Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. I. Burban und H. Herr

SS 2019
Donnerstag, 23.05.2019

Ergänzung zur Vorlesung am 22. Mai

Alle Aufgaben vom Blatt 7 lassen sich mithilfe der Bahnformel II (Lemma von Burnside) lösen. Die Vorgehensweise ist dabei stets die folgende:

- Bestimmung der Menge M aller Konfigurationen (noch ohne Berücksichtigung der Symmetrie).
- Bestimmung der Gruppe G und seiner Wirkung auf M.
- Für die Bahnformel

$$|M/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \tag{1}$$

  ist die Bemerkung hilfreich, dass $\chi(g) = \chi(h)$ für $g \sim h$ ist. Wenn also die Konjugationsklassen von G bekannt sind (aus der Vorlesung oder aus früheren Übungen), dann reicht es, $\chi(g)$ für ein einzelnes g aus jeder Konjugationsklasse zu bestimmen. Am Ende muss dann $\chi(g)$ mit der Mächtigkeit der entsprechenden Konjugationsklasse multipliziert werden.

Problem. Was ist die Anzahl von unorientierten einfachen Graphen (d.h. Graphen ohne Schlaufen bzw. Doppelpfeile) mit vier Knoten bis auf Permutation der Knoten?

Lösung. Sei $K = \big\{1, 2, 3, 4\big\}$ die Menge der Knoten und

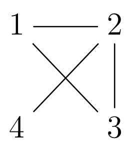
$$P_2(K) = \Big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\Big\}$$

die Menge aller zweielementigen Teilmengen von K. Dann steht die Menge aller einfachen unorientierten Graphen mit Knoten aus K in einer Bijektion mit der Potenzmenge $M = P\big(P_2(K)\big)$ (der Menge aller Teilmengen von $P_2(K)$).

Beispiel. Die Teilmenge

$$E = \Big\{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{2,4\}\Big\}$$

entspricht dem Graphen



Es gilt: $\big|P_2(K)\big| = 6$ und $\big|M\big| = 2^{|P_2(K)|} = 2^6 = 64.$

Die Gruppe $G := \Sigma_4$ operiert auf der Menge K; deshalb operiert sie auch auf der Menge $P_2(K)$.

Beispiel. Sei $\sigma = (1\ 2\ 3) \in G$. Dann gilt:

$$\{1,2\} \overset{\sigma}{\mapsto} \{2,3\} \overset{\sigma}{\mapsto} \{1,3\} \overset{\sigma}{\mapsto} \{1,2\}$$

bzw.

$$\{1,4\} \overset{\sigma}{\mapsto} \{2,4\} \overset{\sigma}{\mapsto} \{3,4\} \overset{\sigma}{\mapsto} \{1,4\}.$$

Da die Gruppe G auf der Menge $P_2(K)$ operiert, operiert sie auch auf ihrer Potenzmenge $M = P\big(P_2(K)\big)$. Wir bekommen somit eine Gruppenwirkung

$$G \times M \overset{\circ}{\longrightarrow} M \tag{2}$$

und die gestellte Frage nach der Anzahl aller einfachen Graphen mit vier Knoten, bis auf Permutation lässt sich als die Frage nach der Anzahl der Bahnen M/G übersetzen.

Man beachte weiterhin, dass die Operation $G \times P_2(K) \longrightarrow P_2(K)$ einen Gruppenhomorphismus

$$G = \Sigma_4 \overset{\varphi}{\longrightarrow} \Sigma_6 \cong \Sigma\big(P_2(K)\big)$$

definiert.

Beispiel. Sei $\sigma = (1\ 2\ 3) \in G$ und $E = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}\big\} \in M$. Dann gilt:

$$(\varphi(\sigma))(E) = \big\{\{2,3\},\{1,2\},\{1,3\},\{3,4\}\big\}.$$

Ferner, sei

$$a = \{1,2\},\ b = \{1,3\},\ c = \{1,4\},\ d = \{2,3\},\ e = \{2,4\},\ f = \{3,4\}.$$

Dann gilt: $P_2(K) = \big\{a,b,c,d,e,f\big\}$ und

$$\varphi(\sigma) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ d & a & e & b & f & c \end{pmatrix} = (a\ d\ b)(c\ e\ f).$$

Man beachte, dass $\sigma^3 = e$, deshalb gilt auch: $\big(\varphi(\sigma)\big)^3 = e$.

Die folgende Beobachtung ist *zentral* für die Lösung des Problems.

Behauptung. Sei $\pi \in G = \Sigma_4$ und $\varphi(\pi) = \varphi_1 \ldots \varphi_m$ die zyklische Darstellung von $\varphi(\pi) \in \Sigma_6$. Dann hat π genau 2^m Fixpunkte bezüglich der Gruppenoperation (2).

Beispiel. Sei $\rho = (1\ 2\ 3\ 4) \in G$. Dann gilt: $\varphi(\rho) = (a\ d\ f\ c)(b\ e)$. Für ein Element $E \in M$ gilt $\rho \circ E = E$ genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) entweder sind alle Elemente a, d, f, c des ersten Zykels in der Menge E oder sie sind alle nicht in E;

(2) entweder sind die beiden Elemente b und e des zweiten Zykels in der Menge E oder sie sind beide nicht in E.

Die Fixpunkte von ρ sind deshalb die folgenden vier Elemente der Menge M:

$$\emptyset,\ \{a,d,f,c\}\,,\ \{b,e\}\,,\ \{a,b,c,d,e,f\}\,.$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass es in der Gruppe $G = \Sigma_4$ genau fünf Konjugationsklassen von Elementen gibt.

(1) Die Konjugationsklasse von $\rho = (1\ 2\ 3\ 4)$ enthält 6 Elemente. Wir haben bereits bestimmt, dass für die Anzahl der Fixpunkte gilt $\chi(\rho) = 4$.

(2) Die Konjugationsklasse von $\sigma = (1\ 2\ 3)$ enthält 8 Elemente. Es gilt:

$$\varphi(\sigma) = (a\ d\ b)(c\ e\ f).$$

Das impliziert, dass $\chi(\sigma) = 2^3 = 8$.

(3) Die Konjugationsklasse von $\tau = (1\ 2)(3\ 4)$ enthält 3 Elemente. Es gilt:

$$\varphi(\tau) = (a)(b\ e)(c\ d)(f).$$

Es gilt: $\chi(\tau) = 2^4 = 16$.

(4) Die Konjugationsklasse von $\nu = (1\ 2)$ enthält 6 Elemente. Es gilt:

$$\varphi(\nu) = (a)(b\ d)(c\ e)(f).$$

Es gilt: $\chi(\nu) = 2^4 = 16$.

(5) Die Konjugationsklasse vom neutralen Element e enthält ein Element und hat 64 Fixpunkte.

Die Bahnformel (1) liefert:

$$\big|M/G\big| = \frac{1}{24}\big(4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 16 \cdot 3 + 16 \cdot 6 + 64 \cdot 1\big) = 11.$$

Es gibt also (bis auf Permutation der Knoten) genau 11 einfache unorientierte Graphen mit vier Knoten.