Definition

Definition 4.1

- Eine **reelle Folge** (a_n) ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ die reelle Zahl $a_n = f(n)$ zuordnet.
- Eine **komplexe Folge** (a_n) ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, die jedem $n \in \mathbb{N}$ die komplexe Zahl $a_n = f(n)$ zuordnet.

- Die Funktion f wird also durch die Folge der Funktionswerte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ angegeben. Die a_n heißen **Folgenglieder** (mit Index n).
- Gelegentlich ist es sinnvoll, die Folgenglieder bei einem Index $n_0 \neq 1$ starten zulassen. Man schreibt dann $(a_n)_{n \geq n_0}$.

Beispiele

Beispiele 4.2

1. (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$, also $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
2. $(a_n)_{n\geq 2}$ mit $a_n = \frac{1}{n-1}$, also $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$
3. $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n = 2^n$, also $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$
4. $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n = 2^{-n}$, also $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$
5. (a_n) mit $a_n = (-1)^n$, also $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$
6. (a_n) mit $a_n = i^n$, also $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, \ldots$
7. (a_n) mit $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, also $2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \ldots$
8. $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$ für $n \geq 1$, also $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ (Fibonacci-Zahlen)
9. (a_n) mit $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ für $n \geq 1$, also $1, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \ldots$

Konvergenz von Folgen

Definition 4.3

Eine Folge (a_n) heißt **konvergent**, falls es eine Zahl a (in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) gibt mit der Eigenschaft

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_\varepsilon : \quad |a_n - a| \leq \varepsilon$$

a heißt **Grenzwert** der Folge (a_n).

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Die Folge (a_n) heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergent ist.

Für die Konvergenz von (a_n) sind nur Folgenglieder mit großem Index wichtig. Insbesondere gilt eine entsprechende Definition für Folgen $(a_n)_{n\geq n_0}$.

Nullfolgen

Ist (a_n) konvergent mit dem Grenzwert 0, so heißt (a_n) **Nullfolge**.

Beispiel 4.4

Wir zeigen: (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine Nullfolge.

Häufungspunkte

- Man bezeichnet die Menge $\{x : |x - a| < \varepsilon\}$ auch als ε-Umgebung von a. Es gilt genau dann $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, wenn in *jeder* ε-Umgebung von a alle Folgenglieder a_n bis auf endlich viele liegen.
- Liegen in jeder ε-Umgebung von a unendlich viele der a_n (aber evtl. auch unendlich viele außerhalb), so bezeichnet man a als **Häufungspunkt** der Folge (a_n). Ist (a_n) konvergent, so besitzt (a_n) also genau einen Häufungspunkt, und zwar den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Beispiel 4.5

1. (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ hat die Häufungspunkte $1, -1$.
2. (a_n) mit $a_n = i^n$ hat die Häufungspunkte $1, -1, i, -i$.

Beschränkte Folgen

Eine Folge (a_n) heißt **beschränkt**, falls gilt:
Es gibt eine *Schranke* $S > 0$ mit

$$|a_n| \leq S \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Satz 4.6

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beispiel 4.7

Wir zeigen: (a_n) mit $a_n = 2^n$ ist nicht beschränkt, also nicht konvergent.

Beispiel 4.8

(a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Bestimmte Divergenz

Eine reelle Folge (a_n) heißt **bestimmt divergent** gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), falls gilt:

$$\forall\, S > 0\; \exists\, N \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq N: \quad a_n > S \quad (\text{bzw. } a_n < -S).$$

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$) und bezeichnet $+\infty$ (bzw. $-\infty$) als **uneigentlichen Grenzwert** von (a_n).

Beispiel 4.9

(a_n) mit $a_n = 2^n$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$.
(a_n) mit $a_n = -2^n$ ist bestimmt divergent gegen $-\infty$.
(a_n) mit $a_n = (-2)^n$ ist nicht bestimmt divergent.

Nullfolgen und bestimmt divergente Folgen

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen Nullfolgen und bestimmt divergenten Folgen:

1. Ist (a_n) Nullfolge mit $a_n > 0$ (bzw. $a_n < 0$), so ist $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$).
2. Ist (b_n) bestimmt divergent gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$ eine Nullfolge ist.

Beispiel 4.10

Sei $p > 0$. Dann gilt:

- (n^p) ist bestimmt divergent gegen ∞.
- (n^{-p}) ist eine Nullfolge.