

Mathematik für Chemiker: Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1

Welche der nachstehenden Folgen (a_n) sind Nullfolgen? (Mit Begründung!)

a) $a_n = \frac{1}{n} \sin n$

b) $a_n = \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}$

c) $a_n = (-1)^n n^2 / \binom{n}{3}$

Aufgabe 8.2

Zeigen Sie jeweils, dass die Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert für $n \rightarrow \infty$.

a) $a_n = \left(\frac{3n+1}{n+1} - \frac{n+1}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$

b) $a_n = \frac{7n^7(1 + \frac{1}{n!})(n^3 - n^2)}{(n^3 + 2)(n^5 + \sqrt{n+1})n^2}$

c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

d) $a_n = \sqrt{2n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Aufgabe 8.3

Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

- a) Berechnen Sie die Folgenglieder $a_1, \dots, a_5$.
- b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $(a_n)_{n \geq 0}$ eine streng monoton wachsende Folge ist und dass für alle Folgenglieder $a_n \leq 2$ gilt.
- c) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \geq 0}$ konvergent ist und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 8.4 *

Die Folge (a_n) sei durch $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$ für $n \geq 1$ gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend ist mit $a_n \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- b) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 8.5

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+n}$

Aufgabe 8.6

Welche der folgenden Reihen konvergiert, konvergiert absolut oder divergiert?

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{k^3 + 3k^2 + 1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k}^{-1}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2k+3}$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{k^k}$

f) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+4}{2k^2 - 3k + 3}$