

Einfache Rechenregeln

Aus Satz 4.11 folgt

Satz 4.30

- ① Aus $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ folgt $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = a + b$.
- ② Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda a$.

Vorsicht! Im Allgemeinen ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)!$

Absolute Konvergenz

Definition 4.31

Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Beispiel 4.32

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ absolut konvergent.

Das Cauchy-Produkt

Satz 4.33

Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergieren, dann gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) \quad (\text{Cauchy-Produkt}).$$

Beispiel 4.34

Für $|q| < 1$ gilt

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q^k q^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n.$$

Kriterien für absolute Konvergenz

Satz 4.35

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

① **Majorantenkriterium:**

$|a_k| \leq b_k$ (für $k \geq k_0$) und $\sum_{k=k_0}^{\infty} b_k$ ist konvergent.

② **Wurzelkriterium:** Es gibt eine reelle Zahl $q < 1$ mit

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \quad \text{für } k \geq k_0.$$

③ **Quotientenkriterium:** Es gibt eine reelle Zahl $q < 1$ mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q \quad \text{für } k \geq k_0.$$

Zur Anwendung der Kriterien

Im Wurzel- bzw. Quotientenkriterium verwendet man praktisch oft die stärkere Bedingung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1.$$

Beispiele 4.36

- ① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ mit $p \geq 2$.
- ② $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$
- ③ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Potenzreihen

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ heißt **Potenzreihe** mit

Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Häufig ist $z_0 = 0$.

Beispiele 4.37

- ① $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ (Quotientenkrit.) und

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad z \in \mathbb{C}.$$
- ② $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ konvergiert für $|z| < 1$ (geom. Reihe) und

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1.$$

Weitere Beispiele für Potenzreihen

Beispiele 4.38

$$\textcircled{1} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{2} \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{3} \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{4} \quad \cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{5} \quad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad \text{für } |x| < 1.$$

Das Leibniz-Kriterium

Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ heißt **alternierend**.

Satz 4.39 (Leibniz-Kriterium)

Die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ ist konvergent, falls (a_k) eine monoton fallende Nullfolge ist.

Beispiel 4.40

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ ist konvergent (mit dem Wert $\ln 2$).

Beispiel 4.40 zeigt, dass es konvergente Reihen gibt, die nicht absolut konvergieren.