

Injektivität und Surjektivität

Definition 3.10

Eine Funktion $f : D_f \rightarrow Z$ heißt

- **injektiv** (eindeutig), falls gilt: $x \neq \tilde{x} \implies f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- **surjektiv**, falls $B_f = Z$ gilt,
- **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 3.11

Es sei $f : D_f \rightarrow Z$ mit $f(x) = x^2$. Untersuchen Sie jeweils, ob f injektiv bzw. surjektiv ist.

- 1 $D_f = \mathbb{R}, \quad Z = \mathbb{R}$
- 2 $D_f = \mathbb{R}, \quad Z = [0, \infty)$
- 3 $D_f = [0, \infty), \quad Z = \mathbb{R}$
- 4 $D_f = (-\infty, 0], \quad Z = [0, \infty)$

Bemerkungen, Definition der Umkehrfunktion

- $f : D_f \rightarrow Z$ ist injektiv, falls gilt: $f(x) = f(\tilde{x}) \implies x = \tilde{x}$.
- $f : D_f \rightarrow B_f$ ist stets surjektiv, denn $B_f = f(D_f)$ nach Definition.

Also ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 3.12

Sei $f : D_f \rightarrow B_f$ eine injektive Funktion. Die Funktion $g : B_f \rightarrow D_f$, die jedem $y \in B_f$ genau das $x \in D_f$ zuordnet, für welches $y = f(x)$ gilt, heißt **Umkehrfunktion** von f ; geschrieben als $g = f^{-1}$.

- Es gilt also $f(f^{-1}(y)) = y$ für alle $y \in B_f$ sowie $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in D_f$.
- Die Zuordnungsvorschrift für f^{-1} lässt sich oft durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x bestimmen.

Beispiele zur Umkehrfunktion

Beispiel 3.13

Wir bestimmen die Umkehrfunktion der folgenden Funktionen:

- ① $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ mit $f(x) = x^2$
- ② $g : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$ mit $g(x) = x^2$
- ③ $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ mit $h(x) = 10^x$
- ④ $u : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ mit $u(x) = e^x$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \text{gr}(f^{-1}) &= \{(y, f^{-1}(y)) : y \in D_{f^{-1}}\} \\
 &= \{(y, x) : y \in B_f, x = f^{-1}(y)\} \\
 &= \{(y, x) : y \in B_f, y = f(x)\} \\
 &= \{(y, x) : (x, y) \in \text{gr}(f)\},
 \end{aligned}$$

d.h. $\text{gr}(f^{-1})$ entsteht aus $\text{gr}(f)$ durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.

Ein weiteres Beispiel

Beispiel 3.14

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

Monotonie

Definition 3.15

Eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}$ heißt

- *monoton wachsend*, falls gilt: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
- *streng monoton wachsend*, falls gilt:
 $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
- *monoton fallend*, falls gilt: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.
- *streng monoton fallend*, falls gilt:
 $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.
- f heißt *(streng) monoton*, falls f (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Eine streng monotone Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ist automatisch injektiv.