Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und H. Herr

SS 2019
Mittwoch, 05.06.2019

Skript für die Lesewoche

Kommutatorenuntergruppen & Auflösbarkeit

Definition 1 Seien G eine Gruppe und $x, y \in G$. Der Kommutator von x und y ist definiert als:

$$[x, y] := xyx^{-1}y^{-1}.$$

Es gilt für alle $x, y \in G$:
(1) $[x, y] = e \quad \Leftrightarrow \quad xy = yx \quad \Leftrightarrow \quad x$ und y kommutieren.
(2) $[x, y]^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$

Definition 2 Die Kommutatorengruppe von G ist definiert als die Gruppe

$$G' = [G, G] := \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle.$$

Alternativ:

$$G' := \{[x_1, y_1] \cdot ... \cdot [x_n, y_n] \mid x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in G, n \in \mathbb{N}\}$$

G' ist also abgeschlossen unter " $\cdot$ ".

Satz 1 *Die Untergruppe G' ist normal in G und $G^{ab} := G/G'$ ist abelsch. (G' heißt Abelianisierung von G.)*

Beweis. (1) Behauptung: Sei $H \xrightarrow{\varphi} \tilde{H}$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt: $\varphi(H') \subset \tilde{H}'$.
Beweis folgt aus $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ für alle $x, y \in H$.

(2) Sei $a \in G$. Dann ist die Abbildung $G \xrightarrow{\mathrm{Ad}_a} G$, $g \mapsto aga^{-1}$ ein Homomorphismus.
$\Rightarrow \quad \forall a \in G: \quad \underbrace{aG'a^{-1}}_{=\mathrm{Ad}_a(G')} \subset G' \quad \Rightarrow \quad G' \lhd G.$

(3) Seien $\bar{x}, \bar{y} \in G/G'$. Es gilt:

$$\bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x},$$

da für alle $x, y \in G$: $xyx^{-1}y^{-1} \in G'$.

$\square$

Lemma 1 *Sei $K \lhd G$ ein Normalteiler mit G/K abelsch.*
Dann gilt: $G' \subset K$.

Beweis. Wir betrachten die Projektion $G \xrightarrow{\pi} G/K$.
Aus G/K abelsch folgt für alle $x, y \in G$: $\pi([x,y]) = [\pi(x), \pi(y)] = e$.
$\Rightarrow \quad \pi(G') = \{e\} \quad \Rightarrow \quad G' \subset K$. $\square$

Satz 2 *Seien G eine Gruppe, $\pi : G \to G^{ab} = G/G'$ die kanonische Projektion und A eine abelsche Gruppe. Dann ist die Abbildung*

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(G^{ab}, A) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_{Gr}(G, A),$$
$$(G^{ab} \xrightarrow{\varphi} A) \longmapsto \pi^*(\varphi) = \varphi \circ \pi : (G \xrightarrow{\pi} G^{ab} \xrightarrow{\varphi} A)$$

eine Bijektion.

Beweis. (1) π^* ist injektiv:
Betrachte $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(G^{\mathrm{ab}}, A)$ mit $\varphi_1 \circ \pi = \varphi_2 \circ \pi$.
Aus der Surjektivität von π folgt sofort: $\varphi_1 = \varphi_2$.
(2) π^* ist surjektiv.
Sei $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(G, A)$.
Es gilt für $K = \mathrm{Ker}(\psi)$: $\quad G/K \cong \underset{\substack{\uparrow \\ \text{abelsch}}}{\mathrm{Im}(\psi)} \subset A$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & A \\ & G/G' \arrow[ur, dotted, "\exists!\bar{\psi}"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad G' \subset K \quad \overset{\text{univ. Eigenschaft}}{\underset{\text{von } G/G'}{\Longrightarrow}} \quad \exists!\bar{\psi} : G/G' \to A : \ \bar{\psi} \circ \pi = \psi$$

$\Rightarrow \quad \psi = \pi^*(\bar{\psi})$

$\square$

Motivation Seien G eine Gruppe und K ein Körper.
Eine Darstellung von G ist ein Homomorphismus $G \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}_n(K)$.

$$n = 1 \ \Rightarrow \ \rho \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(G, K^*) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(G^{\mathrm{ab}}, K^*)$$

Satz 3 *Sei $n \geq 3$ und $G = \Sigma_n$. Dann gilt:* $G' = A_n$.

Korollar 1 *Für $n \geq 2$:* $\Sigma_n^{ab} = \Sigma_n / A_n \cong \mathbb{Z}_2$.

Denn Σ_2 ist isomorph zu $\mathbb{Z}_2$ und $\Sigma_2' = \{e\}$.
Bemerke dabei:

$$\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\} \text{ mit } \bar{1} + \bar{1} = \bar{0} \text{ bzw. } \mathbb{Z}_2 = \langle g \mid g^2 = e \rangle.$$

Es gilt:

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{C}^*) = \{t, s\}$, wobei $t(\bar{1}) = 1$ und $s(\bar{1}) = -1$.
$\Rightarrow$ $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}}(\Sigma_n, \mathbb{C}^*) = \{T, S\}$ mit $T(\sigma) = 1$, $S(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ für alle $\sigma \in \Sigma_n$.

$$\begin{tikzcd} \Sigma_n \arrow[rr, shift left, "T"] \arrow[rr, shift right, "S"'] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{C}^* \\ & \Sigma_n/A_n \arrow[ur, shift left, "t"] \arrow[ur, shift right, "s"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. (1) <u>Behauptung</u>: $\Sigma_n' \subset A_n$

<u>Beweis</u>: $A_n = \mathrm{Ker}(\Sigma_n \xrightarrow{\mathrm{sgn}} \{+1, -1\})$
Aus Σ_n/A_n abelsch folgt sofort: $\Sigma_n' \subset A_n$.

(2) Seien $i, j, k \in \{1, ..., n\}$ mit $|\{i, j, k\}| = 3$. Es gilt:
$$(i\ j)(i\ k)(i\ j)^{-1}(i\ k)^{-1} = (i\ j)(i\ k)(i\ j)(i\ k) = (i\ j\ k) \in \Sigma_n'.$$

(3) <u>Behauptung</u>: Die 3-Zykel $(i\ j\ k)$ erzeugen A_n für alle $n \in \mathbb{N}$.
$(A_1 = A_2 = \{e\})$
<u>Beweis</u>:
(a) Sei $\sigma \in A_n$. Es gilt:
$$\sigma = [(i_1\ j_1)(i_2\ j_2)] \cdot ... \cdot [(i_{2m-1}\ j_{2m-1})(i_{2m}\ j_{2m})]$$
für geeignete $i_1, ..., i_{2m}, j_1, ..., j_{2m} \in \{1, ..., n\}$ mit $i_k \neq j_k$, $m \in \mathbb{N}$.
(b) Für $|\{a, b, c, d\}| = 4$: $(a\ b)(c\ d) = (a\ c\ b)(a\ c\ d)$.
Für $|\{a, b, c\}| = 3$: $(a\ b)(a\ c) = (a\ c\ b)$.

(4) Somit gilt:
$$A_n = \langle (a\ b\ c) \ \mid\ a, b, c \in \{1, ..., n\},\ |\{a, b, c\}| = 3 \rangle \subset \Sigma_n'$$
$\Rightarrow A_n = \Sigma_n'$. □

<u>Frage</u>: Was ist A_n' bzw. A_n^{ab}?

Satz 4 *(1) Seien $n \geq 4$, $a_i, b_i, c_i, d_i \in \{1, ..., n\}$ mit $|\{a_i, b_i, c_i, d_i\}| = 4$ für $i \in \{1, 2\}$.*
Dann gilt: $(a_1\ b_1)(c_1\ d_1) \sim (a_2\ b_2)(c_2\ d_2)$ in A_n.
(2) Seien $n \geq 5$ und $x_i, y_i, z_i \in \{1, ..., n\}$ mit $|\{x_i, y_i, z_i\}| = 3$ für $i \in \{1, 2\}$.
Dann gilt: $(x_1\ y_1\ z_1) \sim (x_2\ y_2\ z_2)$ in A_n.

Beweis. (1) Sei $n = 3$.
$\Rightarrow$ $|A_3| = 3$ $\Rightarrow$ $A_3 \cong \mathbb{Z}_3$ ist abelsch.
Es gilt: $(1\ 2\ 3) \sim (1\ 3\ 2)$ in Σ_3, aber $(1\ 2\ 3) \nsim (1\ 3\ 2)$ in A_3.

(2) • Betrachte $\sigma = (a\ b)(c\ d)$. Es gilt:
$$\tau_0 := (a\ b) \quad \Rightarrow \quad \tau_0 \sigma \tau_0^{-1} = \sigma.$$
• Betrachte $\sigma = (x\ y\ z)$. Es gilt:
$$\tau_0 := (e\ f) \text{ mit } e, f \in \{1, ..., n\} \setminus \{x, y, z\}\ (n \geq 5!) \quad \Rightarrow \quad \tau_0 \sigma \tau_0^{-1} = \sigma.$$

(3) In den beiden Fällen gilt:

$$C(\sigma)_{\Sigma_n} = \left\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in \Sigma_n\right\} \underset{\supset \text{ ist klar}}{=} \left\{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in A_n\right\} = C(\sigma)_{A_n}.$$

Denn für $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$:

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau\tau_0)\sigma(\tau_0^{-1}\tau^{-1}) \quad \text{und} \quad \operatorname{sgn}(\tau\tau_0) = 1.$$

(4) Für $\sigma, \tilde{\sigma} \in \Sigma_n$ gilt:

$$\sigma \sim \tilde{\sigma} \iff \operatorname{typ}(\sigma) = \operatorname{typ}(\tilde{\sigma})$$

$$\iff C(\sigma)_{A_n} \overset{(3)}{=} C(\sigma)_{\Sigma_n} = C(\tilde{\sigma})_{\Sigma_n} \overset{(3)}{=} C(\tilde{\sigma})_{A_n}.$$

$\Rightarrow$ <u>Aussage</u>. □

Definition 3 Eine Gruppe G heißt <u>einfach</u>, wenn sie keine Normalteiler außer $\{e\}$ und G enthält.

Beispiel 1 (1) Sei p eine Primzahl. Dann ist $\mathbb{Z}_p$ einfach.
(2) $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ ist einfach.

In den 80-er Jahren wurden <u>alle</u> endlichen einfachen Gruppen beschrieben.

Satz 5 *A_n ist einfach für alle $n \geq 5$.*

Beweis. (1) Sei $\sigma = (i_1 \ldots i_r)(j_1 \ldots j_s) \cdot \ldots \cdot (k_1 \ldots k_t) \in \Sigma_n$ in der Zyklendarstellung und $\rho \in \Sigma_n$. Dann gilt:

$$\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(i_1) \ldots \rho(i_r))(\rho(j_1) \ldots \rho(j_s)) \cdot \ldots \cdot (\rho(k_1) \ldots \rho(k_t)).$$

(2) Seien $N \lhd A_n$ und $\sigma \in N \setminus \{e\}$. Schreibe $ord(\sigma)$ als Produkt aus Primzahlen:

$$\operatorname{ord}(\sigma) = m = \overbrace{\underbrace{p_1}_{=:p} \cdot \underbrace{p_2 \cdot \ldots \cdot p_q}_{=:l}}^{\text{Primzahlen}}$$

$\Rightarrow \quad \left(\sigma^l\right)^p = e$, außerdem gilt: $\sigma^l \in N$.

Durch Betrachten von σ^l anstatt σ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen: $\operatorname{ord}(\sigma) = p$ ist eine Primzahl.

$\Rightarrow$ Die Zyklendarstellung von σ hat die Form $(i_1 \ldots i_p)(j_1 \ldots j_p) \cdot \ldots$.

(3) (a) Fall $p \geq 5$: Schreibe $\sigma = (i_1\ i_2\ i_3 \ldots i_p) \cdot \tau$, wobei τ aus dem Produkt der restlichen Zykel besteht.
Sei $\rho = (i_1\ i_2\ i_3)$. Dann gilt:

$$\sigma' = \rho\sigma\rho^{-1} = (i_2\ i_3\ i_1\ i_4 \ldots i_p) \cdot \tau \in N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \sigma' \cdot \sigma^{-1} &= (i_2\ i_3\ i_1 \mid i_4 \mid \ldots i_p)(i_p \ldots \mid i_4\ i_3\ i_2\ i_1) \in N \\ &= (i_2\ i_3\ i_1\ i_4)(i_4\ i_3\ i_2\ i_1) \\ &= (i_1\ i_2\ i_3) \end{aligned}$$

Alle 3-Zyklen sind konjugiert in A_n und erzeugen A_n.

$\Rightarrow \quad N = A_n$

(b) Fall $p = 3$:
Falls gilt $(i_1\ i_2\ i_3) \in N$, so folgt direkt $N = A_n$.
Sonst für $\sigma = (i_1\ i_2\ i_3)(j_1\ j_2\ j_3) \cdot \tau \in N$, wobei τ wieder das Produkt der restlichen Zykel ist, gilt:

$$\rho := (i_1\ j_1)(i_2\ j_2) \quad \Rightarrow \quad \sigma' := \rho\sigma\rho^{-1} = (j_1\ j_2\ i_3)(i_1\ i_2\ j_3) \cdot \tau \in N$$

$$\begin{aligned}\sigma'\sigma^{-1} &= (j_1\ j_2\ i_3)(i_1\ i_2\ j_3)(i_1\ i_2\ i_3)(j_1\ j_2\ j_3) \in N \\ &= (i_1\ j_1)(i_3\ j_3)\end{aligned}$$

Alle Elemente der Form $(a\ b)(c\ d)$ sind konjugiert in A_n und erzeugen A_n.
$\Rightarrow \quad N = A_n$

(c) Fall $p = 2$: Schreibe $\sigma = (i_1\ i_2)(i_3\ i_4) \cdot \tau$, wobei τ wieder das Produkt der restlichen Zykel ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}&\rho := (i_1\ i_2\ i_3) \quad \Rightarrow \quad \sigma' := \rho\sigma\rho^{-1} = (i_2\ i_3)(i_1\ i_4) \cdot \tau \in N \\ \Rightarrow \quad &\sigma'\sigma^{-1} = (i_2\ i_3)(i_1\ i_4)(i_3\ i_4)(i_1\ i_2) = (i_1\ i_3)(i_2\ i_4) \in N\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad N = A_n$

□

Korollar 2 *Für $n \geq 5$:* $\quad A_n' = A_n$.

Beweis. A_n ist einfach und $A_n' \lhd A_n$.
$\Rightarrow \quad A_n' \in \{\{e\}, A_n\}$
Weiter gilt: A_n/A_n' ist abelsch, A_n allerdings nicht.
$\Rightarrow \quad A_n' \neq \{e\} \quad \Rightarrow \quad A_n' = A_n$. □

Korollar 3 *Es gilt für $n \geq 5$:* $\quad A_n^{ab} = \{e\}$.
Insbesondere gilt:

$$\mathrm{Hom}_{Gr}(A_n, K^*) = \{t\}, \quad \textit{wobei } \forall \sigma \in A_n : \quad t(\sigma) = 1.$$

Definition 4 Eine Gruppe G heißt <u>auflösbar</u>, falls eine Kette

$$\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = G$$

existiert, so dass für alle $1 \leq i \leq n$ die Faktorgruppe G_i/G_{i-1} abelsch ist.

Beispiel 2 (1) Die symmetrische Gruppe Σ_4 ist auflösbar:

$$\Sigma_4 \rhd A_4 \rhd V_4 \rhd \underbrace{\{e,\ (1\ 2)(3\ 4)\}}_{=:C},$$

wobei:

$$\Sigma_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2, \quad A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3, \quad V_4/C \cong \mathbb{Z}_2.$$

(2) Sei p eine Primzahl und G eine p-Gruppe (also $\mathrm{ord}(G) = p^n$).
Dann ist G auflösbar. Denn es existiert eine Kette

$$\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd ... \lhd G_n = G$$

mit $G_i/G_{i-1} \cong \mathbb{Z}_p$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(3) A_n ist nicht auflösbar für alle $n \geq 5$.
Beweis: Sei $K \lhd A_n$ mit $K \neq A_n$ und A_n/K abelsch. Dann gilt $A_n' \subset K$. Aber $A_n' = A_n$ und somit folgt $K = A_n$. ↯

(4) D_n ist auflösbar für alle $n \geq 3$.
Beweis: $D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = e,\ bab^{-1} = a^{n-1} \rangle$
$\Rightarrow \quad \mathbb{Z}_n \cong A := \langle a \rangle \lhd D_n$ und $|D_n/A| = \frac{2n}{n} = 2$
$\Rightarrow \quad D_n/A \cong \mathbb{Z}_2$

Satz 6 *Sei G eine auflösbare Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Dann ist H auch auflösbar.*

Beweis. Betrachte die Kette:

$$\begin{array}{l} G = G_n \rhd G_{n-1} \rhd ... \rhd G_0 = \{e\} \\ \cup \\ H = H_n \supset H_{n-1} \supset ... \supset H_0 = \{e\}, \end{array}$$

wobei G_i/G_{i-1} abelsch und $H_i := G_i \cap H$ für alle $1 \leq i \leq n$.

(1) $H_{i-1} \lhd H_i$:
Sei $h \in G_i \cap H$ beliebig.
Dann gilt $h(G_{i-1} \cap H)h^{-1} \subset H_{i-1} \cap H$, denn:
- $h \in G_i \quad \Rightarrow \quad hG_{i-1}h^{-1} \subset G_{i-1}$
- $h \in H \quad \Rightarrow \quad hHh^{-1} \subset H$

(2) Wir betrachten die folgende Verknüpfung:

$$\begin{tikzcd} H_i = G_i \cap H \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\varphi_i"] & G_i \arrow[r] & G_i/G_{i-1} \end{tikzcd}$$

Es gilt:

$$\mathrm{Ker}(\varphi_i) = H_i \cap G_{i-1} = H \cap H_i \cap G_{i-1} = H \cap G_{i-1} = H_{i-1},$$

$$H_i/H_{i-1} = H_i/\mathrm{Ker}(\varphi_i) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(\varphi_i) \subset G_i/G_{i-1}.$$

G_i/G_{i-1} ist abelsch, insbesondere also auch H_i/H_{i-1}.

□

Korollar 4 *Die symmetrische Gruppe Σ_n ist nicht auflösbar für $n \geq 5$.*

Beweis. Wäre Σ_n auflösbar, so wäre auch $A_n \subset \Sigma_n$ auflösbar. ↯ □

Satz 7 *Seien G eine auflösbare Gruppe und $G \xrightarrow{\pi} H$ ein surjektiver Homomorphismus. Dann ist H auflösbar.*

Beweis. Wir betrachten die Ketten:

$$
\begin{tikzcd}
\{e\} = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n = & G \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_n = & H
\end{tikzcd}
$$

wobei $H_i := \pi(G_i)$ für alle $0 \leq i \leq n$.

(1) <u>Behauptung</u>: $\forall\ 1 \leq i \leq n: \quad H_{i-1} \lhd H_i$.

Seien $b \in H_i$ und $h \in H_{i-1}$ beliebig. Wir müssen zeigen: $bhb^{-1} \in H_{i-1}$.
Aus der Surjektivität von π folgt:

$$\exists a \in G_i: \quad b = \pi(a) \quad \wedge \quad \exists g \in G_{i-1}: \quad h = \pi(g)$$

$$
\begin{tikzcd}
G_{i-1} \arrow[rr, tail] \arrow[d, two heads] & g \arrow[d, mapsto] & G_i \arrow[rr, tail] \arrow[d, two heads] & a \arrow[d, mapsto] & G \arrow[d, two heads, "\pi"] \\
H_{i-1} \arrow[rr, tail] & h & H_i \arrow[rr, tail] & b & H
\end{tikzcd}
$$

Aus $G_{i-1} \lhd G_i$ folgt: $aga^{-1} \in G_{i-1}$.
Insbesondere gilt:

$$
\begin{aligned}
bhb^{-1} &= \pi(a)\pi(g)\pi(a)^{-1} \\
&= \pi(aga^{-1}) \ \in H_{i-1}.
\end{aligned}
$$

(2) <u>Behauptung</u>: H_i/H_{i-1} ist abelsch für alle $1 \leq i \leq n$.

(a) Identifiziere $\pi = \pi|_{G_i}$ für alle $0 \leq i \leq n$. Weiter, seien $p: \ G_i \to G_i/G_{i-1}$ und $q: \ H_i \to H_i/H_{i-1}$ die Projektionen und $r := q \circ \pi$.
Dann existiert genau ein $s: \ G_i \to G_i/G_{i-1}$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$
\begin{tikzcd}
G_{i-1} \arrow[r, tail] \arrow[d, two heads, "\pi"] & G_i \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "r"] & G_i/G_{i-1} \arrow[d, dashed, "\exists ! s"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
H_{i-1} \arrow[r, tail] & H_i \arrow[r, two heads, "q"] & H_i/H_{i-1}
\end{tikzcd}
$$

bzw.

$$
\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, "r"'] & G_i/G_{i-1} \arrow[d, dashed, "\exists ! s"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
& H_i/H_{i-1}
\end{tikzcd}
$$

(b) Es gilt: $r(G_{i-1}) = \{e\} \subset H_i/H_{i-1}$
Denn für $g \in G_{i-1}$ gilt: $r(g) = q(\pi(g)) = \bar{e}$, da $q(H_{i-1}) = \{\bar{e}\}$.

(c) Aus der universellen Eigenschaft von G_i/G_{i-1} erhalten wir genau einen Homomorphismus $s: G_i/G_{i-1} \to H_i/H_{i-1}$, so dass $s \circ p = r$.
Behauptung: s ist surjektiv.
Es gilt:

$$s \circ p = \underbrace{q \circ \pi}_{\uparrow\ \uparrow \text{ surjektiv}} = r$$

$\Rightarrow$ r ist surjektiv. $\Rightarrow$ s ist surjektiv.
Alternativ: Es gilt für alle $a \in G_i$: $s(aG_{i-1}) = \pi(a)H_{i-1}$.

(d) Da der Homomorphismus $G_i/G_{i-1} \xrightarrow{s} H_i/H_{i-1}$ surjektiv und G_i/G_{i-1} abelsch sind, folgt:
$H_i/H_{i-1} = \operatorname{Im}(s) \cong (G_i/G_{i-1})/\operatorname{Ker}(s)$ ist abelsch.

$\square$

Satz 8 *Seien G eine Gruppe, $K \lhd G$ und $H = G/K$. Dann gilt:*

$$G \text{ ist auflösbar.} \iff K \text{ und } H \text{ sind auflösbar.}$$

Beweis. " $\Longrightarrow$ " wurde bereits gezeigt.
" $\Longleftarrow$ ": Wir betrachten die Ketten:

$$\begin{tikzcd}
\{e\} = K_0 \lhd \dots \lhd K_{m-1} \lhd K \arrow[r, tail] & G \arrow[r, two heads, "\pi"] & H \\
& G_{n-1} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\pi"] & H_{n-1} \arrow[u, phantom, "\triangledown"] \\
& \vdots \arrow[u, phantom, "\cup"] & \vdots \arrow[u, phantom, "\triangledown"] \\
& G_0 \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\pi"] & H_0 = \{e\} \arrow[u, phantom, "\triangledown"]
\end{tikzcd}$$

wobei K_j/K_{j-1} und H_i/H_{i-1} abelsch sind für alle i und j.
Wir definieren $G_i := \pi^{-1}(H_i)$ für alle $0 \leq i \leq n-1$. Dann folgt aus dem Korrespondenzsatz für alle $1 \leq i \leq n$:

- $G_{i-1} \lhd G_i$
- $G_i/G_{i-1} \cong H_i/H_{i-1}$
- $G_0 = K$

Somit ist

$$\{e\} = K_0 \lhd K_1 \lhd \dots \lhd K_m = K = G_0 \lhd G_1 \lhd \dots \lhd G_n = G$$

die gesuchte Kette. $\square$

Sei G eine Gruppe. Wir definieren induktiv für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} G' &:= [G, G] \qquad \text{Kommutatorengruppe} \\ G'' &:= [G', G'] \\ &\vdots \\ G^{(n+1)} &:= [G^{(n)}, G^{(n)}] \end{aligned}$$

So erhalten wir die Kette

$$\ldots \lhd G^{(n+1)} \lhd G^{(n)} \lhd \ldots \lhd G' \lhd G$$

mit $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ abelsch für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 9 *Sei G eine* <u>*endliche*</u> *Gruppe. Dann gilt:*

$$G \text{ ist auflösbar} \iff \exists n \in \mathbb{N}_0 : \quad G^{(n+1)} = \{e\}$$

Beweis. • " $\Longleftarrow$ ":

$$\begin{array}{rcll} \{e\} = G^{(n+1)} \lhd G^{(n)} & \xrightarrow{\cong} & G^{(n)}/G^{(n+1)} & \\ G^{(n)} \lhd G^{(n-1)} & \longrightarrow & G^{(n-1)}/G^{(n)} & \quad \text{abelsch} \\ \vdots & & \vdots & \\ G' \lhd G & \longrightarrow & G/G' & \end{array}$$

$G^{(n)}$ ist abelsch $\Rightarrow$ $G^{(n)}$ ist auslösbar $\Rightarrow$ $G^{(n-1)}$ ist auflösbar $\Rightarrow \ldots$
$\Rightarrow G$ ist auflösbar.
Somit ist $\{e\} \lhd G^{(n)} \lhd \ldots \lhd G^{(0)} = G$ die gesuchte Kette.

• " $\Longrightarrow$ ":

(1) G ist endlich und wir betrachten die Kette $G \supset G' \supset G'' \supset \ldots \supset G^{(n)}$.
$\Rightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad$ entweder $\; G^{(n)} = \{e\}$ <u>oder</u> $G^{(n)} = G^{(n+1)} \neq \{e\}$.
Für $H = G^{(n)}$ gilt also: $\; H' = G^{(n+1)} = H$.

(2) <u>Behauptung</u>: Sei $H \neq \{e\}$ eine Gruppe mit $H = H'$. Dann ist H <u>nicht auflösbar</u> und $H'' = H'$.
<u>Beweis</u>:
- Sei $K \lhd H$ ein Normalteiler mit H/K abelsch. Also folgt $H' \subset K$, aber es gilt $H' = H$. Insbesondere folgt: $\; K = H$.
- Aus $H' = H$ nicht abelsch folgt $H'' \neq \{e\}$.
  Angenommen $K := H'' \neq H'$, dann existiert also ein Normalteiler $K \lhd H' = H$ mit H/K abelsch und $K \subsetneq H'$. $\lightning$

(3) Aus G auflösbar folgt somit, $G \supset G^{(n)} =: H$ ist auch auflösbar. Wenn also $H = H'$ gilt, folgt $H = \{e\}$.

$\square$

Beispiel 3 Seien K ein Körper (zum Beispiel $K = \mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl p) und $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, c \in K^*,\; b \in K \right\}$.
Dann ist G auflösbar.
Beweis: Seien $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \in G$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \right] &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^{-1} & * \\ 0 & c_1^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2^{-1} & * \\ 0 & c_2^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in G', \quad \text{für ein } \lambda \in K. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad G' \subset \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in K \right\} \xrightarrow{\cong} (K, +)$$

$\Rightarrow$ G' ist abelsch und somit $G'' = \{e\}$, also wir erhalten die Kette:

$$\{e\} = G'' \lhd G' \lhd G.$$

$\Rightarrow$ G ist auflösbar.

Bemerkung Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$T_n(K) = \left\{ \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix} \right\} = \{ A \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \forall i > j : \; a_{ij} = 0 \}$$

auflösbar.
Allerdings für $G = \mathrm{GL}_n(K)$ ist $H := G' = \mathrm{SL}_n(K)$ und $H = H'$. Somit sind $\mathrm{GL}_n(K)$ und $\mathrm{SL}_n(K)$ nicht auflösbar.