# Zehnerpotenzen

Bisher bekannt sind folgende Zehnerpotenzen:

- $10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n \text{ Faktoren}}, \qquad n \in \mathbb{N}$
- $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n}, \qquad n \in \mathbb{N}$
- $10^0 = 1$
- $10^{1/n} = \sqrt[n]{10}, \qquad n \in \mathbb{N}$
- $10^{m/n} = (\sqrt[n]{10})^m = \sqrt[n]{10^m}, \qquad n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z}$

Damit ist $10^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ definiert.

Durch einen „Grenzübergang“ kann $10^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert werden.





# Der dekadische Logarithmus

**Definition 2.10**

Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und es gelte $a = 10^b$ für ein $b \in \mathbb{R}$. Dann wird $b$ der **(dekadische) Logarithmus** von $a$ genannt und mit $\log a$ bezeichnet.

**Beispiel 2.11**

$\log 0.001 = -3$, denn $10^{-3} = 0.001$,
$\log 10 = 1$, denn $10^1 = 10$.

- Man schreibt auch $\log_{10} a$ oder $\lg a$.
- $\log a$ ist diejenige reelle Zahl, für die $a = 10^{\log a}$ gilt.
- In der Chemie ist der **pH-Wert** definiert als negativer dekadischer Logarithmus der Protonenkonzentration:

$$\text{pH-Wert} = -\log \frac{c_{\mathrm{H_3O^+}}}{\mathrm{mol/l}}.$$

# Rechenregeln

Aus den Potenzgesetzen ergeben sich folgende Rechenregeln ($a, b > 0$, $x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} \log(a\,b) &= \log a + \log b, \\ \log \frac{a}{b} &= \log a - \log b \\ \log(a^x) &= x \log a \end{aligned}$$

Es folgt für $c < 0$ und $n \in \mathbb{Z}$

$$\log(c \cdot 10^k) = \log c + \log(10^k) = \log c + k$$

**Beispiel 2.12**

$\log 2 \approx 0,301$
$\log 200 = \log(2 \cdot 10^2) = \log 2 + 2 \approx 2,301$
$\log 0,2 = \log(2 \cdot 10^{-1}) = \log 2 - 1 \approx -0,699$





# Eigenschaften

- $\log a$ existiert nur für $a > 0$, denn $10^x > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.
- $\log 1 = 0$, denn $10^0 = 1$
- $\log x$ ist *streng monoton wachsend*, d.h.

$$0 < a < b \Rightarrow \log a < \log b.$$

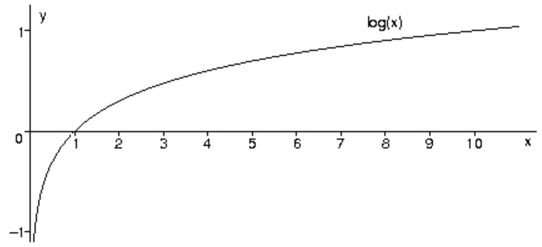
- Für $a \in (1, 10)$ gilt $\log a \in (0, 1)$.
- Für $a \in (0, 1)$ gilt $\log a < 0$, denn

$$\log a = -\log a^{-1} = -\log \frac{1}{a} < 0, \text{ da } \frac{1}{a} > 1$$

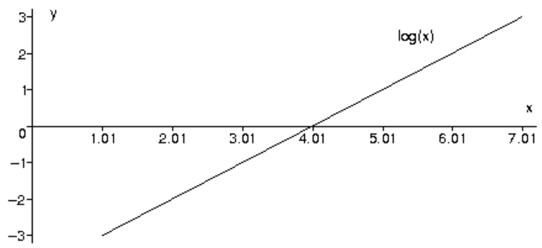
- $\log a$ ist nach oben und nach unten unbeschränkt, denn für $k \in \mathbb{Z}$ gilt: $a = \log 10^k \implies \log a = k$.

# Graphische Darstellung

Der Graph von log $x$ hat folgenden Verlauf:




In halblogarithmischer Darstellung:








# Ein Beispiel aus der Chemie

**Beispiel 2.13**

10 ml Salzsäure mit dem pH-Wert 2 werden mit 1 l Natronlauge mit dem pH-Wert 11 verrührt. Wie groß ist der pH-Wert nach dem Vermischen, ohne die Berücksichtigung der Reaktion von $Na^+$ mit $Cl^-$?

## Wachstumsprozesse, Exponentialfunktion

Bei vielen (Wachstums-) Prozessen spielt die Exponentialfunktion $e^x$ eine wichtige Rolle. Dabei wird als Basis die Euler'sche Zahl $e \approx 2,71828$ verwendet. Den Grund dafür

**Beispiel 2.14**

Eine Population bestehe zur Zeit $t = 0$ aus $N_0$ Individuen. Die Anzahl zur Zeit $t > 0$ sei $N(t)$. Angenommen die Wachstumsrate $\frac{dN(t)}{dt}$ sei proportional zur Bevölkerungszahl, also $\frac{dN(t)}{dt} = kN(t)$ mit einer Wachstumskonstante $k > 0$.
Wir bestimmen $N(t)$ für $t > 0$ aus $N_0$.

Das Beispiel wird an der Tafel gerechnet.





## Der natürliche Logarithmus

**Definition 2.15**

Sei $a > 0$. Der **natürliche Logarithmus** (Logarithmus naturalis) von $a$, kurz $\ln a$, ist diejenige reelle Zahl, für die $e^{\ln a} = a$ gilt. Dabei ist $e$ die **Euler'sche Zahl** ($e \approx 2,71828$).

*Umrechnungsformel* zwischen $\ln a$ und $\log a$:

$$\boxed{\ln a = \ln 10 \cdot \log a} \quad \text{mit} \quad \ln 10 \approx 2.303$$

**Beispiel 2.16**

$$\begin{aligned} \ln(9.831 \cdot 10^{-2}) &= \ln 10 \cdot \log(9.831 \cdot 10^{-2}) \\ &= \ln 10 \cdot (\log 9,831 - 2) \approx -2,320. \end{aligned}$$