

Mathematik für Chemiker: Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1

Bestimmen Sie für $f(T) = Ae^{-\frac{\alpha}{T}}$ ($A, \alpha > 0$) die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(T_0, f(T_0))$ für $T_0 = \alpha$.

Aufgabe 10.2

Geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich D_f der Funktion f an. In welchen Punkten $x \in D_f$ ist f differenzierbar. Bestimmen Sie dort die Ableitung von f .

- | | | |
|--|--|--|
| a) $f(x) = x^3 e^x$ | b) $f(x) = \sin x \cos x$ | c) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ |
| d) $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ | e) $f(x) = e^{-\pi^2 + 1}$ | f) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ |
| g) $f(x) = x^2 \sin(\ln x) e^{\sqrt{x}}$ | h) $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x + 1}$ | i) $f(x) = x^x$ |
| j) $f(x) = \frac{\sin(x + e^x)}{2 + 2\sin x - \cos^2 x}$ | k) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\ln(\tan x)}$ | l) $f(x) = \operatorname{arsinh}(e^x)$ |

Tipp zu (j): Vereinfachen Sie zuerst den Nenner.

Aufgabe 10.3

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes, dass folgende Ungleichungen für alle $x, y \in \mathbb{R}$ richtig sind.

- a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ b) $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$

Aufgabe 10.4

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = x^3 + x$ gegeben.

- a) Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist. Welche Bildmenge hat f ?
b) Nach (a) ist f invertierbar. Berechnen Sie $(f^{-1})'(2)$.

Aufgabe 10.5

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh x}{1 - \cos x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(\ln(1+x))}{x^2 - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(\ln x)}{x^2 - 1}$.

Aufgabe 10.6

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktionen

- a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ b) $f(x) = x^2 e^{-2x}$ c) $f(x) = \ln(1+x^2) - 1$

durch. Dazu sind jeweils folgende Punkte zu bearbeiten:

- Definitions- und Wertebereich von f
- Symmetrieeigenschaften (gerade/ungerade)?
- Nullstellen, Extrema und Wendepunkte von f
- Verhalten von f für $x \rightarrow \pm\infty$
- Skizze des Funktionsgraphen

Aufgabe 10.7 *

Bei einer chemischen Reaktion $A \rightarrow B$ erster Ordnung erfüllt die Konzentration $c_A(t)$ des Stoffes A die Gleichung

$$c'_A(t) = -kc_A(t)$$

mit einer Reaktionsgeschwindigkeitskonstanten $k > 0$. Zu Beginn der Reaktion (d.h. für $t = 0$) habe A die Anfangskonzentration $c_A(0) = c_A^0$.

Wie groß ist die Konzentration von A zur Zeit $t > 0$? Nach welcher Zeit ist die Konzentration von A auf die Hälfte abgesunken?