

Grenzwerte von Funktionen

Definition 4.41

Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$.

$f(x)$ **konvergiert gegen** a für $x \rightarrow x_0$, falls für *jede* Folge (x_n) mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ gilt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Man schreibt dann $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a$.

Beispiel 4.42

$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

① $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

② $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Satz 4.43

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$. Aus $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ und

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ folgt

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = ab,$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, \text{ falls } b \neq 0.$

Beispiel 4.44

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$

② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} =$

Uneigentliche Grenzwerte von Funktionen

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) = \pm\infty$, falls für *jede* Folge (x_n) mit $x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$ gilt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty.$$

Beispiel 4.45

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} =$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x_n) = a$, falls für *jede* Folge (x_n) in D_f gilt:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty \implies f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Beispiel 4.46

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} =$$

Einseitige Grenzwerte

Wird die Bedingung in Definition 4.41 nur für Folgen $x_n \rightarrow x_0$ mit $x_n < x_0$ (bzw. $x_n > x_0$) verlangt, so spricht man vom linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Grenzwert und schreibt

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \text{ (bzw. } \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)).$$

Beispiele 4.47

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sgn}(x) =, \\ & \lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sgn}(x) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{1}{x-1} =, \\ & \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x-1} = \infty \end{aligned}$$

Stetigkeit

Definition 4.48

Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

- f heißt **stetig in** $x_0 \in D_f$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
- f heißt **stetig**, falls f in jedem $x_0 \in D_f$ stetig ist.

Beispiel 4.49

- 1 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$.
- 2 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.
- 3 $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}, f(x) = \frac{1}{x}$.

Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 4.50

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$.

Dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und f/g (hier für $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0 .

Beispiel 4.51

$$f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Nach Satz 4.50 sind alle Polynome stetig.

Man kann auch zeigen, dass Potenzreihen im Bereich der absoluten Konvergenz stetig sind. Insbesondere sind e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ und $\cosh x$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Rechenregeln für stetige Funktionen (2)

Satz 4.52

Seien $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : D_h \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, für die $B_g \subseteq D_h$ gilt.

Ist g stetig in $x_0 \in D_g$ und h stetig in $y_0 = g(x_0) \in D_h$, so ist die Verkettung $f = h \circ g$ stetig in x_0 .

Beispiel 4.53

Die Funktion f , definiert durch $f(x) = e^{\sin(x^2+1)}$, ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Maximum und Minimum, Zwischenwertsatz

Satz 4.54 (Existenz von Maximum und Minimum)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f ein Maximum und ein Minimum in $[a, b]$, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Man schreibt $f(x_1) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$ und $f(x_2) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$.

Satz 4.55 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beispiel 4.56

Besitzt die Gleichung $x = \cos(x)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Lösung?