

Mathematik für Chemiker: Übungsblatt 5

Aufgabe 5.1

Radioaktiver Zerfall wird durch die Gleichung

$$\ln \frac{N_0}{N(t)} = k t$$

beschrieben, wobei N_0 die ursprüngliche Menge an radioaktivem Material (also zur Zeit 0) ist und $N(t)$ die Menge zur Zeit $t > 0$. Die Zahl $k > 0$ ist die sogenannte Geschwindigkeitskonstante des Zerfalls.

- Wie lautet die Beziehung, wenn statt dem natürlichen der dekadische Logarithmus verwendet wird?
- Welchen Wert hat $N(t)$ für $t = 50$ Minuten, wenn $N_0 = 0,01\text{g}$ und $k = 2,0 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$ ist? (Vorsicht mit Einheiten!)
- Wie lange dauert es, bis die Menge an radioaktivem Material von 1 g auf 0,1 g abgesunken ist, falls $k = 2,0 \cdot 10^{-2}\text{s}^{-1}$ gilt?
- Die Zeit, in der die Hälfte des radioaktiven Materials zerfallen ist, heißt Halbwertszeit. Bestimmen Sie die Halbwertszeit in Abhängigkeit von k .

Aufgabe 5.2

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den maximalen reellen Definitionsbereich sowie die Bildmenge. Ist f beschränkt?

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

b) $f(x) = \ln |x|$

c) $f(x) = \frac{x^2}{4x^2 - 16}$

Aufgabe 5.3

Bestimmen Sie jeweils den maximalen reellen Definitionsbereich und zeichnen Sie anschließend den Funktionsgraphen.

a) $f(x) = -\sqrt{2x + 6}$

b) $f(x) = \frac{1}{|x - 1|}$

c) $f(x) = e^{|x|}$

Aufgabe 5.4

Bestimmen Sie das Symmetrieverhalten (gerade/ungerade) der folgenden Funktionen in ihrem maximalen reellen Definitionsbereich.

a) $f(x) = 4x^2 - 16$

b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

c) $f(x) = |x^2 - 4|$

Aufgabe 5.5

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in ihrem maximalen reellen Definitionsbereich auf Monotonie.

a) $f(x) = x^4$

b) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ ($x \geq 1$)

c) $f(x) = e^{2x}$

Aufgabe 5.6

Wie lautet die jeweils die Umkehrfunktion von f ?

a) $f(x) = \frac{1}{2x}$, $D_f = (0, \infty)$

b) $f(x) = \sqrt{3x}$, $D_f = (0, \infty)$

c) $f(x) = 2e^{x-0,5}$, $D_f = \mathbb{R}$

Aufgabe 5.7 *

Es sei $D_f = [3, \infty)$ und $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-4}.$$

- a) Geben Sie den Bildbereich B_f an und skizzieren Sie den Graphen von f . Ist f beschränkt?
- b) Zeigen Sie, dass $f : D_f \rightarrow B_f$ invertierbar ist. Was ist $f^{-1}(\frac{1}{15})$?
- c) Was ist der maximale reelle Definitionsbereich?