

Der Mittelwertsatz (MWS)

Satz 5.15 (Mittelwertsatz)

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Spezialfall:

Satz 5.16 (Satz von Rolle)

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so existiert mindestens ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gilt

- ① $f'(x) = 0$ in $(a, b) \iff f$ ist konstant.
- ② $f'(x) \geq 0$ in $(a, b) \iff f$ ist monoton wachsend.
- ③ $f'(x) \leq 0$ in $(a, b) \iff f$ ist monoton fallend.
- ④ $f'(x) > 0$ in $(a, b) \implies f$ ist streng monoton wachsend.
- ⑤ $f'(x) < 0$ in $(a, b) \implies f$ ist streng monoton fallend.

Die Differentialgleichung $f'(x) = af(x)$

Sei $a \in \mathbb{R}$ konstant. Welche differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genügen der Beziehung $f'(x) = af(x)$?

Die Regel von de L'Hôpital

Satz 5.17 (Regel von de L'Hôpital)

Seien f und g in (a, b) differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Gilt

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$$

und existiert $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so folgt

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Für $x_0 = b$ gilt der entsprechende Satz mit linksseitigem Grenzwert.

Regel von de L'Hôpital (2)

Beispiel 5.18

$$① \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$② \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln(x)$$

Der Satz von Taylor

Satz 5.19

Die Funktion f sei auf (a, b) $n + 1$ -mal differenzierbar und $x_0, x \in (a, b)$. Dann gibt es mindestens ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ heißt n -tes **Taylorpolynom** von f um die **Entwicklungsstelle** x_0 .

Beispiel 5.20

Für $f(x) = e^x$ und $g(x) = \cos(x)$ berechnen wir das n -te Taylorpolynom um $x_0 = 0$.