Integrationsmethoden

1 Partielle Integration (Produktintegration)

Unbestimmte Integration der Produktregel $(u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ liefert

$$(u \cdot v)(x) = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx$$

und damit

$$\boxed{\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x) dx.}$$

Um diese Regel für die Berechnung von $\int f(x) dx$ anwenden zu können, versucht man, f als $u \cdot v'$ zu schreiben, und zwar so, dass $\int u'(x)v(x) dx$ einfacher zu berechnen ist. Wie das praktisch geht, zeigen folgende Beispiele.

1. $\int x \sin(x) dx$

Wir wählen $u(x) = x$ und $v'(x) = \sin(x)$, also $v(x) = -\cos(x)$. Damit folgt

$$\int x \sin(x) dx = x(-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x)) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sin(x) + c.$$

Es ist sinnvoll, das Ergebnis durch Differenzieren nach x zu überprüfen:

$$\frac{d}{dx}(-x \cos(x) + \sin(x) + c) = -\cos(x) + x \sin(x) + \cos(x) = x \sin(x).$$

2. $\int x \ln(x) dx$

Hier wählen wir $u(x) = \ln(x)$ und $v'(x) = x$. Damit erhalten wir

$$\int x \ln(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + c.$$

Probe: $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4} + c \right) = x \ln(x) + \frac{x^2}{2x} - \frac{x}{2} = x \ln(x)$

(In diesem Beispiel führt übrigens auch die Wahl $u(x) = x$ und $v'(x) = \ln(x)$ zum Erfolg. Wie?)

3. $\int x \arctan(x) dx$

Mit der Wahl $u(x) = \arctan(x)$ und $v'(x) = x$ gilt

$$\int x \arctan(x) dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx.$$

Wegen der bereits aus der Vorlesung bekannten Rechnung

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int 1 - \frac{1}{x^2+1} dx = x - \arctan(x) + c$$

erhalten wir

$$\int x \arctan(x) dx = \frac{x^2+1}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + \tilde{c}.$$

Probe: $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2+1}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2} + \tilde{c} \right) = x \arctan(x) + \frac{x^2+1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} = x \arctan(x)$

4. $\int x^2 \sin(x) dx$

Mit $u(x) = x^2$ und $v'(x) = \sin(x)$ ist

$$\int x^2 \sin(x) dx = x^2(-\cos(x)) - \int 2x \cdot (-\cos(x)) dx = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cos(x) dx.$$

Das Integral $\int x \cos(x) dx$ berechnen wir, indem wir nochmals partiell integrieren mit $u(x) = x$ und $v'(x) = \cos(x)$:

$$\int x \cos(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + c.$$

Zusammen ergibt sich

$$\int x^2 \sin(x) dx = -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + \tilde{c}.$$

Probe: $\frac{d}{dx}(-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + \tilde{c})$

$$= -2x \cos(x) + x^2 \sin(x) + 2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x)$$

$$= x^2 \sin(x)$$

5. $\int \ln(x) dx$ ist zwar schon aus der Vorlesung bekannt, lässt sich aber auch mit partieller Integration berechnen:

$$\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x + c.$$

6. In diesem Beispiel wenden wir partielle Integration und die Formel $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ an:

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) dx &= \int \sin(x) \sin(x) dx = \sin(x) \cdot (-\cos(x)) - \int \cos(x) \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int 1 - \sin^2(x) dx \\ &= -\sin(x) \cos(x) + x - \int \sin^2(x) dx. \end{aligned}$$

Subtrahiert man $\int \sin^2(x) dx$ auf beiden Seiten der Gleichung, so erhält man

$$2 \int \sin^2(x) dx = x - \sin(x) \cos(x) + c.$$

Division der Gleichung durch 2 ergibt

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x)) + \tilde{c}.$$

Probe: $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}(x - \sin(x) \cos(x)) + \tilde{c} \right) = \frac{1}{2}(1 - \cos^2(x) + \sin^2(x)) = \sin^2(x).$

Übung: Berechnen Sie mit partieller Integration.

a) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

b) $\int x \ln^2(x) dx$

c) $\int x^2 e^x dx$

d) $\int \sin(x) \cos(x) dx$

e) $\int \cos(\ln(x)) dx$

f) $\int \sinh^2(x) dx$

Partielle Integration kann auch auf bestimmte Integrale angewendet werden. Die Formel lautet dann

$$\boxed{\int_a^b f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx.}$$

2 Die Substitutionsregel

Für differenzierbare Funktionen F und g gilt $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t)$ nach der Kettenregel. Also folgt mit $f = F'$:

$$\int f(g(t))g'(t) dt = \int (F \circ g)'(t) dx = F(g(t)) + c.$$

In die Stammfunktion F von f ist also $g(t)$ als Argument einzusetzen. Als Abkürzung für diese Ersetzung verwendet man die Schreibweise $[h(x)]_{x=g(t)} := h(g(t))$.

2.1 Die erste Variante der Substitutionsregel

Mit obigen Überlegungen folgt sofort die erste Variante der Substitutionsregel für unbestimmte Integrale: Es gilt

$$\boxed{\int f(g(t))g'(t) dt = \left[\int f(x) dx \right]_{x=g(t)}},$$

falls f stetig und g stetig differenzierbar ist. Der Name „Substitutionsregel“ kommt von der Substitution $x = g(t)$.

Wie man diese Substitutionsregel anwenden kann, zeigt das folgende Beispiel.

7. $\int \sin(t) \cos^2(t) dt$

Wir wählen $f(x) = x^2$ und $g(t) = -\cos(t)$. Dann gilt $\sin(t) \cos^2(t) = f(g(t))g'(t)$ und daher

$$\int \sin(t) \cos^2(t) dt = \left[\int x^2 dx \right]_{x=-\cos(t)} = \left[\frac{x^3}{3} + c \right]_{x=-\cos(t)} = -\frac{1}{3} \cos^3(t) + c.$$

Probe: $\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{3} \cos^3(t) + c \right) = -\cos^2(t)(-\sin(t)) = \sin(t) \cos^2(t)$

Beim Anwenden der Substitutionsregel benutzt man oft die auf Leibniz zurückgehende Schreibweise $\frac{dx}{dt}$ für $x'(t)$ und rechnet mit $\frac{dx}{dt}$ formal wie mit einem gewöhnlichen Bruch. Angewandt auf obiges Beispiel bedeutet das:

$$x = -\cos(t) \implies \frac{dx}{dt} = \sin(t), \text{ also } dx = \sin(t)dt \implies \int \sin(t) \cos^2(t) dt = \int x^2 dx.$$

Dabei wird die Ersetzungsklammer oft weggelassen. Die Rücksubstitution darf aber trotzdem nicht vergessen werden!

8. $\int \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt$

Substitution: $x = e^t \implies \frac{dx}{dt} = e^t$, d.h. $dx = e^t dt$.

$$\int \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt = \int \frac{1}{(e^t)^2 + 1} e^t dt = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan(x) + c$$

Mit Rücksubstitution folgt $\int \frac{e^t}{e^{2t} + 1} dt = \arctan(e^t) + c$.

Probe: $\frac{d}{dt} (\arctan(e^t) + c) = \frac{1}{(e^t)^2 + 1} e^t = \frac{e^t}{e^{2t} + 1}$

Übung: Berechnen Sie mit der Substitutionsregel.

a) $\int x \sqrt{1-x^2} dx$

b) $\int \sin^4(x) \cos(x) dx$

c) $\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} dx$

d) $\int x e^{-x^2} dx$

e) $\int \cos(x) e^{\sin(x)} dx$

f) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

2.2 Zwei Spezialfälle

Wir betrachten nun zwei häufig auftretende Spezialfälle der Substitutionsregel.

Im ersten Spezialfall ist $g(t) = at + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Dann gilt

$$\int f(at + b) dt = \frac{1}{a} \int a \cdot f(at + b) dt = \frac{1}{a} \left[\int f(x) dx \right]_{x=at+b}.$$

Beispiele für die Anwendung dieser Regel sind

9. $\int \cosh(at + b) dt = \frac{1}{a} \sinh(at + b) + c$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$.

10. $\int e^{-t} dt = \frac{1}{-1} e^{-t} + c = e^{-t} + c$

11. $\int \sin^2(t) dt$ haben wir bereits mit partieller Integration berechnet (Beispiel 6). Es gibt aber auch einen eleganten Weg: Mit Hilfe des Additionstheorems für den Cosinus folgt $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 1 - 2\sin^2(t)$. Also ist $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$ und es folgt

$$\int \sin^2(t) dt = \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) dt = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin(2t) \right) + c$$

Das Additionstheorem für den Sinus liefert $\sin(2t) = 2 \sin(t) \cos(t)$, also

$$\int \sin^2(t) dt = \frac{1}{2} (x - \sin(t) \cos(t)) + c.$$

Im zweiten Spezialfall ist $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann lautet die Substitutionsregel so:

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)} dt = \left[\int \frac{1}{x} dx \right]_{x=g(t)} = [\ln |x|]_{x=g(t)} = \ln |g(t)| + c.$$

Diese Regel wird in den folgenden beiden Beispielen angewandt.

12. $\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln |1+x^2| + c = \ln(1+x^2) + c$

13. $\int \tan(x) dx = - \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \ln |\cos(x)| + c$

Übung: Berechnen Sie mit Hilfe der in diesem Abschnitt eingeführten Regeln.

a) $\int \frac{e^x}{5+2e^x} dx$

b) $\int \frac{x+5}{x^2+10x-4} dx$

c) $\int \frac{\sin(x) \cos(x)}{1+\sin^2(x)} dx$

d) $\int \sqrt{2x+3} dx$

e) $\int \cos^2(x) dx$

f) $\int \sin(x) \cos(x) dx$

2.3 Die zweite Variante der Substitutionsregel

Bisher haben wir Integrale der Form $\int f(g(t))g'(t)dt$ auf $\int f(x)dx$ zurückgeführt. Häufig geht man den umgekehrten Weg: Um $\int f(x)dx$ zu berechnen, sucht man eine umkehrbare Funktion g so, dass $\int f(g(t))g'(t)dt$ einfach ausgewertet werden kann. Ersetzt man dann die Variable t durch $g^{-1}(x)$, so erhält man das Integral $\int f(x)dx$:

$$\int f(x) dx = \left[\int f(g(t))g'(t) dt \right]_{t=g^{-1}(x)}.$$

Richtig ist das z.B., wenn f stetig und g stetig differenzierbar mit $g'(t) \neq 0$ ist.

Wie man diese Regel praktisch anwenden kann, zeigen folgende Beispiele.

14. $\int \sin\sqrt{x} dx$

Wir wählen $g(t) = t^2$ mit $t > 0$, $g'(t) = 2t$. Damit gilt

$$\int \sin\sqrt{x} dx = \left[\int \sin\sqrt{t^2} 2t dt \right]_{t=\sqrt{x}} = \left[2 \int t \sin(t) dt \right]_{t=\sqrt{x}}.$$

Mit Beispiel 1 folgt

$$\int \sin\sqrt{x} dx = [2 \sin(t) - 2t \cos(t) + c]_{t=\sqrt{x}} = 2 \sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos\sqrt{x} + c.$$

Probe:
$$\frac{d}{dx}(2 \sin\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \cos\sqrt{x} + c) = 2 \cos\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{x}} \cos\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \sin\sqrt{x} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sin\sqrt{x}$$

Als nützlich erweist sich auch hier die Leibniz-Schreibweise, wie die folgenden Beispiele zeigt.

15. $\int \sqrt{1-x^2} dx$

Substitution: $x = \sin(t)$ für $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \implies \frac{dx}{dt} = \cos(t)$, d.h. $dx = \cos(t)dt$.

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int \cos^2(t) dt = \frac{1}{2}(t + \sin(t) \cos(t)) + c.$$

Für die Rücksubstitution $t = \arcsin(x)$ schreiben wir $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)}$ und erhalten

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left(t + \sin(t) \sqrt{1-\sin^2(t)} \right) + c = \frac{1}{2} \left(\arcsin(x) + x \sqrt{1-x^2} \right) + c.$$

Probe:
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \left(\arcsin(x) + x \sqrt{1-x^2} \right) + c \right) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$$

Übung: Berechnen Sie mit der Substitutionsregel.

a) $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx$

b) $\int \sqrt{2-x^2} dx$

c) $\int \sqrt{e^x - 1} dx$

2.4 Substitutionsregel für bestimmte Integrale

Bei Substitution in bestimmten Integralen müssen auch die Grenzen transformiert werden. Dafür entfällt dann die Rücksubstitution. Es gilt

$$\boxed{\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx,}$$

falls f stetig und g stetig differenzierbar ist.

16. $\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt$

Substitution: $x = \ln(t)$, $dx = \frac{1}{t} dt$

$$\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))} dt = \int_1^e \frac{1}{1+\ln(t)} \cdot \frac{1}{t} dt = \int_{\ln(1)}^{\ln(e)} \frac{1}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x| \Big|_0^1 = \ln(2)$$

Alternativ kann man auch zuerst das unbestimmte Integral berechnen (mit Rücksubstitution). Dann müssen die Grenzen nicht transformiert werden. In Beispiel 16 sieht das so aus:

$$17. \int_1^e \frac{1}{t(1 + \ln(t))} dt$$

Wir berechnen zuerst das unbestimmte Integral mit Hilfe der Substitution: $x = \ln(t)$, $dx = \frac{1}{t} dt$

$$\int \frac{1}{t(1 + \ln(t))} dt = \int \frac{1}{1 + \ln(t)} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{1 + x} dx = \ln|1 + x| + c = \ln|1 + \ln(t)| + c.$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\int_1^e \frac{1}{t(1 + \ln(t))} dt = \ln|1 + \ln(t)| \Big|_1^e = \ln(2).$$

Übung: Berechnen Sie.

$$a) \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$$

$$b) \int_1^{e^3} \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln(x)}} dx$$

$$c) \int_0^1 4x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$$