Universität Paderborn
Institut für Mathematik
C. Kaiser / D. Päschke

19. Januar 2009

Mathematik für Chemiker: Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1

Bei einer elementaren chemischen Reaktion $A \to B$ wird der zeitliche Verlauf der Konzentrationen $c_A(t)$, $c_B(t)$ durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} c_A'(t) &= -k\, c_A(t), \\ c_B'(t) &= k\, c_A(t) \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $k > 0$ beschrieben. Zur Zeit $t = 0$ sei $c_A(0) = a$ und $c_B(0) = 0$.

a) Zeigen Sie: $c_A(t) + c_B(t) = a$ für alle $t \geq 0$.

b) Aus Teil (a) folgt, dass c_B die Differentialgleichung $c_B'(t) = k(a - c_B(t))$ erfüllt.
Berechnen Sie $c_B(t)$.

Aufgabe 13.2 *

Im Fall einer reversiblen elementaren Reaktion $A \rightleftharpoons B$ erfüllen die Konzentrationen $c_A(t)$, $c_B(t)$ die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} c_A'(t) &= -k_1\, c_A(t) + k_2\, c_B(t), \\ c_B'(t) &= k_1\, c_A(t) - k_2\, c_B(t) \end{aligned}$$

mit Konstanten $k_1, k_2 > 0$. Zur Zeit $t = 0$ sei $c_A(0) = a$ und $c_B(0) = b$.

a) Zeigen Sie: $c_A(t)$ erfüllt die Differentialgleichung $c_A' = -k_1\, c_A + k_2(a + b - c_A)$.

b) Berechnen Sie $c_A(t)$ sowie $\lim\limits_{t\to\infty} c_A(t)$.

Aufgabe 13.3

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' + 3y = 2e^{-t}, \qquad y(0) = 0$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.

Aufgabe 13.4

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

a) $y'' + 4y' + 3y = 0$

b) $y'' + 16y = 0$

Aufgabe 13.5

Es sei $t \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie die Euklidnorm der Vektoren

a) $x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $x = \begin{pmatrix} 1+t \\ \sqrt{1+t^2} \\ 1-t \end{pmatrix}$

c) $x = \begin{pmatrix} \sinh t \\ -1 \\ \sqrt{3}\cosh t \end{pmatrix}$

Aufgabe 13.6

Für $t > 0$ seien die Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^4$ durch

$$x = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \\ -t \\ \sqrt{2t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \\ t/4 \\ -\sqrt{t/2} \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie $\|x\|$, $\|y\|$ und $\langle x, y\rangle$. Welchen Winkel schließen x und y für $t = \sqrt{2} + 1$ ein?