Matrizen

Definition 8.13

Ein Schema von Elementen $\alpha_{ik} \in \mathbb{R}$ der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt (reelle) $m \times n$-**Matrix**. Die Menge aller reellen $m \times n$-Matrizen wird mit $M_{m,n}(\mathbb{R})$ oder kurz $M_{m,n}$ bezeichnet.

Schreibweise: $A = (\alpha_{ik}) \in M_{m,n}$.

Für $m = n$ heißt A **quadratische Matrix**.

Beispiele und Bemerkungen

Beispiele 8.14

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix} \in M_{2,3}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in M_{3,1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}.$$

1. $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ heißt ***i*-te Zeile** von A.
2. $\begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$ heißt ***j*-te Spalte** von A.
3. Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ kann als Matrix mit einer Spalte aufgefasst werden: $\mathbb{R}^n \sim M_{n,1}$.

Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen

Seien $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit $A = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Wir definieren

- $A + B := (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}$
- $\lambda A := (\lambda \alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} \end{pmatrix}$

Matrizenprodukt: Definition

Definition 8.15

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in M_{l,m}$ eine $\ell \times m$-Matrix und $B = (\beta_{jk}) \in M_{m,n}$ eine $m \times n$-Matrix.
Wir definieren das **Produkt** AB als die $l \times n$-Matrix

$$AB := (\gamma_{ik}) \text{ mit } \gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_{jk}, \quad i = 1, \ldots, \ell, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Ausgeschrieben:

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\beta_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} \alpha_{1j}\beta_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\ell j}\beta_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\ell j}\beta_{jn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{\ell 1} & \cdots & \gamma_{\ell n} \end{pmatrix}$$

Matrizenprodukt: Bemerkungen und Beispiele

1. $A\,B$ ist *nur dann* definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmt!
2. Die Berechnung von $A\,B$ merkt man sich als Schema "Zeile $\times$ Spalte".

Beispiel 8.16

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte.

Beachten Sie, dass auch für quadratische Matrizen C, D im Allgemeinen $C\,D \neq D\,C$ gilt: **Das Matrizenprodukt ist *nicht* kommutativ.**

Die transponierte Matrix

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in M_{m,n}$. Die zu A transponierte Matrix entsteht aus A durch Vertauschen von Zeilen mit Spalten und wird mit A^{T} bezeichnet. A^{T} ist eine $n \times m$-Matrix.

$$A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 8.17

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Rechenregel: $(A\,B)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}}\,A^{\mathsf{T}}$, falls $A\,B$ definiert ist.

Bild, Kern und Rang

Sei $A \in M_{m,n}$.

- Der Teilraum $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ des $\mathbb{R}^n$ heißt **Kern** von A, kurz Kern(A).
- Der Teilraum $\{Ax \in \mathbb{R}^m : x \in \mathbb{R}^n\}$ des $\mathbb{R}^m$ heißt **Bild** von A, kurz Bild(A).
- Die Dimension von Bild(A) wird als **Rang** von A, kurz Rang(A), bezeichnet.

Satz 8.18

*Sei $A \in M_{m,n}$. Dann gilt die **Dimensionsregel**:*

$$\dim \mathit{Kern}(A) + \dim \mathit{Bild}(A) = n.$$

Also: Dimension von Kern(A) plus Rang von A ergibt die Anzahl der Spalten von A.

Zur Berechnung von Rang(A)

Satz 8.19

Sei $A \in M_{m,n}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\mathit{Rang}(A) \\ &\qquad = \text{maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von } A \\ &\qquad = \text{maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von } A. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt: $\quad \mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A^{\mathsf{T}})$.

Beispiel 8.20

Wir bestimmen den Rang von $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}$.