Lokale Extrema

Definition 5.21

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a, b)$.

f hat in x_0 ein **lokales Maximum (Minimum)**, falls eine Umgebung $U = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ um x_0 existiert, so dass

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{bzw.} \quad f(x) \geq f(x_0)) \quad \text{für alle} \quad x \in U$$

gilt.

Unter dem Begriff **lokales Extremum** versteht man ein lokales Minimum oder Maximum.

5. Differentialrechnung | 5.4 Extrema und Wendepunkte

Notwendige Bedingung für lokale Extrema

Satz 5.22

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar im Punkt $x_0 \in (a, b)$. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

$f'(x_0) = 0$ ist *notwendig* für ein Extremum in x_0, aber allein *nicht hinreichend*, d.h. x_0 muss dann keine Extremstelle sein!

Beispiel 5.23

$f(x) = x^3$ hat kein Extremum in $x_0 = 0$, obwohl $f'(0) = 0$ gilt!

Cornelia Kaiser | Mathematik für Chemiker

Hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

Satz 5.24

Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$.

1. *Falls $f'(x_0) = 0$ gilt und f' in x_0 einen Vorzeichenwechsel (VZW) von $-$ nach $+$ (von $+$ nach $-$) hat, so hat f in x_0 ein lokales Minimum (Maximum)*
2. *Existiert $f''(x_0)$ und gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) > 0$), so hat f in x_0 ein lokales Minimum (Maximum).*

Wendepunkte

Sei f zweimal differenzierbar in (a,b) und $x_0 \in (a,b)$.

Ist $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$), so ist der Graph von f an dieser Stelle linksgekrümmt (bzw. rechtsgekrümmt). Ein Punkt, in dem die Krümmung wechselt (d.h. f'' einen VZW hat), heißt **Wendepunkt**.

- Hat f in x_0 einen Wendepunkt, so ist $f''(x_0) = 0$.
- Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so hat f in x_0 einen Wendepunkt.

Beispiel 5.25

Wir bestimmen lokale Extrema und Wendepunkte von $f(x) = xe^{-x}$.