

Mathematik für Chemiker: Übungsblatt 15

Aufgabe 15.1

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,6}.$$

- a) Bringen Sie A durch elementare Zeilenoperationen auf Treppenform. Welchen Rang hat A ?
- b) Bestimmen Sie alle Lösungen des homogenen LGS $Ax = 0$.

Aufgabe 15.2

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 6 & 0 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie alle Lösungen von $Ax = b$ für

a) $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 15.3

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & -3 \end{array}$$

Aufgabe 15.4

Berechnen Sie.

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 15.5

Berechnen Sie die Determinante durch Entwickeln nach einer geeigneten Zeile oder Spalte.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Aufgabe 15.6 *

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche α gilt $\det(A) = 0$? Bestimmen Sie alle Lösungen von $Ax = b$ für

$$\text{a) } b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 15.7 *

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (2+t)x + 6y + 4z &= a \\ x + (5-t)y + 4z &= b \\ -2x - 3y - tz &= c \end{aligned}$$

unabhängig von der Wahl von $a, b, c \in \mathbb{R}$ stets lösbar?