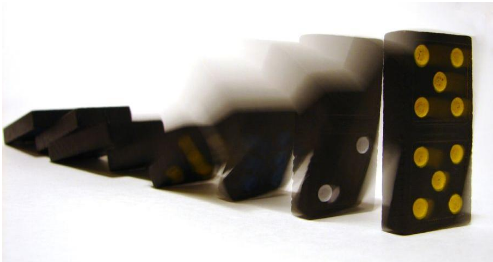
Prinzip der vollständigen Induktion

Gegeben sei eine Aussageform $A(n)$, $n \in \mathbb{N}$.
Es gelte:

- *Induktionsanfang (IA):* $A(1)$ ist wahr.
- *Induktionsschritt (IS):*
  Die Implikation $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ ist für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Dann ist $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr.



Bildnachweis: `http://commons.wikimedia.org/wiki/Image:Domino_Cascade.JPG`

1. Grundlagen 1.5. Vollständige Induktion

Ein Beispiel

Beispiel 1.29

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Cornelia Kaiser Mathematik für Chemiker

Summennotation

Schreibweise für die Summe der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (mit $n \in \mathbb{N}$):

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n =: \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Beispiel 1.30

$$\sum_{k=1}^{3} k =$$

$$\sum_{k=1}^{100} k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k =$$

Rechenregeln bei Summennotation

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c \in \mathbb{R}$.

- $c \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (c\, a_k)$,
- $\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$,
- $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}$,
- $\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad m < n.$

Ein weiteres Beispiel

Beispiel 1.31

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\,.$$

Die Bernoullische Ungleichung

Beispiel 1.32

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Anhang: Variante der vollständigen Induktion

Gelegentlich hat man Aussagen $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ mit anderem $n_0 \in \mathbb{N}$ statt $n_0 = 1$.

Beispiel 1.33

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$?

$A(n)$: $2^n > n^2$

$A(1)$ ist wahr. $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$ sind falsch. $A(5)$ ist wahr.

Vermutung: $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$.

Induktionsanfang ($n = 5$): $2^5 > 5^2$, d.h. $A(5)$ ist wahr.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$. Für dieses n gelte $A(n)$. Wir zeigen $A(n+1)$: $2^{n+1} > (n+1)^2$.

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 = n^2 + n \cdot n > n^2 + 3n > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$