Definition der Ableitung

Definition 5.1

Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ sei auf einem offenen Intervall I definiert.

1. f heißt **differenzierbar in** $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \left(= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right)$$

existiert. Diesen Grenzwert bezeichnet man als **Ableitung von f in x_0** und schreibt dafür $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$.

2. Die Funktion f heißt **differenzierbar**, wenn f in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

$\frac{df}{dx}$ wird auch **Differentialquotient** genannt.

Beispiele, Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Beispiele 5.2

1. $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = |x|$

Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit:

Satz 5.3

Ist f in x_0 differenzierbar, dann ist f in x_0 stetig.

Einseitige Ableitungen

In Definition 5.1 kann man auch einseitige Grenzwerte betrachten. Man schreibt dann

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

und nennt $f'_+(x_0)$ bzw. $f'_-(x_0)$ die **rechts- bzw. linksseitige Ableitung** von f im Punkt x_0.

Beispiel 5.4

Wir berechnen die einseitigen Ableitungen von $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$.

Höhere Ableitungen

Definition 5.5

Sei f in einer Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ um den Punkt x_0 differenzierbar. Ist die Ableitung f' in dem Punkt x_0 differenzierbar, d.h. existiert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h} =: f''(x_0),$$

so heißt f **zweimal differenzierbar in** x_0 und $f''(x_0)$ die zweite Ableitung von f in x_0.

Analog definiert man höhere Ableitungen $f'''(x_0),\ f^{(4)}(x_0),\ \ldots,\ f^{(n)}(x_0)$.