

Mathematik für Chemiker: Übungsblatt 14

Aufgabe 14.1

Untersuchen Sie die Vektoren a_1, a_2, a_3 jeweils auf lineare Unabhängigkeit.

$$\text{a) } a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 14.2

Welche der folgenden Mengen sind Teilräume? Begründen Sie Ihre Antwort jeweils und geben Sie gegebenenfalls eine Basis für V sowie die Dimension von V an.

- a) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2, 2x_3 + 3x_4 = 0\}$
- b) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$
- c) $V = \{x \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^5 : x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$
- d) $V = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$

Aufgabe 14.3

Berechnen Sie AB und BA für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.4

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle möglichen Matrixprodukte aus jeweils zwei dieser Matrizen.

Aufgabe 14.5 *

- a) Finden Sie eine Matrix $A \in M_{2,2}$, deren sämtliche Elemente $\neq 0$ sind und für die $A \cdot A = A$ gilt.
- b) Finden Sie eine Matrix $B \in M_{2,2}$, deren sämtliche Elemente $\neq 0$ sind und für die $B \cdot B = 0$ gilt.