

# ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

## FUNDAMENTALGRUPPEN UND ÜBERLAGERUNGEN

OLAF M. SCHNÜRER

### INHALTSVERZEICHNIS

1. Einleitung	2
1.1. Inhalt der Vorlesung	3
1.2. Zur verwendeten Literatur	3
1.3. Danksagung	3
1.4. Konventionen und grundlegende Definitionen	3
2. Mengentheoretische Topologie	4
2.1. Metrische Räume	4
2.2. Stetige Abbildungen	6
2.3. Topologische Räume	7
2.4. Stetigkeit	9
2.5. Inneres, Abschluss, Umgebung	11
2.6. Zusammenhang	15
2.7. Kompaktheit	19
2.8. Konstruktion topologischer Räume	22
3. Homotopie und Fundamentalgruppe	37
3.1. Definition der Fundamentalgruppe	37
3.2. Fundamentalgruppe der Kreislinie	42
3.3. Anwendungen und Beispiele	47
3.4. Homotopien zwischen stetigen Abbildungen	51
3.5. Homotopie und Fundamentalgruppe	59
3.6. Produkte und Koproducte	63
3.7. Kokartesische Diagramme (oder Pushout-Diagramme)	66
3.8. Freie Monoide und Gruppen	68
3.9. Koproducte und Pushouts von Gruppen	74
3.10. Der Satz von Seifert und van Kampen	78
4. Überlagerungstheorie	89
4.1. Überlagerungen	89
4.2. Quotienten nach topologisch freien Gruppenoperationen	92
4.3. Lifts und Decktransformationen	96
4.4. Universelle Überlagerungen	98
5. Überlagerungen und Fundamentalgruppe	102
5.1. Transport durch Wegelifts	102

---

*Datum:* 4. Oktober 2019.

Skript zur Vorlesung *Algebraische Topologie* im Sommersemester 2019 an der Universität Paderborn.

5.2. Klassifikation von Überlagerungen	107
5.3. Der Faserfunktors als Äquivalenz von Kategorien	116
Anhang A. Etwas Kategorientheorie	130
A.1. Kategorien	131
A.2. Funktoren	133
Literatur	135

## 1. EINLEITUNG

Die Idee der algebraischen Topologie ist, topologische Räume - etwa Sphären, Tori, projektive Räume - besser zu verstehen, indem man ihnen algebraische Daten - etwa Zahlen, Gruppen, Ringe - zuordnet, denn oft sind diese algebraischen Daten leichter handhabbar. Man verwendet diese Idee, um topologische Räume zu unterscheiden; bisweilen gelingt sogar die Klassifikation einer gewissen Klasse topologischer Räume.

Zur Motivation nennen wir einige Resultate der Topologie. Dabei gehen wir davon aus, dass der Leser mit der Stetigkeit von Funktionen in mehreren reellen Variablen vertraut ist. Wir erinnern an die  **$n$ -dimensionale Kugelschale** oder  **$n$ -Sphäre**

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2} = 1\}.$$

- (1) Für  $n \geq 0$  gibt es keine stetige injektive Abbildung  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Der Fall  $n = 2$  wird in der Vorlesung behandelt und ist anschaulich klar: Das Plattdrücken eines Gummiballs in die Ebene ist nie injektiv. Stetigkeit bedeutet, dass man den Ball nicht zerreißen darf - Verbeulen und Dehnen ist aber erlaubt. Genauer werden wir zeigen, dass es für jede stetige Abbildung  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  einen Punkt  $x \in \mathbb{S}^2$  mit  $f(x) = f(-x)$  gibt; diese Aussage ist eine Version des Satzes von Borsuk-Ulam. Eine anschauliche Konsequenz ist, dass es stets Antipodenpunkte (also zwei einander direkt gegenüberliegende Punkte) auf der Erdoberfläche gibt, an denen Temperatur und Luftdruck übereinstimmen.
- (2) „Ein (rundum bestachelter) Igel läßt sich nicht ohne Wirbel kämmen“, Satz vom Igel, *hairy ball theorem*: Es gibt keine stetige Abbildung  $v: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , für die  $v(x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^2$  senkrecht auf  $x$  steht. Frisiertechnisch interpretiert man  $v(x)$  als die Richtung des Stachels am Punkt  $x$  auf der 2-dimensionalen Igeloberfläche. Mathematisch bedeutet dieses Ergebnis, dass es auf der  $\mathbb{S}^2$  kein (Tangential-)Vektorfeld ohne Nullstelle gibt, denn jedes solche Vektorfeld ließe sich normieren.
- (3) Sei  $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  die  $n$ -dimensionale (abgeschlossene) Vollkugel. Dann hat jede stetige Abbildung  $f: D^n \rightarrow D^n$  der Vollkugel in sich selbst einen Fixpunkt, es gibt also einen Punkt  $x \in D^n$  mit  $f(x) = x$  (Brouwerscher Fixpunktsatz). Der Fall  $n = 2$  wird in der Vorlesung behandelt. Eine Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes ist der Satz von Perron-Frobenius. Dieser wird im PageRank-Algorithmus verwendet, der der Gewichtung von Internetseiten dient.

Wir sagen, dass zwei Teilmengen  $A \subset \mathbb{R}^m$ ,  $B \subset \mathbb{R}^n$  **homöomorph** sind, wenn es eine bijektive stetige Abbildung  $f: A \rightarrow B$  gibt, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Beispielsweise ist die  $n$ -dimensionale Vollkugel  $D^n$  homöomorph zum Einheitswürfel  $[0, 1]^n$ ; die Oberfläche einer Tasse ist homöomorph zur Oberfläche eines Rettungsrings (oder zur

Oberfläche eines Donuts, oder zu einem Torus, also der Oberfläche eines Volltorus). Der Homöomorphiebegriff hat in der Topologie dieselbe zentrale Bedeutung wie der Begriff der *invertierbaren linearen Abbildung* in der Linearen Algebra. Stellen wir uns die Teilmengen  $A$  und  $B$  aus Knetgummi vor, so sind  $A$  und  $B$  homöomorph, wenn es möglich ist,  $A$  und  $B$  durch Dehnen und Verbeulen, aber ohne Zerreißen oder Verkleben, ineinander zu deformieren.<sup>1</sup> Scherzhaft wird Topologie deswegen *Gummigeometrie* genannt. Wir setzen die obige Liste fort.

- (4) Invarianz der Dimension: Sind  $\mathbb{R}^m$  und  $\mathbb{R}^n$  homöomorph, so gilt  $m = n$ .<sup>2</sup>
- (5) Der Torus  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  ist nicht homöomorph zu  $\mathbb{S}^2$ . Dies ist leicht mit Hilfe der Fundamentalgruppe zu zeigen.

Allgemein interessiert sich die Topologie für die Klassifikation gewisser topologischer Räume bis auf Homöomorphie, etwa für die Klassifikation zusammenhängender kompakter Flächen; Beispiele solcher Flächen sind  $\mathbb{S}^2$  und  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , aber etwa auch die nicht orientierbare Kleinsche Flasche.

**1.1. Inhalt der Vorlesung.** Mengentheoretische Topologie, Fundamentalgruppe, Überlagerungstheorie, unterwegs etwas Kategorientheorie.

**1.2. Zur verwendeten Literatur.** Die Vorlesung basiert hauptsächlich auf Skripten von Wolfgang Soergel, die man leicht im Internet findet, und auf [Hat02], [vQ79].

**1.3. Danksagung.** Für Anregungen, Hinweise und Korrekturen danke ich Gregor Flüchter, Robin Denart, Markus Kürten, Carsten Hecht, Joao Pöppel, Max Westerwelle, Daniel Kahl.

**1.4. Konventionen und grundlegende Definitionen.**

**1.4.1.** Die Menge der natürlichen Zahlen ist  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Die Symbole  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  bezeichnen die ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen.

**1.4.2.** Die Notation  $S \subset T$  bedeutet, dass  $S$  eine Teilmenge von  $T$  ist. Die Notation  $S \subsetneq T$  bedeutet, dass  $S$  eine echte Teilmenge von  $T$  ist. Sind  $S$  und  $T$  Teilmengen einer gegebenen Menge, so schreiben wir  $S \setminus T$  für die Menge aller Elemente von  $S$ , die nicht in  $T$  liegen. Ist  $x$  ein Punkt der umgebenden Menge, so schreiben wir  $S \setminus x$  statt  $S \setminus \{x\}$ . Schreiben wir eine Vereinigung  $S \cup T$  als  $S \sqcup T$ , so deutet dies an, dass die beiden Mengen  $S$  und  $T$  disjunkt sind.

**1.4.3.** Ist eine Abbildung  $S \rightarrow T$  von Mengen injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, so deuten wir dies durch die Notation  $S \hookrightarrow T$  bzw.  $S \twoheadrightarrow T$  bzw.  $S \xrightarrow{\sim} T$  an.

**1.4.4.** Die Notation  $\mathcal{P}(M) = \{A \subset M\}$  bezeichnet die Potenzmenge einer Menge  $M$ , also die Menge all ihrer Teilmengen.

---

<sup>1</sup>Diese Aussage dient der Anschauung und ist mathematisch offensichtlich nicht besonders präzise.

<sup>2</sup>Aus der linearen Algebra ist bekannt: Gibt es eine invertierbare  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$ , so gilt  $m = n$ .

## 2. MENGENTHEORETISCHE TOPOLOGIE

Wir führen einige wichtige Begriffsbildungen aus der mengentheoretischen Topologie ein, die jeder Mathematiker kennen sollte. Unsere Auswahl ist durch das eigentliche Thema der Vorlesung, die algebraische Topologie, beeinflusst. Wer sich für weiterführende Themen aus der mengentheoretischen Topologie interessiert, sei auf die Literatur verwiesen, etwa auf die aktuelle Auflage von [vQ79] oder auf [Mun75].

### 2.1. Metrische Räume.

**2.1.1.** Der in diesem Abschnitt diskutierte Begriff eines metrischen Raums ist vermutlich aus den Grundvorlesungen bekannt. Er motiviert die Definition eines topologischen Raums im nächsten Kapitel.

**Definition 2.1.2.** Sei  $X$  eine Menge. Eine **Metrik** auf  $X$  ist eine Abbildung  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (a) Für alle  $x, y \in X$  gelten:
  - $d(x, y) \geq 0$ ,
  - $d(x, y) = 0$  genau dann, wenn  $x = y$ ,
  - $d(x, y) = d(y, x)$ .
- (b) Für alle  $x, y, z \in X$  gilt die **Dreiecksungleichung**

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Man nennt  $d(x, y)$  die **Distanz** oder den **Abstand** der Punkte  $x$  und  $y$ . Ein **metrischer Raum** ist ein Paar  $(X, d)$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einer Metrik  $d$  auf  $X$ . Sprechen wir schlicht von einem metrischen Raum  $X$ , so ist die Metrik implizit mitverstanden.

**Beispiele 2.1.3.** (a) Sei  $X$  eine beliebige Menge. Dann definiert

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 & \text{falls } x \neq y, \end{cases}$$

für  $x, y \in X$ , eine Metrik auf  $X$ , genannt **diskrete Metrik**.

- (b) Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Auf  $\mathbb{R}^n$  definiert  $d(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$  eine Metrik. Diese Metrik heißt **euklidische Metrik** und  $\mathbb{R}^n$  mit dieser Metrik heißt  **$n$ -dimensionaler euklidischer Raum**. Speziell wird  $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$  ein metrischer Raum.
- (c) (Verallgemeinerung des vorigen Beispiels) Sei  $(V, \|\cdot\|)$  ein normierter reeller (bzw. komplexer) Vektorraum (d. h.  $\|v\| \geq 0$  für alle  $v \in V$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $v = 0$ ;  $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$  für alle  $v \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  (bzw.  $\lambda \in \mathbb{C}$ );  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  für alle  $v, w \in V$ ). Dann definiert

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

eine Metrik auf  $V$ .

**2.1.4.** (Induzierte Metrik) Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum und  $E \subset X$  eine Teilmenge, so ist  $E$  zusammen mit der Einschränkung  $d|_{E \times E}: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  ein metrischer Raum.

**Aufgabe 2.1.5.** Seien  $(X_1, d_1)$  und  $(X_2, d_2)$  metrische Räume. Dann definieren

$$d(x, y) := d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \quad (\text{Taxi- oder Manhattan-Metrik}),$$

$$d'(x, y) := \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + (d_2(x_2, y_2))^2},$$

$$d''(x, y) := \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)) \quad (\text{Maximum-Metrik}),$$

für  $x, y \in X_1 \times X_2$ , drei Metriken auf  $X_1 \times X_2$ .<sup>3</sup>

**Definition 2.1.6.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

(a) Gegeben  $x \in X$  und eine reelle Zahl  $r > 0$  heißt

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(y, x) < r\}$$

**offener Ball mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $r$ .** Manchmal sagt man **offene Kugel** statt *offener Ball*.

(b) Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt **offen**, falls<sup>4</sup> für alle  $u \in U$  ein  $r > 0$  mit  $B_r(u) \subset U$  existiert.

(c) Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt **abgeschlossen**, falls ihr Komplement  $X \setminus A$  offen ist.

**Lemma 2.1.7.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Jeder offene Ball  $B_r(x)$  ist eine offene Teilmenge von  $X$ . Hier sind  $x \in X$  und  $r > 0$  beliebig. Die Terminologie offener Ball ist somit gerechtfertigt.

*Beweis.* Sei  $u \in B_r(x)$ . Setze  $a := r - d(x, u) > 0$ . Dann gilt  $B_a(u) \subset B_r(x)$  nach der Dreiecksungleichung.  $\square$

**Aufgabe 2.1.8.** Sei  $X$  ein metrischer Raum, seien  $x \in X$  und  $r \geq 0$ . Dann ist  $D_x(r) := \{y \in X \mid d(y, x) \leq r\}$  abgeschlossen in  $X$ . Man nennt  $D_x(r)$  den **abgeschlossenen Ball mit Mittelpunkt  $x$  und Radius  $r$** .

**Satz 2.1.9.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Dann gelten:

(a)  $\emptyset$  und  $X$  sind offene Teilmengen von  $X$ .

(b) Jede (beliebige) Vereinigung offener Teilmengen von  $X$  ist offen.

(c) Jeder endliche Durchschnitt offener Teilmengen von  $X$  ist offen.

*Beweis.* Es ist klar, dass  $\emptyset$  und  $X$  offen in  $X$  sind.

Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie offener Teilmengen von  $X$ . Sei  $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ . Dann gibt es ein  $j \in I$  mit  $x \in U_j$ . Da  $U_j$  offen ist, gibt es ein  $r > 0$  mit  $B_r(x) \subset U_j$  und somit  $B_r(x) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ . Also ist  $\bigcup_{i \in I} U_i$  offen in  $X$ .

Seien  $U_1, \dots, U_n$  offene Teilmengen von  $X$ . Sei  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ . Dann gibt es für jedes  $i = 1, \dots, n$  ein  $r_i > 0$  mit  $B_{r_i}(x) \subset U_i$ . Setze  $r := \min(r_1, \dots, r_n) > 0$ . Dann gilt  $B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^n B_{r_i}(x) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$ . Also ist  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  offen in  $X$ .  $\square$

**Aufgabe 2.1.10.** Betrachte  $\mathbb{R}$  mit der euklidischen Metrik. Welche der Teilmengen  $[0, 1]$ ,  $[0, 1)$ ,  $(0, 1]$ ,  $(0, 1)$  sind offen bzw. abgeschlossen?

<sup>3</sup>Man kann dies leicht auf das Produkt endlich vieler metrischer Räume verallgemeinern.

<sup>4</sup>Wir folgen der üblichen Konvention, in Definitionen *falls* oder *wenn* im Sinne von *genau dann, wenn* zu verwenden.

## 2.2. Stetige Abbildungen.

**Definition 2.2.1.** Seien  $(X, d)$  und  $(Y, d')$  metrische Räume.

- (a) Sei  $x \in X$ . Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt **stetig in  $x$** , falls es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  gibt, so dass für alle  $x' \in X$  aus  $d(x', x) < \delta$  bereits  $d'(f(x'), f(x)) < \varepsilon$  gilt (oder kurz: so dass  $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$  gilt).
- (b) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt **stetig**, falls sie in allen Punkten  $x \in X$  stetig ist.

**Satz 2.2.2.** Für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $f$  ist stetig;
- (b) Urbilder offener Mengen sind offen: für alle offenen Teilmengen  $V$  von  $Y$  ist ihr Urbild  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$ ;
- (c) Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

*Beweis.* Übungsaufgabe 2.2.4. □

**Aufgabe 2.2.3.** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Für fixiertes  $x \in X$  ist die Abbildung  $f: X \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto d(y, x)$ , stetig.

**Aufgabe 2.2.4.** Beweise Satz 2.2.2.

**Aufgabe 2.2.5.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Betrachte die beiden Aussagen

- (a)  $f$  ist stetig.
- (b) Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen: Für alle abgeschlossenen Teilmengen  $A \subset X$  ist  $f(A)$  abgeschlossen in  $Y$ .

Gilt die Implikation (a)  $\Rightarrow$  (b)? Gilt die Implikation (b)  $\Rightarrow$  (a)?

**Aufgabe 2.2.6** (Hausdorff-Metrik). Sei  $X$  ein metrischer Raum.

- (a) Der *Abstand* eines Punktes  $x \in X$  von einer nichtleeren Teilmenge  $A \subset X$  ist durch

$$\rho(x, A) := \inf_{a \in A} d(x, a)$$

definiert. Die Abbildung  $\rho := \rho(-, A): X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  ist stetig.

Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt *beschränkt*, falls  $\sup_{x, y \in A} d(x, y) < \infty$  gilt.

- (b) Sei  $\mathcal{B}(X)$  die Menge aller beschränkten, abgeschlossenen, nichtleeren Teilmengen von  $X$ . Der **Hausdorff-Abstand** zweier Elemente  $A, B \in \mathcal{B}(X)$  ist durch

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) := \max \left\{ \sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A) \right\}$$

definiert. Dann ist  $(\mathcal{B}(X), d_{\mathcal{H}})$  ein metrischer Raum.

(Bonus) Für  $A \subset X$  und  $\varepsilon > 0$  definiere die  $\varepsilon$ -**Umgebung von  $A$**  durch

$$A_\varepsilon := \{x \in X \mid \text{es gibt } a \in A \text{ mit } d(a, x) < \varepsilon\}.$$

Für alle  $A, B \in \mathcal{B}(X)$  gilt dann

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = u(A, B) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset B_\varepsilon \text{ und } B \subset A_\varepsilon\}.$$

### 2.3. Topologische Räume.

**Definition 2.3.1.** Sei  $X$  eine Menge und sei  $\mathcal{T}$  ein System<sup>5</sup> von Teilmengen von  $X$  (mit anderen Worten ist  $\mathcal{T}$  also eine Teilmenge der Potenzmenge  $\mathcal{P}(X)$  von  $X$ , in Formeln  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  oder äquivalent  $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ ). Dann heißt  $\mathcal{T}$  eine **Topologie** auf  $X$ , falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- (a) <sup>6</sup> Es gelten  $\emptyset \in \mathcal{T}$  und  $X \in \mathcal{T}$ .
- (b)  $\mathcal{T}$  ist abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen: Gegeben beliebige Elemente  $U_i \in \mathcal{T}$ , für  $i \in I$ , wobei  $I$  eine beliebige Indexmenge ist, gilt  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ .
- (c)  $\mathcal{T}$  ist abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten: Gegeben endlich viele Elemente  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$ , für  $n \in \mathbb{N}$ , gilt  $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \mathcal{T}$ .

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{T})$ , wobei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$  sind.

Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Wir nenne eine Teilmenge von  $X$  **offen**, wenn sie ein Element von  $\mathcal{T}$  ist. Statt  $U \in \mathcal{T}$  schreiben wir meist

$$U \Subset X.$$

Eine Teilmenge  $A$  von  $X$  heißt **abgeschlossen**, falls  $X \setminus A$  offen in  $X$  ist. Unsere abkürzende Schreibweise dafür ist  $A \Subset X$ . Die Notationen  $\Subset$  und  $\Subset$  sind sehr praktisch, aber in der Literatur unüblich.

**Beispiel 2.3.2.** Ist  $(X, d)$  ein metrischer Raum, so bilden die im Sinne von Definition 2.1.6 offenen Teilmengen von  $X$  nach Satz 2.1.9 eine Topologie auf  $X$ , genannt **metrische Topologie**. Man nennt zwei Metriken auf  $X$  **topologisch äquivalent**, wenn sie dieselbe Topologie auf  $X$  definieren.

**Aufgabe 2.3.3.** Die drei Metriken aus Aufgabe 2.1.5 liefern dieselbe Topologie auf  $X_1 \times X_2$ , sind also topologisch äquivalent.

**Beispiel 2.3.4.** Die von der euklidischen Metrik auf  $\mathbb{R}^n$  induzierte metrische Topologie wird auch als **Standardtopologie** auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.

**Beispiele 2.3.5.** (a) Ist  $X$  eine Menge, so ist  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  eine Topologie auf  $X$ , genannt **diskrete Topologie**.

(b) Ist  $X$  eine Menge, so ist  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  eine Topologie auf  $X$ , genannt **Klumpentopologie** oder **indiskrete Topologie**.

(c) Sei  $X = \mathbb{R}$  und bestehe  $\mathcal{T}$  aus beliebigen Vereinigungen (offener) Intervalle  $(a, b)$ , für  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\mathcal{T}$  die Standardtopologie auf  $\mathbb{R}$ , siehe Beispiel 2.3.4.

(d) Sei  $X = \mathbb{R}$  und bestehe  $\mathcal{T}$  aus beliebigen Vereinigungen (offener) Intervalle  $(-\infty, a)$ , für  $a \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $\mathbb{R}$ .

(e) Sei  $X$  eine beliebige Menge. Es bestehe  $\mathcal{T}$  aus  $\emptyset$  und der Menge aller Komplemente endlicher Teilmengen von  $X$ . Dann ist  $\mathcal{T}$  eine Topologie auf  $X$ , genannt **koendliche Topologie** oder **kofinite Topologie**.

---

<sup>5</sup>Wir verwenden den Begriff *System* schlicht als Synonym für *Menge*, denn *System von Teilmengen* klingt etwas flüssiger als *Menge von Teilmengen*.

<sup>6</sup>Diese Forderung kann weggelassen werden, da sie aus den beiden folgenden Forderungen folgt (nimm  $I = \emptyset$ , also die Vereinigung über gar keine Menge, und  $n = 0$ , also den Schnitt über gar keine Menge).

**Definition 2.3.6.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $Y \subset X$  eine Teilmenge. Die **induzierte Topologie** oder **Spurtopologie** auf  $Y$  ist durch die Vorschrift

$$U \subseteq Y \quad :\iff \quad \exists V \subseteq X : U = V \cap Y$$

definiert. Man prüft leicht, dass dies eine Topologie auf  $Y$  definiert.

**2.3.7** (Transitivität der Spurtopologie). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Seien  $Z \subset Y \subset X$  Teilmengen. Die von  $X$  auf  $Y$  induzierte Topologie induziert eine Topologie auf  $Z$ . Diese stimmt mit der von  $X$  auf  $Z$  induzierten Topologie überein.

**2.3.8.** Ab jetzt wird jede Teilmenge  $Y$  eines topologischen Raumes  $X$  stillschweigend als topologischer Raum mit der induzierten Topologie betrachtet.<sup>7</sup>

**Beispiel 2.3.9.** Versieht man  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit der Standardtopologie, so wird die  **$n$ -Sphäre**  $\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  ein topologischer Raum.

*Warnung* 2.3.10. Sei  $X = \mathbb{R}$  mit der Standardtopologie und  $Y = [0, 2]$ . Dann ist  $(1, 2]$  eine offene Teilmenge von  $Y$ , sie ist aber nicht offen in  $X$ .

Wenn man eine Menge *offen* nennt, sollte man also immer dazusagen, welchen umgebenden topologischen Raum man betrachtet. Man sollte also  $E$  *ist offen in*  $X$  oder  $E \subseteq X$  schreiben. Nur wenn aus dem Kontext eindeutig klar ist, welchen umgebenden Raum man betrachtet, darf man von dieser Regel abweichen.

Für  $X = \mathbb{R}$  mit der Standardtopologie gelten also etwa  $(1, 3] \subseteq [0, 3]$  und  $(1, 2) \subseteq [0, 3]$  und  $(1, 2) \subseteq \mathbb{R}$ , jedoch ist  $(1, 3]$  nicht offen in  $\mathbb{R}$ . Es gilt  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ , aber  $\mathbb{Q}$  ist nicht offen in  $\mathbb{R}$ .

Ist  $Y$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ , so gilt stets  $Y \subseteq Y$ .

Analog ist der Begriff abgeschlossen immer in Bezug auf einen umgebenden topologischen Raum zu verwenden.

Ende der 1. Vorlesung am 10.04.2019.

**2.3.11.** Sei  $U \subseteq X$  eine offene Teilmenge eines topologischen Raums. Für eine beliebige Teilmenge  $V \subset U$  gilt dann  $V \subseteq U \iff V \subseteq X$ . Die Implikation  $\Leftarrow$  ist trivial. Umgekehrt bedeutet  $V \subseteq U$ , dass es eine offene Menge  $W \subseteq X$  mit  $V = W \cap U$  gibt, was als Schnitt offener Teilmengen von  $X$  offen in  $X$  ist.

**Aufgabe 2.3.12.** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (a) Die Menge der abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  ist abgeschlossen unter beliebigen Durchschnitten und endlichen Vereinigungen.
- (b) Sei  $Y$  eine Teilmenge von  $X$ . Dann ist  $A \subset Y$  genau dann abgeschlossen in  $Y$ , wenn es eine abgeschlossene Teilmenge  $B \subset X$  mit  $A = B \cap Y$  gibt.
- (c) Sei  $A \subseteq X$ . Für eine beliebige Teilmenge  $B \subset A$  gilt dann  $B \subseteq A \iff B \subseteq X$ .

**Aufgabe 2.3.13.** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{F}$  eine Menge reellwertiger Funktionen  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ , die unter Multiplikation abgeschlossen ist und die Einsfunktion enthält. Gegeben eine Teilmenge  $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$  setze

$$V(\mathcal{E}) := \{x \in X \mid g(x) = 0 \text{ für alle } g \in \mathcal{E}\}.$$

---

<sup>7</sup> Manchmal sagt man kurz, dass  $Y$  ein Unterraum von  $X$  ist. Diese Sprechweise kann jedoch zu Unklarheiten führen: Im Fall  $X = \mathbb{R}^n$  ist mit einem Unterraum oft ein Untervektorraum gemeint.



Dann gibt es genau eine Topologie auf  $X$ , deren abgeschlossene Mengen genau die Mengen der Form  $V(\mathcal{E})$  sind.

Bemerkung: Statt reellwertiger Funktionen kann man genauso gut komplexwertige Funktionen betrachten (oder Funktionen mit Werten in einem beliebigen Integritätsring). Gilt  $X = \mathbb{C}^n$  und ist  $\mathcal{F}$  die Menge aller polynomialen komplexwertigen Funktionen auf  $\mathbb{C}^n$ , so heißt diese Topologie **Zariski-Topologie** auf  $\mathbb{C}^n$ .

## 2.4. Stetigkeit.

**Definition 2.4.1.** Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  topologischer Räume heißt **stetig**, wenn für alle offenen Teilmengen  $V$  von  $Y$  das Urbild  $f^{-1}(V)$  eine offene Teilmenge von  $X$  ist. In Worten bedeutet dies, dass alle Urbilder unter  $f$  von in  $Y$  offenen Mengen offen in  $X$  sind. Man sagt meist kurz „Urbilder offener Mengen sind offen“.

**Beispiele 2.4.2.** Jede konstante Abbildung zwischen topologischen Räumen ist stetig (dabei heißt  $f: X \rightarrow Y$  konstant, falls  $f(X)$  einelementig oder leer ist). Die Identität  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  jedes topologischen Raums  $X$  ist stetig. Jede Abbildung in einen Raum mit der Klumpentopologie ist stetig. Jede Abbildung von einem Raum mit der diskreten Topologie ist stetig.

**Beispiel 2.4.3.** Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $Z \subset X$  eine Teilmenge, so ist die Inklusion  $Z \hookrightarrow X$  stetig. Hier trägt  $Z$  die induzierte Topologie.

**2.4.4.** Eine Abbildung zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, denn es gilt  $f^{-1}(Y \setminus T) = X \setminus f^{-1}(T)$  für beliebige Teilmengen  $T \subset Y$ .

**2.4.5** (Vergleich mit „metrischer Stetigkeit“). Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen. Dann ist  $f$  genau dann „metrisch stetig“, also stetig im Sinne der Definition 2.2.1, wenn  $f$  „topologisch stetig“ ist, also stetig im Sinne der Definition 2.4.1, wobei  $X$  und  $Y$  mit der metrischen Topologie versehen sind. Dies ist klar nach Satz 2.2.2.

**2.4.6.** Sprechen wir im folgenden von einer stetigen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ , so setzt dies implizit voraus, dass  $X$  und  $Y$  topologische Räume sind.

**Satz 2.4.7.** *Die Verknüpfung stetiger Abbildungen ist stetig: Sind  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen, so ist  $g \circ f$  ebenfalls stetig.*

*Beweis.* Sei  $U \subseteq Z$ . Es folgt  $g^{-1}(U) \subseteq Y$ . Es folgt  $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U)) \subseteq X$ . Also ist  $g \circ f$  stetig.  $\square$

**2.4.8.** Dieser Beweis ist kürzer als der entsprechende Beweis für Abbildungen zwischen metrischen Räumen, wenn man dort mit der  $\varepsilon$ - $\delta$ -Stetigkeit an beliebigen Punkten  $x \in X$  arbeitet.

**Lemma 2.4.9** (Universelle Eigenschaft der induzierten Topologie). *Sei  $Y$  eine mit der induzierten Topologie versehene Teilmenge eines topologischen Raums  $X$  und sei  $i: Y \hookrightarrow X$  die Inklusion. Sei  $T$  ein beliebiger topologischer Raum und  $f: T \rightarrow Y$  eine beliebige Abbildung (von Mengen). Dann ist  $f: T \rightarrow Y$  genau dann stetig, wenn  $i \circ f: T \rightarrow X$  stetig ist.*

*Insbesondere gilt: Ist  $g: T \rightarrow X$  eine stetige Abbildung mit  $g(T) \subset Y$ , so ist die induzierte Abbildung  $T \rightarrow Y$  stetig.*

*Beweis.* Sei  $f$  stetig. Dann ist  $i \circ f$  als Verknüpfung stetiger Abbildung stetig (Satz 2.4.7), denn  $i$  ist stetig (siehe 2.4.3).

Sei  $i \circ f$  stetig. Sei  $U \subseteq Y$ . Nach Definition gibt es  $W \subseteq X$  mit  $U = W \cap Y = i^{-1}(W)$ . Es folgt  $f^{-1}(U) = f^{-1}(i^{-1}(W)) = (i \circ f)^{-1}(W) \subseteq T$ . Also ist  $f$  stetig.  $\square$

**Beispiel 2.4.10.** Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig, so ist auch  $f: X \rightarrow f(X)$  stetig.

**2.4.11.** Die in Lemma 2.4.9 beschriebene Eigenschaft der Spurtopologie charakterisiert diese Topologie eindeutig. Der Beweis wird später allgemeiner gegeben, siehe Satz 2.8.20 und Beispiel 2.8.19.

**Definition 2.4.12.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein System  $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen von  $X$  heißt **Überdeckung von  $X$** , wenn  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  gilt. Eine Überdeckung  $\mathcal{U}$  heißt **offen**, wenn alle  $U \in \mathcal{U}$  offene Teilmengen  $U \subseteq X$  sind. Analog ist eine **abgeschlossene** Überdeckung definiert. Man nennt eine Überdeckung  $\mathcal{U}$  **endlich**, wenn sie aus endlich vielen Teilmengen besteht, in Formeln  $|\mathcal{U}| < \infty$ .<sup>8</sup>

Oft wird auch eine Familie  $(U_i)_{i \in I}$  von (offenen/abgeschlossenen) Teilmengen von  $X$  (offene/abgeschlossene) Überdeckung genannt, wenn  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  gilt. Man schreibt eine solche Überdeckung manchmal salopp  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Endlichkeit einer solchen Überdeckung bezieht sich dann meist auf  $I$  statt auf  $\{U_i \mid i \in I\}$ .

**Proposition 2.4.13.** *Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung von Mengen.*

- (a) *(Stetigkeit ist „lokal in der Quelle = im Definitionsbereich“) Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn alle Abbildungen  $f|_U: U \rightarrow Y$  stetig sind, für  $U \in \mathcal{U}$ .*
- (b) *Sei  $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$  eine endliche abgeschlossene Überdeckung von  $X$ . Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn alle  $f|_{A_i}: A_i \rightarrow Y$  stetig sind.*

*Beweis.* (a) Ist  $f$  stetig, so ist jedes  $f|_U: U \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$  als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig.

Seien umgekehrt alle  $f|_U$  stetig. Sei  $V \subseteq Y$ . Dann gilt

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (f^{-1}(V) \cap U) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f|_U^{-1}(V).$$

Nach Annahme gelten  $f|_U^{-1}(V) \subseteq U \subseteq X$  für alle  $U \in \mathcal{U}$ . Nach 2.3.11 folgt  $f|_U^{-1}(V) \subseteq X$  für alle  $U \in \mathcal{U}$ . Somit ist  $f^{-1}(V)$  als Vereinigung offener Mengen offen in  $X$ . Also ist  $f$  stetig.

(b) Ist  $f$  stetig, so ist jedes  $f|_{A_i}: A_i \rightarrow X \xrightarrow{f} Y$  als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig.

Seien umgekehrt alle  $f|_{A_i}$  stetig. Sei  $B \subseteq Y$  abgeschlossen. Nach 2.4.4 ist  $f^{-1}(B) \subseteq X$  zu zeigen. Analog wie oben gilt

$$f^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^n f|_{A_i}^{-1}(B).$$

<sup>8</sup>Der aufmerksame Leser wird bemerken, dass das Adjektiv *offen* sich auf die Elemente von  $\mathcal{U}$ , das Adjektiv *endlich* sich aber auf  $\mathcal{U}$  selbst bezieht (es wird nicht gefordert, dass die Elemente von  $\mathcal{U}$  endliche Mengen sind).

Nach Annahme gelten  $f|_{A_i}^{-1}(B) \subseteq A_i \subseteq X$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Nach Aufgabe 2.3.12 folgt  $f|_{A_i}^{-1}(B) \subseteq X$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , und  $f^{-1}(B)$  ist als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen in  $X$ . Also ist  $f$  stetig.  $\square$

**Definition 2.4.14.** Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt **Homöomorphismus**, falls es eine stetige Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  mit  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$  gibt.<sup>9</sup> Zwei topologische Räume  $X$  und  $Y$  heißen **homöomorph**, notiert  $X \cong Y$ , wenn es einen Homöomorphismus zwischen ihnen gibt.

**2.4.15.** Für eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  sind äquivalent:

- $f$  ist ein Homöomorphismus;
- $f$  ist bijektiv und ihre inverse Abbildung  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  ist stetig;
- $f$  ist bijektiv und bildet offene Teilmengen auf offene Teilmengen ab, ist also offen im Sinne der späteren Definition 2.7.9.
- $f$  ist bijektiv und bildet abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen ab, ist also abgeschlossen im Sinne der späteren Definition 2.7.9.

*Warnung* 2.4.16. Es gibt viele bijektive stetige Abbildungen, die keine Homöomorphismen sind. Seien beispielsweise  $\mathcal{D}$  bzw.  $\mathcal{K}$  diskrete Topologie bzw. Klumpentopologie auf einer Menge  $X$ . Dann ist  $\text{id}_X: (X, \mathcal{D}) \rightarrow (X, \mathcal{K})$  bijektiv und stetig, aber im Fall  $|X| \geq 2$  kein Homöomorphismus.

**Aufgabe 2.4.17.** Bestimmen Sie alle Topologien auf der zweipunktigen Menge  $\{a, b\}$  und auf der dreipunktigen Menge  $\{a, b, c\}$ . Welche dieser Topologien kommen von einer Metrik? Klassifiziere alle topologischen Räume mit drei Punkten bis auf Homöomorphie.

Die Kenntnis dieser einfachen topologischen Räume ist manchmal hilfreich, um Gegenbeispiele zu konstruieren.

**Aufgabe 2.4.18** (Verallgemeinerung von Proposition 2.4.13.(b)). Sei  $\mathcal{A}$  eine abgeschlossene Überdeckung eines topologischen Raums  $X$ , die in dem Sinne lokal-endlich ist, dass jeder Punkt von  $X$  eine Umgebung hat, die nur endlich viele Elemente von  $\mathcal{A}$  trifft.<sup>10</sup> Seien  $Y$  ein topologischer Raum und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung von Mengen. Dann ist  $f$  genau dann stetig, wenn  $f|_A$  für alle  $A \in \mathcal{A}$  stetig ist.

Hinweis: Dies ist ein Korollar aus Proposition 2.4.13.

## 2.5. Inneres, Abschluss, Umgebung.

**Definition 2.5.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $M$  eine Teilmenge.

(a) Die Menge

$$M^\circ := \text{int}(M) := \text{int}_X(M) := \bigcup_{U \subseteq X \text{ mit } U \subset M} U$$

heißt das **Innere** von  $M$  (bezüglich  $X$ ) (manchmal auch der **offene Kern**), englisch *interior*. Offensichtlich ist  $M$  die größte offene Teilmenge von  $X$ , die in  $M$  enthalten ist.

<sup>9</sup>Offensichtlich ist dann auch  $g$  ein Homöomorphismus.

<sup>10</sup>Man sagt manchmal, dass sich zwei Mengen *treffen*, wenn ihr Schnitt nicht leer ist.

(b) Die Menge

$$\overline{M} := \text{cl}(M) := \text{cl}_X(M) := \bigcap_{A \subseteq X \text{ mit } M \subset A} A$$

heißt der **Abschluss** von  $M$  (bezüglich  $X$ ), englisch *closure*. Offensichtlich ist  $M$  die kleinste abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die  $M$  enthält.

(c) Der **Rand** von  $M$  (bezüglich  $X$ ) ist durch

$$\partial M := \partial_X M := \overline{M} - M^\circ$$

definiert. Er ist abgeschlossen in  $X$ .

**2.5.2.** Im Allgemeinen gibt es weder eine größte abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , die in  $M$  enthalten ist, noch eine kleinste offene Teilmenge von  $X$ , die  $M$  enthält.

**2.5.3.** Es gilt stets  $(M^\circ)^\circ = M^\circ \subset M \subset \overline{M} = \overline{\overline{M}}$ . Aus  $M \subset N$  folgen  $M^\circ \subset N^\circ$  und  $\overline{M} \subset \overline{N}$ . Für  $U \subseteq X$  gilt  $U^\circ = U$ . Für  $A \subseteq X$  gilt  $\overline{\overline{A}} = A$ . Insbesondere gelten  $\emptyset^\circ = \emptyset = \overline{\emptyset}$  und  $X^\circ = X = \overline{X}$ .

**Beispiel 2.5.4.** Sei  $X$  ein metrischer Raum. Dann gilt stets  $\overline{B_r(x)} \subset D_r(x)$  (siehe Aufgabe 2.1.8). Im Fall beliebiger metrischer Räume ist dies eine echte Inklusion, im Fall  $X = \mathbb{R}^n$  mit der metrischen Topologie aber eine Gleichheit.

**Beispiel 2.5.5.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  eine Teilmenge mit  $B_1(0) \subset M \subset D_1(0)$ . Dann gelten  $M^\circ = B_1(0)$  und  $\overline{M} = D_1(0)$  und  $\partial M = \mathbb{S}^1$ .

**Lemma 2.5.6.** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

(a) Ist  $M \subset X$  eine Teilmenge, so gelten (Abschluss des Komplements ist Komplement des Inneren, Inneres des Komplements ist Komplement des Abschlusses)

$$\overline{X \setminus M} = X \setminus M^\circ, \quad (X \setminus M)^\circ = X \setminus \overline{M}.$$

(b) Sind  $M, N$  Teilmengen von  $X$ , so gelten

$$\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}, \quad (M \cap N)^\circ = M^\circ \cap N^\circ.$$

*Beweis.* Es gilt

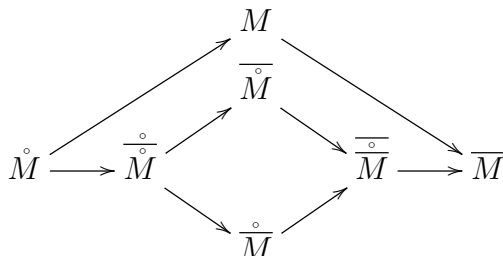
$$\overline{X \setminus M} = \bigcap_{A \subseteq X \text{ mit } X \setminus M \subset A} A = \bigcap_{U \subseteq X \text{ mit } U \subset M} X \setminus U = X \setminus \bigcup_{U \subseteq X \text{ mit } U \subset M} U = X \setminus M^\circ.$$

Dies zeigt die erste Gleichheit. Ersetzt man darin  $M$  durch  $X \setminus M$ , so ergibt sich  $\overline{M} = X \setminus (X \setminus M)^\circ$  und daraus durch Komplementbildung die zweite Gleichheit.

Da  $\overline{M} \cup \overline{N}$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  ist, die  $M \cup N$  enthält, folgt  $\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}$ . Aus  $M \subset M \cup N$  folgt sicherlich  $\overline{M} \subset \overline{M \cup N}$ , und analog erhält man  $\overline{N} \subset \overline{M \cup N}$ . Dies zeigt  $\overline{M} \cup \overline{N} \subset \overline{M \cup N}$ . Analog zeigt man die andere Gleichheit.  $\square$

**Aufgabe 2.5.7.** Es gelten die Inklusionen  $\overline{M \cap N} \subset \overline{M} \cap \overline{N}$ ,  $\bigcup \overline{M}_i \subset \overline{\bigcup M_i}$  und  $M^\circ \cup N^\circ \subset (M \cup N)^\circ$ ,  $(\bigcap M_i)^\circ \subset \bigcap M_i^\circ$ . Die umgekehrten Inklusionen gelten im Allgemeinen nicht. Finde Gegenbeispiele.

**Aufgabe 2.5.8.** Sei  $M$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ . Wendet man auf  $M$  sukzessive die Operationen „Inneres“ und „Abschluss“ an, so erhält man maximal 7 verschiedene Teilmengen, nämlich  $M, \overset{\circ}{M}, \overline{M}, \overline{\overset{\circ}{M}}, \overset{\circ}{\overline{M}}, \overline{\overset{\circ}{\overline{M}}}, \overline{\overline{\overset{\circ}{M}}}$ , denn es gelten  $\overline{\overline{\overset{\circ}{M}}} = \overline{\overset{\circ}{M}}$  und  $\overline{\overset{\circ}{\overline{M}}} = \overline{\overline{M}}$ . Das Hasse-Diagramm zwischen diesen sieben Mengen sieht wie folgt aus, wobei jeder Pfeil  $\rightarrow$  eine Inklusion  $\subset$  andeutet.



Man finde eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$ , so dass diese sieben Mengen verschieden sind und es keine weiteren Inklusionen gibt außer denjenigen, die aus dem Hasse-Diagramm folgen.

Ein ähnliches Problem ist Kuratowskis Abschluss-Komplement-Problem, siehe *Kuratowski's closure-complement problem* in der englischen Wikipedia.

**Aufgabe 2.5.9.** Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für alle Teilmengen  $M \subset X$  gilt  $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ .

**Aufgabe 2.5.10.** Sei  $Y$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ . Für eine Teilmenge  $M \subset Y$  bezeichne  $\overline{M}^Y := \text{cl}_Y(M)$  ihren Abschluss in  $Y$  und  $\overline{M}^X := \text{cl}_X(M)$  ihren Abschluss in  $X$ . Es gilt  $\overline{M}^Y = \overline{M}^X \cap Y$ .

**Definition 2.5.11.** Sei  $M$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ . Ein Punkt  $x \in X$  heißt

- **innerer Punkt** von  $M$ , falls  $x \in M^\circ$ ,
- **Berührungspunkt** von  $M$ , falls  $x \in \overline{M}$ ,
- **Randpunkt** von  $M$ , falls  $x \in \partial M$ .

**Definition 2.5.12.** Sei  $M$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ . Eine Teilmenge  $U \subset X$  heißt **Umgebung von  $M$** , falls es eine offene Menge  $V \subseteq X$  mit  $M \subset V \subset U$  gibt. Im Fall einer einpunktigen Menge  $M = \{x\}$  nennt man eine Umgebung von  $M$  **Umgebung von  $x$** .

**2.5.13.** Jede Umgebung läßt sich zu einer offenen Umgebung verkleinern.

**Lemma 2.5.14.** Seien  $X$  ein topologischer Raum,  $M \subset X$  eine Teilmenge und  $x \in X$  ein Punkt. Dann gelten:

- (a)  $x \in M^\circ \Leftrightarrow M$  ist Umgebung von  $x$ ,
- (b)  $x \in \overline{M} \Leftrightarrow$  jede Umgebung von  $x$  trifft  $M$ ,
- (c)  $x \in \partial M \Leftrightarrow$  jede Umgebung von  $x$  trifft sowohl  $M$  als auch  $X \setminus M$ .

*Beweis.* (a) Klar nach Definition von  $M^\circ$ .

(b) Nach Lemma 2.5.6 gilt

$$x \notin \overline{M} \Leftrightarrow x \in (X \setminus M)^\circ$$

$\stackrel{(a)}{\Leftrightarrow} X \setminus M$  ist Umgebung von  $x$

$\Leftrightarrow$  es gibt eine Umgebung von  $x$ , die  $M$  nicht trifft.

(c) Nach Lemma 2.5.6 gilt  $\partial M = \overline{M} \setminus M^\circ = \overline{M} \cap (X \setminus M^\circ) = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$ . Nun verwende (b).  $\square$

**Definition 2.5.15.** Ein topologischer Raum heißt **Hausdorff** (oder **separiert**), wenn je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen.

**2.5.16.** Jeder Unterraum eines Hausdorffraums ist Hausdorff. Jeder metrische Raum ist Hausdorff.

**Aufgabe 2.5.17.** Übe Kritik an dem folgenden Beweis von  $\overline{\bigcup T_i} \subset \bigcup \overline{T_i}$  (vgl. Aufgabe 2.5.7): Aus  $x \in \overline{\bigcup T_i}$  folgt, dass jede Umgebung  $U$  von  $x$  die Menge  $\bigcup T_i$  trifft. Also trifft  $U$  eines der  $T_i$ , d. h.  $x$  ist im Abschluss von  $T_i$ . Es folgt  $x \in \bigcup \overline{T_i}$ .

**Aufgabe 2.5.18.** Für eine Teilmenge  $U$  eines topologischen Raums  $X$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $U$  ist offen in  $X$ .
- (b) Für jedes  $u \in U$  ist  $U$  Umgebung von  $u$  in  $X$ .
- (c) Zu jedem  $u \in U$  gibt es eine Umgebung  $V$  von  $x$  (in  $X$ ) mit  $V \subset U$ .
- (d) Zu jedem  $u \in U$  gibt es eine Umgebung  $V$  von  $x$  (in  $X$ ) mit  $U \cap V \Subset V$ .

**Aufgabe 2.5.19.** Für eine Teilmenge  $T$  eines topologischen Raums  $X$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $T \Subset X$ .
- (b) Es gibt eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  mit  $T \cap U \Subset U$ .
- (c) Es gibt eine endliche abgeschlossene Überdeckung  $(A_i)_{i=1}^n$  von  $X$  mit  $T \cap A_i \Subset A_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .
- (d) Zu jedem  $t \in T$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $t$  (in  $X$ ) mit  $T \cap U \Subset U$ .

**Aufgabe 2.5.20.** Für eine Teilmenge  $T$  eines topologischen Raums  $X$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a)  $T \Subset X$ .
- (b) Es gibt eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  mit  $T \cap U \Subset U$ .
- (c) Es gibt eine endliche abgeschlossene Überdeckung  $(A_i)_{i=1}^n$  von  $X$  mit  $T \cap A_i \Subset A_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

Das Analogon zur Bedingung (d) in Aufgabe 2.5.19 fehlt hier, denn dieses Analogon ist echt schwächer; es taucht als Bedingung (c) in der folgenden Aufgabe 2.5.21 auf.

**Aufgabe 2.5.21.** Für eine Teilmenge  $T$  eines topologischen Raums  $X$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) Es gibt Teilmengen  $U \Subset X$  und  $A \Subset X$  mit  $T = U \cap A$ .
- (b) Es gilt  $T \Subset \overline{T}$ .
- (c) Zu jedem  $t \in T$  gibt es eine Umgebung  $U$  von  $t$  (in  $X$ ) mit  $T \cap U \Subset U$ .

- (d) (wegen 5.2.3 ergänzt:) Für alle  $x \in X$  und alle Umgebungen  $U$  von  $x$  (in  $X$ ) gibt es eine Umgebung  $V$  von  $x$  (in  $X$ ) mit  $V \subset U$ , so dass  $V \cap T \supseteq V$  gilt.

Man nennt  $T$  **lokal abgeschlossen in  $X$** , wenn diese Bedingungen erfüllt sind.

## 2.6. Zusammenhang.

**Definition 2.6.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $a \leq b$  reelle Zahlen (meist wird  $a < b$  gelten). Eine stetige Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  heißt **Weg** oder genauer **Weg in  $X$  von  $\gamma(a)$  nach  $\gamma(b)$** . Wir nennen  $X$  **wegzusammenhängend**, wenn  $X$  nicht leer ist und es für je zwei Punkte  $x, y \in X$  einen Weg von  $x$  nach  $y$  gibt.

**Definition 2.6.2.** Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er nicht leer<sup>11</sup> ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren offenen Teilmengen schreiben läßt.

**Beispiele 2.6.3.** Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  sind nicht zusammenhängend. Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  sind wegzusammenhängend. Allgemeiner ist  $\mathbb{R}^n$  wegzusammenhängend. Die  $n$ -Sphäre  $S^n$  ist genau dann wegzusammenhängend, wenn  $n \geq 1$  gilt.

**2.6.4.** Ein topologischer Raum ist zusammenhängend, wenn er nicht leer ist und sich nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen schreiben läßt. Nennen wir eine Teilmenge eines topologischen Raums zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend, so bedeutet dies, dass sie als topologischer Raum mit der induzierten Topologie zusammenhängend bzw. wegzusammenhängend ist.

**2.6.5.** Sind zwei topologische Räume homöomorph, so ist offensichtlich der eine genau dann (weg)zusammenhängend, wenn der andere diese Eigenschaft hat (dies folgt auch aus Proposition 2.6.6). Jede Eigenschaft topologischer Räume, in deren Definition nur topologische Begriffe auftauchen, ist in diesem Sinne unter Homöomorphie invariant (z. B. kompakt, Hausdorff, zusammenziehbar, ...).

**Proposition 2.6.6.** *Bilder wegzusammenhängender (bzw. zusammenhängender) Mengen unter stetigen Abbildungen sind wegzusammenhängend (bzw. zusammenhängend).*

*Beweis.* Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $T \subset X$  wegzusammenhängend bzw. zusammenhängend, so ist zu zeigen, dass  $f(T)$  dieselbe Eigenschaft hat. Indem wir  $f: X \rightarrow Y$  durch die induzierte stetige Abbildung  $T \rightarrow f(T)$  ersetzen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $T = X$  gilt und dass  $f$  surjektiv ist (Satz 2.4.7, Lemma 2.4.9).

Sei  $X$  wegzusammenhängend. Seien  $y_1, y_2 \in Y$ . Da  $f$  surjektiv ist, gibt es  $x_1, x_2 \in X$  mit  $f(x_1) = y_1$  und  $f(x_2) = y_2$ . Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  ein Weg von  $x_1$  nach  $x_2$ . Dann ist  $f \circ \gamma$  ein (stetiger) Weg von  $y_1$  nach  $y_2$ . Also ist  $Y$  wegzusammenhängend.

Sei nun  $X$  als zusammenhängend vorausgesetzt. Wegen  $X \neq \emptyset$  folgt  $Y = f(X) \neq \emptyset$ . Ist  $Y$  nicht zusammenhängend, so gilt  $Y = U \sqcup V$  für disjunkte, offene, nichtleere Teilmengen  $U, V \subseteq Y$ . Dann ist aber  $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$  eine disjunkte Zerlegung von  $X$  in offene, nichtleere Teilmengen; dies widerspricht der Annahme, dass  $X$  zusammenhängend ist.  $\square$

**Proposition 2.6.7.** *Für einen topologischen Raum  $X$  sind äquivalent:*

- (a)  $X$  ist zusammenhängend.

<sup>11</sup> In der Literatur wird die leere Menge oft als zusammenhängend angesehen.

(b) Das Bild jeder stetigen Abbildung  $X \rightarrow \{0, 1\}$ , wobei der Zielbereich die diskrete Topologie trägt, besteht aus genau einem Element.

*Beweis.* Sei  $X$  nicht zusammenhängend. Ist  $X$  leer, so gibt es genau eine stetige Abbildung  $X \rightarrow \{0, 1\}$ , und deren Bild ist die leere Menge. Sonst gilt  $X = U \sqcup V$  für zwei disjunkte, offene, nichtleere Teilmengen  $U, V \subseteq X$ . Sei  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$  die eindeutige Abbildung mit  $f(U) = \{0\}$  und  $f(V) = \{1\}$ . Sie ist offensichtlich stetig, und ihr Bild ist zweielementig.

Sei umgekehrt  $f: X \rightarrow \{0, 1\}$  eine stetige Abbildung, deren Bild nicht einelementig ist. Dann ist ihr Bild entweder die leere Menge und es folgt  $X = \emptyset$ , oder ihr Bild ist  $\{0, 1\}$ , und dann ist  $X = f^{-1}(0) \sqcup f^{-1}(1)$  eine disjunkte Zerlegung in zwei offene, nichtleere Teilmengen. Also ist  $X$  nicht zusammenhängend.  $\square$

Ende der 2. Vorlesung am 11.04.2019.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 2.2.6, Hausdorff-Metrik
- (2) Aufgabe 2.3.13, Zariski-Topologie
- (3) Aufgabe 2.5.8, sieben Mengen
- (4) Aufgabe 2.5.21, lokal abgeschlossen

Präsenzaufgaben:

- (a) Aufgabe 2.4.17, alle Topologien auf zwei- und dreipunktiger Mengen
- (b) Aufgabe 2.5.9, Stetigkeit per  $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ .
- (c) Aufgabe 2.5.20, Abgeschlossenheit per Überdeckung testen

**Satz 2.6.8** (Zusammenhängende Teilmengen von  $\mathbb{R}$ ). Für eine Teilmenge  $T \subset \mathbb{R}$  sind äquivalent:

- (a)  $T$  ist ein nichtleeres Intervall<sup>12</sup>;
- (b)  $T$  ist zusammenhängend;
- (c)  $T$  ist wegzusammenhängend.

*Beweis.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Sei  $T$  ein nichtleeres Intervall. Ist  $T$  nicht zusammenhängend, so gibt es nach Proposition 2.6.7 eine stetige surjektive Abbildung  $f: T \rightarrow \{0, 1\}$ . Dann ist aber auch die Verknüpfung  $T \xrightarrow{f} \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, was dem Zwischenwertsatz widerspricht. Also ist  $T$  zusammenhängend.

(b)  $\Rightarrow$  (a): Sei  $T$  zusammenhängend. Dann ist  $T$  nicht leer. Ist  $T$  kein Intervall, so gibt es reelle Zahlen  $s < r < t$  mit  $s, t \in T, r \notin T$ . Dann ist  $T = (T \cap \mathbb{R}_{<r}) \sqcup (T \cap \mathbb{R}_{>r})$  eine Zerlegung von  $T$  in zwei offene, disjunkte, nichtleere Teilmengen, im Widerspruch zur Annahme. Also ist  $T$  ein nichtleeres Intervall.

(a)  $\Rightarrow$  (c): Jedes nichtleere Intervall ist offensichtlich wegzusammenhängend.

(c)  $\Rightarrow$  (a):<sup>13</sup> Sei  $T$  wegzusammenhängend. Dann ist  $T$  nicht leer. Ist  $T$  kein Intervall, so gibt es reelle Zahlen  $s < r < t$  mit  $s, t \in T, r \notin T$ . Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow T$  ein Weg von  $s$  nach  $t$ . Nach dem Zwischenwertsatz, angewandt auf die Verknüpfung  $[a, b] \xrightarrow{\gamma} T \hookrightarrow \mathbb{R}$  gibt es eine

<sup>12</sup>Eine Teilmenge  $T \subset \mathbb{R}$  heißt genau dann *Invervall*, wenn für je zwei Punkte  $s, t \in T$  mit  $s < t$  jede reelle Zahl  $r$  mit  $s < r < t$  ebenfalls in  $T$  liegt. Alle Intervalle sind von der Form  $\emptyset, [a, b], (a, b), [a, b), (a, b), (-\infty, a), (-\infty, a], (a, \infty), [a, \infty), \mathbb{R}, \emptyset$ , für reelle Zahlen  $a < b$ . Dies ist klar nach Analysis I.

<sup>13</sup> Abkürzung: Nach dem bereits Bewiesenen genügt es zu zeigen, dass  $T$  zusammenhängend ist. Dies folgt aus Satz 2.6.10, dessen Beweis nur die bereits bewiesene Tatsache verwendet, dass jedes nichtleere Invervall zusammenhängend ist.



reelle Zahl  $c$  mit  $a \leq c \leq b$  (genauer gilt natürlich  $a < c < b$ ) und  $r = \gamma(c) \in T$ . Dieser Widerspruch zeigt, dass  $T$  ein Intervall ist.  $\square$

**2.6.9.** Man spricht abkürzend meist von (weg)zusammenhängenden Räumen statt von (weg)zusammenhängenden topologischen Räumen.

**Satz 2.6.10.** *Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.*

*Beweis.* Sei  $X$  wegzusammenhängend. Dann ist  $X$  nicht leer. Sei  $X = U \sqcup V$  eine Zerlegung in zwei disjunkte, offene, nichtleere Teilmengen. Seien  $u \in U$  und  $v \in V$ . Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  ein Weg von  $u$  nach  $v$ . Dann ist  $[a, b] = \gamma^{-1}(U) \sqcup \gamma^{-1}(V)$  eine Zerlegung in zwei disjunkte, offene, nichtleere Teilmengen. Eine solche kann es aber nicht geben, denn das nichtleere Intervall  $[a, b]$  ist nach Satz 2.6.8 zusammenhängend. Also ist  $X$  zusammenhängend.  $\square$

**Beispiel 2.6.11.** Die Sinuskurve des Topologen (siehe Aufgabe 2.6.18) ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

**Definition 2.6.12.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Auf  $X$  definieren wir die Relation  $W$  der „Wegverbindbarkeit“ durch die Vorschrift, dass  $xWy$  genau dann gilt, wenn es einen Weg von  $x$  nach  $y$  gibt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf  $X$  (für die Transitivität verwende man, dass das „Aneinanderhängen“ von zwei Wegen wieder ein Weg ist, nach Proposition 2.4.13). Die Äquivalenzklassen dieser Relation nennt man **Wegzusammenhangskomponenten** von  $X$ . Gegeben  $x \in X$  meint man mit der **Wegzusammenhangskomponente von  $x$**  die Äquivalenzklasse von  $x$ .

**2.6.13.** Offensichtlich ist  $X$  die disjunkte Vereinigung seiner Wegzusammenhangskomponenten, die Wegzusammenhangskomponenten sind die maximalen wegzusammenhängenden Teilmengen von  $X$ , und die Wegzusammenhangskomponente eines Punktes  $x \in X$  ist die größte wegzusammenhängende Teilmenge von  $X$ , die  $x$  enthält.

**Definition 2.6.14.** Eine maximale zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raums heißt **Zusammenhangskomponente**.

**Satz 2.6.15.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gelten:*

- (a) *Ist  $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  eine nichtleere Menge zusammenhängender Teilmengen von  $X$  mit nichtleerem Schnitt  $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$ , so ist  $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  zusammenhängend.*
- (b) *Ist  $T$  eine zusammenhängende Teilmenge von  $X$ , so liegt  $T$  in einer eindeutigen Zusammenhangskomponente von  $X$ , und diese Zusammenhangskomponente ist die größte zusammenhängende Teilmenge von  $X$ , die  $T$  umfaßt.*
- (c) *Jeder Punkt von  $X$  liegt in genau einer Zusammenhangskomponente, der **Zusammenhangskomponente von  $x$** ; es ist also  $X$  die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten.*
- (d) *Ist  $T$  eine zusammenhängende Teilmenge von  $X$ , so ist  $\bar{T}$  und genauer jede Teilmenge  $S$  mit  $T \subset S \subset \bar{T}$  zusammenhängend. Insbesondere sind alle Zusammenhangskomponenten abgeschlossen.*

*Beweis.* (a) Sei  $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ . Da  $\mathcal{A}$  nichtleer ist, ist  $x$  in  $Y := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  enthalten, es gilt also  $Y \neq \emptyset$ . Sei  $Y = U \sqcup V$  eine Zerlegung in zwei disjunkte, offene Teilmengen, wobei ohne Einschränkung  $x \in U$  gelte.

Für jedes  $A \in \mathcal{A}$  ist  $A = (U \cap A) \sqcup (V \cap A)$  eine Zerlegung in disjunkte, offene Teilmengen. Weil  $A$  zusammenhängend ist und  $x \in U \cap A$  gilt, folgt  $V \cap A = \emptyset$ . Da  $A \in \mathcal{A}$  beliebig war, folgt  $V = \emptyset$ . Also ist  $Y$  zusammenhängend.

(b) Sei  $T \subset X$  eine zusammenhängende Teilmenge. Insbesondere gilt  $T \neq \emptyset$ . Sei  $\mathcal{A}$  die (nichtleere) Menge aller zusammenhängenden Teilmengen von  $X$ , die  $T$  enthalten. Nach (a) ist  $K := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$  zusammenhängend und somit die größte zusammenhängende Teilmenge von  $X$ , die  $x$  enthält. Ist  $S$  eine beliebige zusammenhängende Teilmenge von  $X$  mit  $K \subset S$ , so folgt  $T \subset S$  und damit  $K = S$ . Somit ist  $K$  eine Zusammenhangskomponente. Dies zeigt die Existenz. Für die Eindeutigkeit sei  $L$  eine Zusammenhangskomponente von  $X$ , die  $T$  enthält. Dann ist  $L$  zusammenhängend und enthält  $T$ , so dass  $L \subset K$  folgt. Die Maximalität von  $L$  liefert  $L = K$ .

(c) Gegeben  $x \in X$  wende man (b) auf die zusammenhängende Menge  $\{x\}$  an.

(d) Sei  $T \subset X$  zusammenhängend. Wegen  $\emptyset \neq T \subset \bar{T}$  ist  $\bar{T}$  nichtleer. Gelte  $\bar{T} = B \sqcup C$  für disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen  $B, C \subseteq \bar{T}$ . Da  $T = (B \cap T) \sqcup (C \cap T)$  eine disjunkte Zerlegung in offene Teilmengen ist und da  $T$  zusammenhängend ist, muss eine dieser Teilmengen leer sein. Gelte ohne Einschränkung  $C \cap T = \emptyset$ , also  $T = B \cap T \subset B$ . Aus  $B \subseteq \bar{T}$  (als Komplement von  $C$ ) und  $\bar{T} \subseteq X$  folgt  $B \subseteq X$ . Wir erhalten  $\bar{T} \subset B$  und somit  $\bar{T} = B$  und  $C = \emptyset$  im Widerspruch zur Annahme. Also ist  $\bar{T}$  zusammenhängend.

Sei nun  $S$  mit  $T \subset S \subset \bar{T} = \text{cl}_X(T)$  gegeben. Wenden wir das gerade für  $T \subset X$  bewiesene auf  $T \subset S$  an, so erhalten wir, dass  $\text{cl}_S(T)$  zusammenhängend ist. Nach Aufgabe 2.5.10 gilt aber  $\text{cl}_S(T) = S \cap \text{cl}_X(T) = S \cap \bar{T} = S$ .  $\square$

**2.6.16.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann ist  $X$  die disjunkte Vereinigung seiner Wegzusammenhangskomponenten und nach Satz 2.6.15 auch die disjunkte Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten. Jede Wegzusammenhangskomponente ist zusammenhängend (Satz 2.6.10) und somit in genau einer Zusammenhangskomponente enthalten (nach Teil (b) von Satz 2.6.15). Also ist jede Zusammenhangskomponente die disjunkte Vereinigung der in ihr enthaltenen Wegzusammenhangskomponenten.

**Lemma 2.6.17.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum, so dass jeder Punkt von  $X$  eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  offen und abgeschlossen und stimmen mit den Zusammenhangskomponenten von  $X$  überein.*

*Insbesondere ist  $X$  genau dann wegzusammenhängend, wenn  $X$  zusammenhängend ist.*

*Beweis.* Sei  $K$  eine Wegzusammenhangskomponente von  $X$ . Sei  $x \in K$ . Sei  $U$  eine wegzusammenhängende Umgebung von  $x$  in  $X$ . Es folgt  $U \subset K$ . Da  $U$  eine offene Umgebung von  $x$  enthält, ist  $K$  offen in  $X$ .

Somit ist jede Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten offen in  $X$ , zum Beispiel die Vereinigung aller von  $K$  verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten. Als Komplement dieser Menge ist  $K$  abgeschlossen in  $X$ .

Sei nun  $L$  die eindeutige Zusammenhangskomponente von  $X$ , die  $K$  enthält (Satz 2.6.15.(b)). Dann ist  $K$  offen und abgeschlossen (*clopen = open and closed*) in  $L$ . Da  $L$  zusammenhängend ist, folgt  $K = L$  (betrachte  $L = K \sqcup (L \setminus K)$ ). Jede Wegzusammenhangskomponente ist also eine Zusammenhangskomponente.

Da jede Zusammenhangskomponente die disjunkte Vereinigung der in ihr enthaltenen Wegzusammenhangskomponenten ist (siehe 2.6.16), stimmt die Menge der Zusammenhangskomponenten mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten überein.  $\square$

**Aufgabe 2.6.18.** Die *Sinuskurve des Topologen*  $C := \{(t, \sin(1/t)) \mid t \in (0, 1/\pi]\} \cup \{(0, s) \mid s \in [-1, 1]\}$  ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend. Bestimme alle (Weg-)Zusammenhangskomponenten. Bestimme alle Punkte, die keine wegzusammenhängende Umgebung haben (vgl. Lemma 2.6.17).

**Aufgabe 2.6.19** (Zwischenwertsatz). Sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige reellwertige Funktion auf einem zusammenhängenden Raum  $X$ . Seien  $s, t \in f(X)$  mit  $s < t$ . Dann nimmt  $f$  jeden Wert zwischen  $s$  und  $t$  an.

**Aufgabe 2.6.20.** Besitzt jeder Punkt eines topologischen Raumes eine zusammenhängende Umgebung, so sind seine Zusammenhangskomponenten offen.

## 2.7. Kompaktheit.

**Definition 2.7.1.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine **Teilüberdeckung** einer Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  ist eine Teilmenge von  $\mathcal{U}$ , die eine Überdeckung von  $X$  ist.

**Definition 2.7.2.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **quasi-kompakt** (oder **überdeckungskompakt**), wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt. Diese Bedingung bedeutet in Formeln: Gegeben ein beliebiges System  $\mathcal{U}$  offener Teilmengen von  $X$  mit  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  gibt es eine endliche Teilmenge  $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$  mit  $X = \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$ .

**Definition 2.7.3.** Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn er quasi-kompakt und Hausdorff ist.

**2.7.4.** In der Literatur wird der Begriff *kompakt* oft auch im Sinne des hier eingeführten Begriffs *quasi-kompakt* benutzt.

**2.7.5.** Sei  $A$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ . Kompaktheit von  $A$  (bezüglich der induzierten Topologie) ist äquivalent zur folgenden Bedingung: Gegeben eine beliebige Menge  $\mathcal{U}$  offener Teilmengen von  $X$  mit  $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  gibt es eine endliche Teilmenge  $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$  mit  $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$ .

**Lemma 2.7.6.** *Jede quasi-kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums ist abgeschlossen.*

*Beweis.* Sei  $A$  eine quasi-kompakte Teilmenge eines Hausdorffraums  $X$ . Wir zeigen  $X \setminus A \in \mathcal{O}_X$ . Sei  $x \in X \setminus A$ . Da  $X$  Hausdorff ist, gibt es zu jedem Punkt  $a \in A$  disjunkte offene Umgebungen  $U_a \in \mathcal{O}_X$  von  $x$  und  $V_a \in \mathcal{O}_X$  von  $a$ . Es gilt  $A \subset \bigcup_{a \in A} V_a$ . Quasi-Kompaktheit von  $A$  liefert eine endliche Teilmenge  $E \subset A$  mit  $A \subset W := \bigcup_{e \in E} V_e$ . Dann ist  $\bigcap_{e \in E} U_e$  eine offene Umgebung von  $x$ , die  $W$  und erst recht  $A$  nicht trifft. Also ist  $X \setminus A$  offen.  $\square$

**Lemma 2.7.7.** *Jede abgeschlossene Teilmenge eines quasi-kompakten Raums ist quasi-kompakt.*

*Beweis.* Seien  $X$  quasi-kompakt und  $A \in \mathcal{C}_X$ . Sei  $\mathcal{U}$  ein System offener Teilmengen von  $X$  mit  $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ . Wegen  $X \setminus A \in \mathcal{O}_X$  ist  $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Da  $X$  quasi-kompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge  $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$  mit  $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$ . Es folgt  $A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U$ . Also ist  $A$  quasi-kompakt.  $\square$

**Satz 2.7.8.** *Das Bild eines quasi-kompakten Raums unter einer stetigen Abbildung ist quasi-kompakt.*

*Beweis.* Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig mit  $X$  quasi-kompakt. Sei  $\mathcal{U}$  ein System offener Teilmengen von  $Y$  mit  $f(X) \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ . Es folgt

$$X \subset f^{-1}\left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\right) = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U).$$

Quasi-Kompaktheit von  $X$  liefert eine endliche Teilmenge  $\mathcal{E} \subset \mathcal{U}$  mit  $X \subset \bigcup_{U \in \mathcal{E}} f^{-1}(U)$ , und es folgt

$$f(X) \subset \bigcup_{U \in \mathcal{E}} f(f^{-1}(U)) \subset \bigcup_{U \in \mathcal{E}} U.$$

Also ist  $f(X)$  quasi-kompakt. □

**Definition 2.7.9.** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume. Eine (nicht als stetig vorausgesetzte) Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt **abgeschlossen** bzw. **offen**, wenn das Bild  $f(T)$  jeder abgeschlossenen bzw. offenen Teilmenge  $T \subset X$  abgeschlossen bzw. offen in  $Y$  ist.

**Beispiel 2.7.10.** Ist  $Y$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ , so ist die Inklusion  $Y \rightarrow X$  genau dann offen (bzw. abgeschlossen), wenn  $Y$  eine offene (bzw. abgeschlossene) Teilmenge von  $X$  ist (vgl. 2.3.11, Aufgabe 2.3.12).

**Definition 2.7.11.** Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räume heißt **Einbettung**, falls  $f$  einen Homöomorphismus  $X \rightarrow f(X)$  induziert, wobei  $f(X)$  die von  $Y$  induzierte Topologie trägt.

**2.7.12.** Jede Einbettung ist insbesondere injektiv und stetig. Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine Einbettung, so bedeutet das, dass man  $f$  mit der Inklusion  $f(X) \hookrightarrow Y$  identifizieren kann.

**2.7.13.** Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  topologischer Räume ist genau dann eine Einbettung, wenn  $f$  injektiv und stetig ist und für jedes offene  $U \subset X$  die Menge  $f(U)$  offen in  $f(X)$  ist.

**Beispiele 2.7.14.**

- (a) Ist  $T$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ , so ist die Inklusion  $T \hookrightarrow X$  eine Einbettung.
- (b) Die Abbildung  $[0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ , ist keine Einbettung, denn das Bild der offenen Teilmenge  $[0, 1)$  ist nicht offen im Bild  $\mathbb{S}^1$  unserer Abbildung.
- (c) Jede injektive, stetige, offene Abbildung ist eine Einbettung.
- (d) Jede injektive, stetige, abgeschlossene Abbildung ist eine Einbettung.
- (e) Im Allgemeinen ist eine Einbettung weder offen noch abgeschlossen (siehe (a)).

**Satz 2.7.15.** *Eine stetige Abbildung von einem quasi-kompakten Raum in einen Hausdorffraum ist stets abgeschlossen. Ist eine solche Abbildung zusätzlich bijektiv (bzw. injektiv), so ist sie ein Homöomorphismus (bzw. eine abgeschlossene Einbettung).*

*Beweis.* Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von einem quasi-kompakten Raum  $X$  in einen Hausdorffraum  $Y$ . Sei  $A \subset X$ . Da  $X$  quasi-kompakt ist, ist  $A$  quasi-kompakt (Lemma 2.7.7). Da die Verknüpfung  $A \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$  stetig ist, ist  $f(A)$  quasi-kompakt (Satz 2.7.8). Da  $Y$  Hausdorff ist, gilt  $f(A) \subset Y$  (Lemma 2.7.6). Dies zeigt, dass  $f$  abgeschlossen ist.

Ist  $f$  injektiv, so ist die induzierte Abbildung  $f: X \rightarrow f(X)$  stetig, bijektiv und abgeschlossen (als stetige Abbildung von dem quasi-kompakten Raum  $X$  in den Hausdorffraum  $f(X)$ ) und somit ein Homöomorphismus (siehe 2.4.15). Also ist  $f$  eine Einbettung. □

**Beispiel 2.7.16.** Die Abbildung  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x, 0) = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0)$ , ist nach Satz 2.7.15 eine abgeschlossene Einbettung.

Ende der 3. Vorlesung am 16.04.2019.

**Satz 2.7.17** (Extrema auf Quasi-Kompakta). *Eine stetige reellwertige Funktion auf einem nichtleeren quasi-kompakten Raum ist beschränkt und nimmt ihr Maximum und ihr Minimum an.*

*Beweis.* Sei  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit quasi-kompaktem  $X$ . Dann ist  $f(X)$  quasi-kompakt nach Satz 2.7.8, also beschränkt (denn  $f(X) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ ) und abgeschlossen im Hausdorffraum  $\mathbb{R}$  (Lemma 2.7.6). Gilt  $X \neq \emptyset$ , so ist  $f(X)$  nichtleer, beschränkt und abgeschlossen in  $\mathbb{R}$ . Die ersten beiden Eigenschaften zeigen  $\sup f(X), \inf f(X) \in \mathbb{R}$  (da die reellen Zahlen ordnungsvollständig sind), und die dritte Eigenschaft zeigt dann  $\sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$ .  $\square$

**Satz 2.7.18** (Überdeckungssatz von Lebesgue). *Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung eines quasi-kompakten metrischen Raums  $X$ . Dann gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für alle  $x \in X$  ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $B_\varepsilon(x) \subset U$  existiert; in Worten ist also jeder  $\varepsilon$ -Ball bereits in einer Menge der Überdeckung enthalten.*

*Beweis.* Definiere

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \\ x \mapsto \sup\{r \in (0, 1] \mid \text{es gibt ein } U \in \mathcal{U} \text{ mit } B_r(x) \subset U\}.$$

Da  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung ist, gilt  $f(x) > 0$  für alle  $x \in X$ . Wir zeigen nun die Abschätzung

$$(2.7.1) \quad |f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$$

für alle  $x, y \in X$ , woraus offensichtlich die Stetigkeit von  $f$  folgt.

Seien  $x, y \in X$  fixiert. Sei  $r \in (0, 1]$  eine reelle Zahl, für die ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $B_r(x) \subset U$  existiert. Wir behaupten

$$r \leq f(y) + d(x, y).$$

Im Fall  $y \notin B_r(x)$  gilt stärker  $r \leq d(x, y)$ , und im Fall  $y \in B_r(x)$  gilt für  $s := r - d(x, y)$  die Inklusion  $B_s(y) \subset B_r(x) \subset U$  und somit  $r = s + d(x, y) \leq f(y) + d(x, y)$ . Aus dieser Ungleichung folgt durch Supremumbildung  $f(x) \leq f(y) + d(x, y)$  und somit  $f(x) - f(y) \leq d(x, y)$ . Durch Vertauschen der Rollen von  $x$  und  $y$  erhält man (2.7.1).

Ohne Einschränkung gelte  $X \neq \emptyset$ . Nach Satz 2.7.17 nimmt  $f$  sein Minimum an. Dieses Minimum ist positiv, und jede echt kleinere positive Zahl ist ein mögliches  $\varepsilon$ .  $\square$

**Aufgabe 2.7.19.** Sind  $A, B$  disjunkte (quasi-)kompakte Teilmengen eines Hausdorffraums  $X$ , so gibt es disjunkte offene Teilmengen  $U, V \subseteq X$  mit  $A \subset U, B \subset V$ .

Hinweis: Beginne mit dem Fall  $A = \{a\}$ .

**Aufgabe 2.7.20.** In einem kompakten Raum läßt sich jede Umgebung jedes Punktes zu einer abgeschlossenen Umgebung desselben Punktes verkleinern.

Hinweis: Aufgabe 2.7.19

**Aufgabe 2.7.21.** Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume und seien  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  Abbildungen von Mengen. Dann gelten:

- (a) Sind  $f$  und  $g$  offen (bzw. abgeschlossen), so ist  $g \circ f$  offen (bzw. abgeschlossen).
- (b) Ist  $g \circ f$  offen (bzw. abgeschlossen) und ist  $f$  surjektiv und stetig, so ist  $g$  offen (bzw. abgeschlossen).
- (c) Ist  $g \circ f$  offen (bzw. abgeschlossen) und ist  $g$  injektiv und stetig, so ist  $f$  offen (bzw. abgeschlossen).

**Aufgabe 2.7.22.** Die Abbildung  $(0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $t \mapsto \exp(it)$ , ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild, also eine Einbettung. (Aufgabe 2.8.49 liefert eine allgemeinere Aussage.)

## 2.8. Konstruktion topologischer Räume.

**Definition 2.8.1.** Seien  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  Topologien auf einer Menge  $X$ . Man nennt  $\mathcal{T}$  **feiner** (oder **größergleich**) als  $\mathcal{T}'$  und  $\mathcal{T}'$  **gröber** (oder **kleinergleich**) als  $\mathcal{T}$ , falls  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$  gilt, falls also jede  $\mathcal{T}'$ -offene Menge  $\mathcal{T}$ -offen ist.

**2.8.2.** Merkgel: Je feiner, desto mehr offene Mengen.

**Beispiel 2.8.3.** Die diskrete Topologie ist die feinste Topologie, die Klumpentopologie die größte Topologie auf einer gegebenen Menge.

**2.8.4.** Der Durchschnitt von Topologien auf einer Menge  $X$  ist wieder eine Topologie: Sei  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  eine Familie von Topologien auf  $X$ , so ist auch  $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i \subset \mathcal{P}(X)$  eine Topologie auf  $X$ .<sup>14</sup>

**Definition 2.8.5.** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  ein System von Teilmengen von  $X$ . Die **von  $\mathcal{E}$  erzeugte Topologie**  $\langle \mathcal{E} \rangle$  ist definiert als der Schnitt über alle Topologien auf  $X$ , die  $\mathcal{E}$  umfassen, in Formeln

$$\langle \mathcal{E} \rangle := \bigcap_{\mathcal{T} \text{ Topologie auf } X \text{ mit } \mathcal{E} \subset \mathcal{T}} \mathcal{T}.$$

Also ist  $\langle \mathcal{E} \rangle$  die größte (oder kleinste) Topologie, die  $\mathcal{E}$  umfaßt.

**2.8.6.** Man kann  $\langle \mathcal{E} \rangle$  explizit beschreiben. Die Mengen in  $\langle \mathcal{E} \rangle$  sind genau die Vereinigungen von endlichen Schnitten von Elementen von  $\mathcal{E}$ . (Die leere Vereinigung ( $:=$  Vereinigung über gar keine Menge) liefert die leere Menge. Der leere Schnitt ( $:=$  Schnitt über gar keine Menge) liefert  $X$ .) Der Grund ist, dass die Mengen dieser Form eine Topologie bilden, und dass jede Topologie, die  $\mathcal{E}$  umfaßt, notwendig die Mengen dieser Form enthält.

**Definition 2.8.7.** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Ein System  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen von  $X$  heißt

- **Subbasis** der Topologie  $\mathcal{T}$ , wenn es die Topologie  $\mathcal{T}$  erzeugt, in Formeln  $\mathcal{T} = \langle \mathcal{E} \rangle$ . In Worten bedeutet dies nach 2.8.6, dass die offenen Mengen genau die Vereinigungen endlicher Schnitte von Elementen von  $\mathcal{E}$  sind.
- **Basis** der Topologie  $\mathcal{T}$ , wenn die offenen Mengen genau die Vereinigungen von Elementen von  $\mathcal{E}$  sind.

**2.8.8.** Ist  $\mathcal{E}$  Subbasis oder Basis von  $\mathcal{T}$ , so folgt  $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$ , alle Mengen aus  $\mathcal{E}$  sind also offen.

**2.8.9.** Jede Basis ist eine Subbasis, denn jeder endliche Schnitt von Elementen einer Basis ist offen und somit Vereinigung von Elementen der Basis.

<sup>14</sup>Alternative Formulierung: Ist  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$  (also  $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)))$ ) eine Menge von Topologien auf  $X$ , als da heißt jedes Element  $\mathcal{T} \in \mathcal{T}$  ist eine Topologie auf  $X$ , so ist  $\bigcap_{\mathcal{T} \in \mathcal{T}} \mathcal{T}$  ebenfalls eine Topologie auf  $X$ .

**2.8.10.** Sei  $\mathcal{E}$  eine Subbasis von  $\mathcal{T}$ . Dann ist  $\mathcal{E}$  genau dann eine Basis von  $\mathcal{T}$ , wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:

- (a) Es ist  $X$  Vereinigung von Elementen von  $\mathcal{E}$ .
- (b) Für je zwei Elemente  $E, E' \in \mathcal{E}$  ist der Schnitt  $E \cap E'$  eine Vereinigung von Elementen von  $\mathcal{E}$ .

**2.8.11** (Stetigkeit auf Elementen einer Subbasis testen). Sei  $\mathcal{E}$  eine Subbasis einer Topologie auf  $X$ . Ist  $T$  ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung  $f: T \rightarrow X$  von Mengen genau dann stetig, wenn  $f^{-1}(E) \subseteq T$  für alle  $E \in \mathcal{E}$  gilt. Dies gilt, da das Urbild-Nehmen  $f^{-1}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(T)$  mit beliebigen Vereinigungen und Schnitten vertauscht.

**Trivialbeispiele 2.8.12.** Jedes System  $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$  von Teilmengen ist Subbasis von  $\langle \mathcal{E} \rangle$ . Jede Topologie ist Basis und Subbasis ihrer selbst.

**Beispiel 2.8.13.** Ist  $X$  ein metrischer Raum, so bilden die offenen Bälle  $B_r(x)$ , für  $x \in X$  und reelles  $r > 0$ , eine Basis der metrischen Topologie. Es genügt auch, nur rationale Zahlen  $r > 0$  zu verwenden (oder Elemente  $r$  einer beliebigen Teilmenge von  $\mathbb{R}_{>0}$  mit 0 als Häufungspunkt). Eine Topologie hat also im Allgemeinen viele verschiedene Basen unterschiedlicher Kardinalität.<sup>15</sup>

**Beispiel 2.8.14.** Die Intervalle  $(a, b)$ , für  $a, b \in \mathbb{R}$ , bilden eine Basis der Standardtopologie auf  $\mathbb{R}$ . Die Intervalle  $[a, b)$ , für  $a, b \in \mathbb{R}$ , bilden keine Basis der Standardtopologie auf  $\mathbb{R}$ .

**Beispiel 2.8.15.** Betrachte  $\mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik. Alle offenen Bälle  $B_r(x)$ , mit „rationalen“ Mittelpunkten  $x \in \mathbb{Q}^n$  und rationalen Radien  $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ , bilden eine abzählbare Basis der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 2.8.16.** Seien  $Y$  eine Menge,  $X_i$  topologische Räume und  $f_i: Y \rightarrow X_i$  Abbildungen, indiziert durch  $i \in I$ . Die **Initialtopologie** (oder **Kofinaltopologie**) auf  $Y$  **bezüglich der**  $(f_i)_{i \in I}$  ist die größte (= kleinste) Topologie auf  $Y$ , für die alle  $f_i$  stetig sind.<sup>16</sup> Eine solche größte Topologie existiert in der Tat: Man schneide alle Topologien auf  $Y$ , für die alle  $f_i$  stetig sind.

**2.8.17.** Man sieht leicht, dass die Initialtopologie vom System aller Mengen  $f_i^{-1}(V)$ , für  $i \in I$  und  $V \subseteq X_i$ , erzeugt ist. Mit anderen Worten ist dieses System eine Subbasis der Initialtopologie.

**2.8.18.** Der Fall  $|I| = 1$ : Ist  $f: Y \rightarrow X$  eine Abbildung von einer Menge  $Y$  in einen topologischen Raum  $X$ , so besteht die Initialtopologie auf  $Y$  genau aus den Mengen der Form  $f^{-1}(V)$ , für  $V \subseteq X$ , denn das System dieser Mengen ist unter endlichen (und auch beliebigen) Schnitten und beliebigen Vereinigungen abgeschlossen.

**Beispiel 2.8.19.** Sei  $Y$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ . Dann ist die Initialtopologie auf  $Y$  bezüglich der Inklusionsabbildung  $Y \hookrightarrow X$  genau die Spurtopologie auf  $Y$ . Der folgende Satz 2.8.20 verallgemeinert Lemma 2.4.9.

<sup>15</sup> Haben zwei Topologien auf einer Menge ein System  $\mathcal{B}$  von Teilmengen als Basis (bzw. Subbasis), so stimmen die beiden Topologien offensichtlich überein.

<sup>16</sup>Die feinste solche Topologie - nämlich die diskrete Topologie - hängt überhaupt nicht von den  $f_i$  ab und ist hier uninteressant.

**Satz 2.8.20** (Universelle Eigenschaft und Charakterisierung der Initialtopologie). *Seien  $Y$  eine Menge,  $X_i$  topologische Räume und  $f_i: Y \rightarrow X_i$  Abbildungen, indiziert durch  $i \in I$ . Versieht man  $Y$  mit der Initialtopologie bezüglich der  $(f_i)_{i \in I}$ , so gilt:*

(Init) *Sind  $T$  ein beliebiger topologischer Raum (Testraum) und  $t: T \rightarrow Y$  eine beliebige Abbildung (von Mengen) (Testabbildung), so gilt*

$$t \text{ ist stetig} \iff \text{alle } f_i \circ t \text{ sind stetig, für } i \in I.$$

Zur Illustration ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} T & & \\ \downarrow t & \searrow f_i \circ t & \\ Y & \xrightarrow{f_i} & X_i \end{array}$$

Genauer ist die Initialtopologie durch diese Eigenschaft eindeutig charakterisiert.

*Beweis.* Eindeutigkeit: Seien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  zwei Topologien auf  $Y$ , so dass (Init) sowohl für  $(Y, \mathcal{T}_1)$  als auch für  $(Y, \mathcal{T}_2)$  gilt.

Zuerst verwenden wir (Init) für  $(Y, \mathcal{T}_1)$  mit  $T = (Y, \mathcal{T}_1)$  und  $t = \text{id}_Y$ . Da  $t = \text{id}_Y$  stetig ist, sind alle  $f_i = f_i \circ \text{id}_Y: (Y, \mathcal{T}_1) \rightarrow X_i$  stetig. Nun verwenden wir (Init) für  $(Y, \mathcal{T}_2)$  mit  $T = (Y, \mathcal{T}_1)$  und  $t = \text{id}_Y$ . Da alle  $f_i \circ \text{id}_Y: (Y, \mathcal{T}_1) \rightarrow X_i$  stetig sind, ist  $\text{id}_Y: (Y, \mathcal{T}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$  stetig. Dies bedeutet  $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ . Analog erhalten wir  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$  und damit Gleichheit  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $Y$  mit der Initialtopologie (Init) erfüllt. Nach Definition der Initialtopologie ist klar, dass alle  $f_i$  stetig sind. Ist  $t$  stetig, so sind somit alle Verknüpfungen  $f_i \circ t$  stetig.

Seien umgekehrt alle  $f_i \circ t$  stetig. Wir erinnern daran, dass die Mengen der Form  $f_i^{-1}(V)$ , für  $i \in I$  und  $V \subseteq X_i$ , eine Subbasis der Initialtopologie bilden. Für solche  $i$  und  $V$  gilt  $t^{-1}(f_i^{-1}(V)) = (f_i \circ t)^{-1}(V) \subseteq T$ , da  $f_i \circ t$  stetig ist. Dies bedeutet, dass  $t$  stetig ist, da man Stetigkeit auf einer Subbasis testen kann (siehe 2.8.11).  $\square$

**Definition 2.8.21.** Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Die Initialtopologie auf dem Produkt  $\prod_{i \in I} X_i$  bezüglich der Projektionen  $\text{pr}_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ , für  $j \in I$ , wird **Produkttopologie** genannt.

**2.8.22.** Die Produkttopologie hat als Subbasis die Mengen  $\text{pr}_j^{-1}(V) = V \times \prod_{i \in I \setminus \{j\}} X_i$ , für  $j \in I$  und  $V \subseteq X_j$ . Eine Basis der Produkttopologie ist durch alle endlichen Schnitte solcher Mengen gegeben, also durch „offene Quader“

$$(2.8.1) \quad \text{pr}_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap \text{pr}_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) = U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_n} \times \prod_{i \neq i_1, \dots, i_n} X_i$$

für  $n \in \mathbb{N}$ , paarweise verschiedene  $i_1, \dots, i_n \in I$ , und  $U_{i_k} \subseteq X_{i_k}$ . Daraus folgt sofort, dass alle Projektionen  $\text{pr}_j$  offen sind.

**Warnung 2.8.23.** Falls  $I$  unendlich ist und nichtleere offene Teilmengen  $U_i \subseteq X_i$  mit  $U_i \subsetneq X_i$  für jedes  $i \in I$  existieren, so ist  $\prod_{i \in I} U_i$  nicht offen (denn eine solche Menge enthält keine Menge aus der oben angegebenen Basis, also keine Menge der Form (2.8.1), denn jede solche Menge „besteht in unendlich vielen Koordinaten  $i$  aus der gesamten Menge  $X_i$ “).



**Beispiel 2.8.24.** Aus der Analysis ist vermutlich bekannt: Eine Abbildung  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^n$  von einem beliebigen topologischen Raum  $T$  ist genau dann stetig, wenn alle Koordinatenfunktionen  $\text{pr}_i \circ f: T \rightarrow \mathbb{R}$ , für  $i = 1, \dots, n$ , stetig sind. Dies bedeutet nach Satz 2.8.20, dass  $\mathbb{R}^n$  die Produkttopologie trägt (vgl. Aufgabe 2.8.25).

**Aufgabe 2.8.25.** [vgl. Beispiel 2.3.4, Aufgaben 2.3.3, 2.1.5] Auf einem endlichen Produkt metrischer Räume liefert jede der Metriken aus Aufgabe 2.1.5, verallgemeinert auf endliche viele Faktoren, die Produkttopologie. Insbesondere stimmt die Produkttopologie auf  $\mathbb{R}^n$  mit der Standardtopologie überein. Eine Abbildung in den  $\mathbb{R}^n$  ist also genau dann stetig, wenn all ihre Koordinatenabbildungen stetig sind.

**Aufgabe 2.8.26.** Die Projektionen  $\text{pr}_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$  sind im Allgemeinen nicht abgeschlossen. Betrachte beispielsweise  $\text{pr}_1: \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

**Aufgabe 2.8.27.** Das Cantorsche Diskontinuum ist homöomorph zum Produkt  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0, 2\}$  (siehe [vQ79, Seite 40 in neuer Auflage]).

**2.8.28.** Der **Graph** einer Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  von Mengen ist  $\Gamma(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ .

**Aufgabe 2.8.29.** Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn die Abbildung  $X \rightarrow \Gamma(f)$ ,  $x \mapsto (x, f(x))$ , ein Homöomorphismus ist.

**Aufgabe 2.8.30.** Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann Hausdorff, wenn die Diagonale

$$\Delta(X) := \{(x, x) \mid x \in X\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von  $X \times X$  ist.

**Aufgabe 2.8.31.** Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung in einen Hausdorffraum  $Y$ , so ist ihr Graph  $\Gamma(f)$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X \times Y$ .

**Aufgabe 2.8.32.** Seien  $Y$  eine Menge,  $X_i$  topologische Räume und  $f_i: Y \rightarrow X_i$  Abbildungen, indiziert durch  $i \in I$ . Betrachte die Abbildung  $g: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ ,  $y \mapsto (f_i(y))$  von Mengen und versieh  $\prod_{i \in I} X_i$  mit der Produkttopologie. Dann stimmt die Initialtopologie auf  $Y$  bezüglich der Familie  $(f_i)_{i \in I}$  mit der Initialtopologie auf  $Y$  bezüglich  $g$  überein.

**Definition 2.8.33.** Seien  $Y$  eine Menge,  $X_i$  topologische Räume und  $f_i: X_i \rightarrow Y$  Abbildungen, indiziert durch  $i \in I$ . Die **Finaltopologie** auf  $Y$  **bezüglich der**  $(f_i)_{i \in I}$  ist die feinste (= größte) Topologie auf  $Y$ , für die alle  $f_i$  stetig sind.<sup>17</sup> Eine solche feinste Topologie existiert in der Tat und ist durch

$$V \textcircled{=} Y \quad :\iff \quad f_i^{-1}(V) \textcircled{=} X_i \text{ für alle } i \in I$$

definiert: Man überlegt sich leicht, dass dies erstens eine Topologie ist, dass diese zweitens alle  $f_i$  stetig macht, und dass sie drittens feiner ist als jede Topologie, für die alle  $f_i$  stetig sind.

**2.8.34.** Die abgeschlossenen Mengen der Finaltopologie sind genau die Teilmengen  $A \subset Y$ , für die alle  $f_i^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $X_i$  sind.

<sup>17</sup>Die größte solche Topologie - nämlich die Klumpentopologie - hängt überhaupt nicht von den  $f_i$  ab und ist hier uninteressant.

**Satz 2.8.35** (Universelle Eigenschaft und Charakterisierung der Finaltopologie). *Seien  $Y$  eine Menge,  $X_i$  topologische Räume und  $f_i: X_i \rightarrow Y$  Abbildungen, indiziert durch  $i \in I$ . Versieht man  $Y$  mit der Finaltopologie bezüglich der  $(f_i)_{i \in I}$ , so gilt:*

(Fin) *Ist  $T$  ein beliebiger topologischer Raum (Testraum) und  $t: Y \rightarrow T$  eine beliebige Abbildung (von Mengen) (Testabbildung), so gilt*

$$t \text{ ist stetig} \iff \text{alle } t \circ f_i \text{ sind stetig.}$$

Zur Illustration ein Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_i} & Y \\ & \searrow t \circ f_i & \downarrow t \\ & & T \end{array}$$

Genauer ist die Finaltopologie durch diese Eigenschaft eindeutig charakterisiert.

*Beweis.* Sei  $Y$  mit der Finaltopologie versehen. Seien  $T$  und  $t: Y \rightarrow T$  gegeben. Ist  $t$  stetig, so sind sicherlich alle Kompositionen  $t \circ f_i$  stetig. Seien umgekehrt alle  $t \circ f_i$  stetig. Sei  $W \subseteq T$ . Dann gilt  $f_i^{-1}(t^{-1}(W)) = (t \circ f_i)^{-1}(W) \subseteq X_i$  für alle  $i \in I$ . Nach der expliziten Beschreibung der Finaltopologie bedeutet dies  $t^{-1}(W) \subseteq Y$ .

Der Beweis der Eindeutigkeit ist analog zum Beweis der Eindeutigkeit in Satz 2.8.20 und dem Leser überlassen.  $\square$

**Beispiel 2.8.36.** Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung eines topologischen Raums  $X$ . Proposition 2.4.13.(a) besagt, dass die Topologie auf  $X$  mit der Finaltopologie bezüglich der Abbildungen  $U \rightarrow X$ , für  $U \in \mathcal{U}$ , übereinstimmt.

Ende der 4. Vorlesung am 18.04.2019.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 2.6.18, Sinuskurve des Topologen
- (2) Aufgabe 2.7.19, Trennung von disjunkten, quasi-kompakten Teilmengen eines Hausdorffraums; Bonus: Aufgabe 2.7.20, Existenz abgeschlossener Umgebungen
- (3) Aufgabe 2.8.30, Hausdorff per Diagonale,
- (4) Aufgabe 2.8.32, Initialtopologie per Abbildung ins Produkt

**Definition 2.8.37.** Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume. Wir versehen die disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup X_i = \bigsqcup_{i \in I} X_i$  mit der Finaltopologie bezüglich der Inklusionen  $X_j \hookrightarrow \bigsqcup X_i$ , für  $j \in I$ . Eine Teilmenge von  $\bigsqcup X_i$  ist also genau dann offen, wenn ihr Schnitt mit jedem  $X_j$  offen ist. Man nennt  $\bigsqcup X_i$  mit dieser Topologie die **disjunkte Vereinigung** oder die **topologische Summe** oder das **Koprodukt** der  $X_i$ .<sup>18</sup>

**Aufgabe 2.8.38.** Formuliere und beweise das Analogon zu Aufgabe 2.8.32 für die Finaltopologie (das Produkt ist durch die topologische Summe zu ersetzen).

**Definition 2.8.39.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine surjektive Abbildung von Mengen, so wird die Finaltopologie auf  $Y$  bezüglich  $f$  oft als **Quotiententopologie** bezeichnet. Eine Teilmenge  $T \subset Y$  ist also genau dann offen bzw. abgeschlossen in  $Y$  bezüglich der Quotiententopologie, wenn ihr Urbild  $f^{-1}(T)$  offen bzw. abgeschlossen in  $X$  ist.

<sup>18</sup> Der Begriff *topologische Summe* rührt daher, dass  $\bigsqcup X_i$  ein Koprodukt in der Kategorie der topologischen Räume ist.

**Beispiel 2.8.40.** Ist  $R$  eine Äquivalenzrelation auf einem topologischen Raum  $X$ , so versteht man die Menge  $X/R$  der Äquivalenzklassen normalerweise mit der Quotiententopologie bezüglich  $X \rightarrow X/R$ .

**Beispiel 2.8.41.** Betrachte auf dem Intervall  $[0, 1]$  die kleinste Äquivalenzrelation  $\sim$ , für die  $0 \sim 1$  gilt. Dann induziert die Abbildung  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto \exp(2\pi it)$ , eine Bijektion  $[0, 1]/\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$  von Mengen, die nach Satz 2.7.15 ein Homöomorphismus ist.

**Beispiel 2.8.42.** Betrachte die auf  $X = D^2 \subset \mathbb{R}^2$  durch die Vorschrift  $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$  oder  $\|x\| = \|y\| = 1$  definierte Äquivalenzrelation. Dann ist  $X/\sim$  homöomorph zu  $\mathbb{S}^2$ . Dies ist hoffentlich anschaulich klar - der formale Beweis ist dem Leser überlassen (verwende Satz 2.7.15 und die Abbildung  $\Phi$  aus Beispiel 2.8.65).

**Beispiel 2.8.43** (Möbiusband, Torus, Kleinsche Flasche). Betrachte auf dem Quadrat  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  die kleinsten Äquivalenzrelationen  $\sim$  und  $\approx$  und  $\cong$ , für die gelten

- $(0, t) \sim (1, 1 - t)$ , für alle  $t \in [0, 1]$ ;
- („Randweg  $aba^{-1}b^{-1}$ “)<sup>19</sup>  $(0, t) \approx (1, t)$  und  $(t, 0) \approx (t, 1)$ , für alle  $t \in [0, 1]$ ;
- („Randweg  $aba^{-1}b$ “)<sup>19</sup>  $(0, t) \cong (1, 1 - t)$  und  $(t, 0) \cong (t, 1)$ , für alle  $t \in [0, 1]$ .

Das **Möbiusband** kann durch  $X/\sim$  definiert werden. Wir haben den „linken Rand“ von  $X$  verdreht mit seinem „rechten Rand“ verklebt.

Der Quotientenraum  $X/\approx$  ist homöomorph zum 2-Torus  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  (und auch zu jeder Einbettung dieses 2-Torus in den  $\mathbb{R}^3$ ). Der formale Beweis ist dem Leser überlassen (verwende Satz 2.7.15).

Die **Kleinsche Flasche** kann durch  $X/\cong$  definiert werden. Erkläre, dass man diese auch durch die Identifikation „ $a^2c$ “ erhalten kann ( $c$  ist der Diagonalweg von der rechten oberen Ecke in die linke untere Ecke).

**Beispiel 2.8.44.** (Bilder malen für  $g = 1, 2, 3$ , siehe [Hat02, Chapter. 0, cell complexes]) Sei  $g \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ . Sei  $P_g$  das reguläre  $4g$ -gon in  $\mathbb{R}^2$  (mit Schwerpunkt im Ursprung und einer Kante parallel zur  $x$ -Achse). Identifiziere seine Randkanten in hoffentlich offensichtlicher Weise entlang des Wortes  $(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}) \cdots (a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1})$  (etwa  $a_1$  die untere horizontale Kante in Richtung der  $x$ -Achse). Sei  $F_g := P_g/\sim$  der so erhaltene Quotientenraum.

Es ist  $F_g$  eine Fläche „vom Geschlecht  $g$ “ (anschaulich: „mit  $g$  Löchern“). Mit der Konvention  $F_0 := \mathbb{S}^2$  ist jede kompakte, zusammenhängende, „orientierbare“, Fläche (= 2-dimensionale Mannigfaltigkeit (ohne Rand)) genau zu einer der Flächen  $F_0, F_1, F_2, \dots$ , homöomorph; dies ist eine Teilaussage des Klassifikationsatzes für kompakte zusammenhängende 2-Mannigfaltigkeiten (Satz 3.10.22).

**Beispiel 2.8.45** (reelle Gerade mit verdoppeltem Ursprung). Wir notieren Elemente von  $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$  als  $(x, i)$ , wobei  $x \in \mathbb{R}$  reell ist und  $i \in \{1, 2\}$  angibt, ob wir uns im ersten  $\mathbb{R}$  oder im zweiten  $\mathbb{R}$  befinden. Die Vorschrift

$$(x, i) \sim (y, j) \quad :\Leftrightarrow \quad x = y \neq 0 \text{ oder } (x = y = 0 \text{ und } i = j)$$

definiert eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ . Man nennt  $(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R})/\sim$  die **reelle Gerade mit verdoppeltem Ursprung**. Sie ist kein Hausdorffraum.

<sup>19</sup>Später verknüpfen wir Wege in der anderen Richtung, so dass ich hier vielleicht besser  $b^{-1}a^{-1}ba$  schreiben sollte.

**Definition 2.8.46.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Der ( $n$ -dimensionale) **projektive Raum**  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  (über  $\mathbb{K}$ ) ist die Menge aller Geraden in  $\mathbb{K}^{n+1}$ , also

$$\mathbb{P}^n \mathbb{K} := \{\ell \mid \ell \text{ ist eindimensionaler } \mathbb{K}\text{-Untervektorraum von } \mathbb{K}^{n+1}\},$$

versehen mit der Quotiententopologie bezüglich der Surjektion

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) &\twoheadrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}, \\ v &\mapsto [v] := \mathbb{K}v, \end{aligned}$$

wobei  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  die Standardtopologie trägt.

Ist allgemeiner  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, so besteht der **projektive Raum**  $\mathbb{P}(V)$  aus allen Geraden in  $V$  und wird per  $V \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{P}(V)$  topologisiert.

**Aufgabe 2.8.47.** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Sei  $\varphi: (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}) \twoheadrightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}$  die kanonische Abbildung.

(a) Der projektive Raum  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  ist kompakt.

Hinweis: Sei  $\varphi|_{V_i}$  die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  bzw.  $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ . Dann trägt  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  die Quotiententopologie bezüglich  $\varphi|_{V_i}$ .

(b) Für  $i \in \{0, \dots, n\}$  definiere

$$V_i := \{v = (v_0, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid v_i = 1\}.$$

Dann ist  $\varphi_i := \varphi|_{V_i}: V_i \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}$  eine offene Einbettung, und die  $U_i := \varphi_i(V_i)$  bilden eine offene Überdeckung von  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$ . Insbesondere trägt  $\mathbb{P}^n \mathbb{K}$  die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi_i: \mathbb{K}^n &\rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{K}, \\ y &= (y_0, \dots, y_{i-1}, \widehat{y}_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \mapsto [y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n], \end{aligned}$$

wobei das Hütchen das Fehlen andeutet, dass der behütete Eintrag nicht vorkommt.

**Aufgabe 2.8.48.** Identifiziere in  $D^n$  jeden Punkt  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  mit seinem Antipodenpunkt  $-x$ , betrachte also  $D^n / \sim$  für die kleinste Äquivalenzrelation  $\sim$ , für die jedes  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  zu  $-x$  äquivalent ist. Dann ist  $D^n / \sim$  homöomorph zu  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ .

Hinweis: Verwende Teil (a) (samt des Hinweises) in Aufgabe 2.8.47, und Satz 2.7.15.

**Aufgabe 2.8.49.** Sei  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg in einem Hausdorffraum mit  $\gamma(0) = \gamma(1)$  und  $\gamma|_{(0,1)}: (0, 1) \rightarrow X$  injektiv. Dann ist  $\gamma|_{(0,1)}$  ein Homöomorphismus auf sein Bild, also eine Einbettung, und  $\gamma([0, 1])$  ist homöomorph zu  $\mathbb{S}^1$ .

Hinweis: Satz 2.7.15.

Bemerkung: Daraus folgt leicht Aufgabe 2.7.22.

**Definition 2.8.50** (Verkleben zweier topologischer Räume). Seien  $X \xleftarrow{f} K \xrightarrow{g} Y$  zwei stetige Abbildungen („zu verklebende topologische Räume  $X$  und  $Y$ , Kleber  $K$  samt Verklebeabbildungen  $f, g$ “). Betrachte auf  $X \sqcup Y$  die Äquivalenzrelation  $\sim$ , die von der Relation  $f(k) \sim g(k)$  für alle  $k \in K$  erzeugt wird. Definiere die **Verklebung von  $X$  und  $Y$  (entlang des Klebedatums  $(K, f, g)$ )** als den topologischen Raum

$$X \sqcup_K Y := X \sqcup_{f,K,g} Y := (X \sqcup Y) / \sim$$

mit der Quotiententopologie.<sup>20</sup> Wir erhalten das folgende kommutative **Verklebe-Diagramm**

$$(2.8.2) \quad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow F \\ X & \xrightarrow{G} & X \sqcup_K Y, \end{array}$$

wobei  $F$  und  $G$  die offensichtlichen Abbildungen sind.

**2.8.51.** Die Topologie auf  $X \sqcup_K Y$  stimmt offensichtlich mit der Finaltopologie bezüglich der beiden Abbildungen  $X \rightarrow X \sqcup_K Y$  und  $Y \rightarrow X \sqcup_K Y$  überein (Aufgabe 2.8.38).

**Beispiel 2.8.52.** Die Verklebung von  $D^2 \leftarrow \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$  kann man sich als Zeichenebene mit Kuppel über  $\mathbb{S}^1$  vorstellen. Man versuche sich vorzustellen, was man bekommt, wenn man eine kompliziertere Abbildung  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  anstelle der Inklusion nimmt, etwa indem man  $\mathbb{S}^1$  als „Figur Acht“ in die Zeichenebene abbildet.

**Lemma 2.8.53** (Verklebe-Diagramm ist kokartesisch). *Seien  $X \xleftarrow{f} K \xrightarrow{g} Y$  stetige Abbildungen. Dann ist das Verklebe-Diagramm (2.8.2) ein kokartesisches Diagramm im Sinne der nachfolgenden Definition 2.8.54.*

*Beweis.* Sei  $T$  ein beliebiger topologischer Raum und seien  $\alpha: X \rightarrow T$  und  $\beta: Y \rightarrow T$  stetige Abbildungen mit  $\alpha \circ f = \beta \circ g$  (die „Restriktionen“ von  $\alpha$  und  $\beta$  auf den „Kleber“  $K$  stimmen überein). Sei  $\gamma$  die eindeutige Abbildung, die das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & X \sqcup Y & \longleftarrow & Y \\ & \searrow \alpha & \downarrow \gamma & \swarrow \beta & \\ & & T & & \end{array}$$

kommutativ macht. Sie ist stetig, denn  $X \sqcup Y$  trägt die Finaltopologie bezüglich der horizontalen Inklusionen.

Wegen  $\alpha \circ f = \beta \circ g$  faktorisiert  $\gamma$  eindeutig als  $\gamma: X \sqcup Y \twoheadrightarrow X \sqcup_K Y \xrightarrow{\bar{\gamma}} T$ . Da  $X \sqcup_K Y$  die Quotiententopologie trägt, ist  $\bar{\gamma}$  stetig. Nach Konstruktion gelten  $\bar{\gamma} \circ G = \alpha$  und  $\bar{\gamma} \circ F = \beta$ . Es ist klar, dass  $\bar{\gamma}$  dadurch eindeutig bestimmt ist (bereits als Abbildung von Mengen).  $\square$

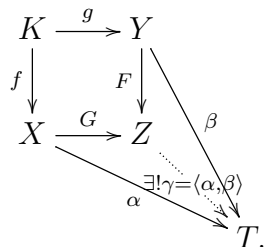
**Definition 2.8.54.** Ein Diagramm

$$(2.8.3) \quad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow F \\ X & \xrightarrow{G} & Z \end{array}$$

von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen heißt **kokartesisches Diagramm** (oder **Quadrat**) oder **Pushout-Diagramm**, falls es kommutativ ist, also  $F \circ g = G \circ f$  gilt, und falls für alle topologischen Räume  $T$  und alle Paare  $\alpha: X \rightarrow T$  und  $\beta: Y \rightarrow T$  stetiger Abbildungen mit  $\alpha \circ f = \beta \circ g$  genau eine stetige Abbildung  $\gamma: Z \rightarrow T$  mit  $\gamma \circ G = \alpha$

<sup>20</sup> Diese Definition hängt nicht von der Topologie von  $K$  ab; es genügt, mit einer Menge  $K$  samt Abbildungen  $f$  und  $g$  in topologische Räume  $X$  und  $Y$  zu starten. Man mag  $K$  dann mit irgendeiner Topologie versehen, die  $f$  und  $g$  stetig macht, etwa mit der Initialtopologie oder der diskreten Topologie.

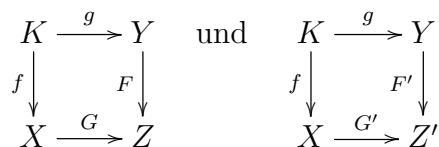
und  $\gamma \circ F = \beta$  existiert. Man notiert diese eindeutige Abbildung manchmal  $\gamma = \langle \alpha, \beta \rangle$ . Das folgende Diagramm dient der Illustration.



Man nennt dann  $Z$  (zusammen mit  $F$  und  $G$ ) einen **Pushout von  $f$  und  $g$** .

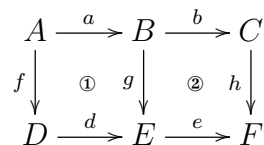
Ende der 5. Vorlesung am 23.04.2019.

**2.8.55** (Eindeutigkeit von kokartesischen Diagrammen). Sind



zwei kokartesische Diagramme topologischer Räume, so gibt es genau einen Homöomorphismus  $\gamma: Z \rightarrow Z'$  mit  $\gamma \circ F = F'$  und  $\gamma \circ G = G'$ . In der Tat, Kokartesischkeit des ersten Diagramms und Kommutativität des zweiten Diagramms zeigt, dass es genau eine stetige Abbildung  $\gamma: Z \rightarrow Z'$  mit  $\gamma \circ F = F'$  und  $\gamma \circ G = G'$  gibt. Kokartesischkeit des zweiten Diagramms und Kommutativität des ersten Diagramms liefert eindeutig eine stetige Abbildung  $\gamma': Z' \rightarrow Z$  mit  $\gamma' \circ F' = F$  und  $\gamma' \circ G' = G$ . Daraus folgen  $(\gamma' \circ \gamma) \circ F = F = \text{id}_Z \circ F$  und  $(\gamma' \circ \gamma) \circ G = G = \text{id}_Z \circ G$ , und die Eindeutigkeitsaussage in der Kokartesischkeit des ersten Diagramms liefert  $\gamma' \circ \gamma = \text{id}_Z$ . Analog erhalten wir  $\gamma \circ \gamma' = \text{id}_{Z'}$ . Also ist  $\gamma$  ein Homöomorphismus.

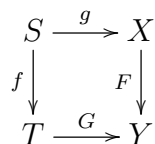
**Aufgabe 2.8.56** (Transitivität von kokartesischen Diagrammen). Sei



ein kommutatives Diagramm von stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Das Quadrat  $\textcircled{1}$  sei kokartesisch. Dann ist das Quadrat  $\textcircled{2}$  genau dann kokartesisch, wenn das äußere Rechteck kokartesisch ist.

Hinweis: Bitte nur mit der Definition eines kokartesischen Diagramms arbeiten (und nicht mit Verklebediagrammen).

**Aufgabe 2.8.57.** Sei



ein kokartesisches Diagramm von stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Ist  $f$  eine offene oder abgeschlossene Einbettung, so hat  $F$  dieselbe Eigenschaft, und  $G$  induziert einen Homöomorphismus  $T \setminus f(S) \rightarrow Y \setminus F(X)$ .

Möglicher Lösungsweg:

- Ohne Einschränkung (warum?) kann man mit einem Verklebediagramm arbeiten.
- Für  $x \in X$  und  $t \in T$  gilt genau dann  $F(x) = G(t)$ , wenn es endlich viele Elemente  $s_1, \dots, s_n \in S$  mit ... gibt. Analog kann man  $F(x) = F(x')$  für Elemente  $x, x' \in X$  bzw.  $G(t) = G(t')$  für Elemente  $t, t' \in T$  beschreiben.
- Verwende (c) und (d) aus Beispiel 2.7.14.

**Definition 2.8.58.** Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir nennen  $E^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$  **Standard- $n$ -Zelle**. Ein topologischer Raum wird als  **$n$ -Zelle** bezeichnet, wenn er homöomorph zur Standard- $n$ -Zelle  $E^n$  ist.

**2.8.59.** Die  $n$ -dimensionale abgeschlossene Vollkugel (oder  $n$ -Scheibe oder  $n$ -Disk)  $D^n$  ist die disjunkte Vereinigung ihres Inneren  $(D^n)^\circ = E^n$  und ihres Randes  $\partial D^n = \mathbb{S}^{n-1}$ . Dies stimmt auch im Fall  $n = 0$  mit der Konvention  $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ , denn dann gilt  $D^0 = (D^0)^\circ = E^0 = \{0\}$ .

**Beispiel 2.8.60** (Vorbereitendes Beispiel für Definition 2.8.61). Sei  $\varphi: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, für  $n \in \mathbb{N}$ . Zusammen mit der abgeschlossenen Einbettung  $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow D^n$  liefert dies das Verklebe-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \cap \downarrow & & \downarrow I \\ D^n & \xrightarrow{\Phi} & D^n \sqcup_{\mathbb{S}^{n-1}} Y. \end{array}$$

Man sagt, dass  $X := D^n \sqcup_{\mathbb{S}^{n-1}} Y$  durch Hinzufügen einer  $n$ -Zelle (per  $\varphi$ ) aus  $Y$  entsteht. Aus Aufgabe 2.8.57 folgt, dass  $I$  eine abgeschlossene Einbettung ist, und dass  $\Phi$  zu einem Homöomorphismus  $E^n = D^n \setminus \mathbb{S}^{n-1} \xrightarrow{\sim} X \setminus I(Y)$  restringiert. Fassen wir  $Y$  (via  $I$ ) als abgeschlossene Teilmenge von  $X$  auf, so ist  $X$  als Menge (nicht als topologischer Raum) die disjunkte Vereinigung von  $Y$  mit der  $n$ -Zelle  $X \setminus Y$ . Die Abbildung  $\varphi$  kodiert, wie der „Rand dieser  $n$ -Zelle in  $Y$  eingeklebt wird“. Dies rechtfertigt die Terminologie.

**Definition 2.8.61.** Sei  $I: Y \rightarrow X$  eine Einbettung (man stelle sich  $Y$  als Teilmenge von  $X$  vor). Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Man sagt, dass  $X$  aus  $Y$  durch Hinzufügen einer  $n$ -Zelle entsteht oder dass  $I$  eine **Hinzufügung einer  $n$ -Zelle** ist, falls eine stetige Abbildung  $\Phi: D^n \rightarrow X$  mit  $\Phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subset I(Y)$  existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\Phi|} & Y \\ \cap \downarrow & & \downarrow I \\ D^n & \xrightarrow{\Phi} & X \end{array}$$

ein Pushout-Diagramm ist, wobei  $\Phi|$  die von  $\Phi$  induzierte stetige Abbildung bezeichnet. (Ein solches Pushout-Diagramm kann es nur geben, wenn  $I$  eine abgeschlossene Einbettung ist, siehe Aufgabe 2.8.57.) Ein solches  $\Phi$  nennt man **charakteristische** Abbildung.

Analog ist das simultane Hinzufügen mehrerer  $n$ -Zellen definiert, die durch eine Menge  $J$  indiziert sind. Als charakteristische Abbildung dient hierbei eine stetige Abbildung

$\Phi: \bigsqcup_{j \in J} D^n \rightarrow X$  mit  $\Phi(\bigsqcup_{j \in J} \mathbb{S}^{n-1}) \subset I(Y)$ ,<sup>21</sup> so dass

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{j \in J} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\Phi|} & Y \\ \cap \downarrow & & \downarrow I \\ \bigsqcup_{j \in J} D^n & \xrightarrow{\Phi} & X \end{array}$$

ein Pushout-Diagramm ist.

**2.8.62.** Das Hinzufügen einer  $n$ -Zelle ist die wesentliche Zutat in der Definition eines CW-Komplexes, die wir später geben (siehe Definition 2.8.69). Grob gesagt ist ein CW-Komplex ein topologischer Raum, der aus der leeren Menge entsteht, indem man zunächst 0-Zellen anfügt, dann 1-Zellen, dann 2-Zellen, etc.

**Lemma 2.8.63** ([tD08, Prop. 8.3.1]). *Sei*

$$(2.8.4) \quad \begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f} & A \\ i \downarrow & & \downarrow I \\ D & \xrightarrow{F} & X \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von topologischen Räumen und stetigen Abbildungen. Seien die folgenden vier Bedingungen erfüllt:

- (i)  $i$  und  $I$  sind abgeschlossene Einbettungen;<sup>22</sup> (Wir fassen  $S$  bzw.  $A$  im Folgenden als Teilmenge von  $D$  bzw.  $X$  auf.)
- (ii)  $F$  induziert eine Bijektion  $D \setminus S \rightarrow X \setminus A$  von Mengen;
- (iii)  $F(D) \sqcup X$  ist abgeschlossen;
- (iv) die von  $X$  auf  $F(D)$  induzierte Topologie stimmt mit der Quotiententopologie bezüglich der Abbildung  $F: D \rightarrow F(D)$  überein. (Im Sinne der späteren Definition 2.8.75 ist  $F: D \rightarrow F(D)$  also final.)

Dann ist (2.8.4) ein Pushout-Diagramm.

Weiter sind die beiden Bedingungen (iii) und (iv) für  $D$  quasi-kompakt und  $X$  Hausdorff automatisch erfüllt.

*Beweis.* Sei  $T$  ein topologischer Raum und seien  $\delta: D \rightarrow T$  und  $\alpha: A \rightarrow T$  stetige Abbildungen mit  $\delta \circ i = \alpha \circ f$ . Sei  $\gamma: X \rightarrow T$  die eindeutige Abbildung von Mengen mit  $\gamma|_A = \alpha$  und  $\gamma|_{X \setminus A} \circ F|_{D \setminus S} = \delta|_{D \setminus S}$ . Klar ist dann  $\gamma \circ I = \alpha$ . Die Gleichheit  $\gamma \circ F = \delta$  ist klar auf  $D \setminus S$ , sie gilt aber auch auf  $S$ : Für  $s \in S$  gilt  $\gamma(F(s)) = \gamma(F(i(s))) = \gamma(I(f(s))) = \alpha(f(s)) = \delta(i(s)) = \delta(s)$ .

Durch die beiden Gleichungen  $\gamma \circ I = \alpha$  und  $\gamma \circ F = \delta$  ist  $\gamma$  bereits als Abbildung von Mengen eindeutig bestimmt.

Es bleibt zu zeigen, dass  $\gamma$  stetig ist. Wir verwenden die endliche abgeschlossene Überdeckung  $X = F(D) \cup A$ . Sicherlich ist  $\gamma|_A = \gamma \circ I = \alpha$  stetig. Weil  $F(D)$  die Quotiententopologie

<sup>21</sup> Dies ist nichts anderes als eine Familie  $\Phi_j: D^n \rightarrow X$  stetiger Abbildungen mit  $\Phi_j(\mathbb{S}^{n-1}) \subset Y$ , für  $j \in J$ .

<sup>22</sup>Die Annahme, dass  $i$  eine abgeschlossene Einbettung ist, kann abgeschwächt werden. Es reicht, dass  $i$  injektiv ist.



bezüglich  $F: D \rightarrow F(D)$  trägt und  $\gamma|_{F(D)} \circ F = \gamma \circ F = \delta$  stetig ist, ist  $\gamma|_{F(D)}$  stetig. Also ist  $\gamma$  nach Proposition 2.4.13.(b) stetig.

Nehmen wir nun an, dass  $D$  quasi-kompakt ist und dass  $X$  Hausdorff ist. Nach Satz 2.7.15 ist  $F$  abgeschlossen, so dass insbesondere  $F(D) \triangleleft X$  gilt; und die induzierte Abbildung  $F: D \rightarrow F(D)$  ist stetig, surjektiv und abgeschlossen. Dann trägt  $F(D)$  nach dem folgenden Lemma 2.8.64 die Quotiententopologie.  $\square$

**Lemma 2.8.64** ([vQ79, Satz 3.20]). *Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige surjektive Abbildung, die offen oder abgeschlossen ist. Dann trägt  $Y$  die Quotiententopologie bezüglich  $f$ .*

*Beweis.* Sei  $V \subset Y$  eine Teilmenge. Da  $f$  surjektiv ist, gilt  $f(f^{-1}(V)) = V$ . Ist  $f$  offen, so folgt aus  $f^{-1}(V) \triangleleft X$  also  $V = f(f^{-1}(V)) \triangleleft Y$ ; da  $f$  als stetig vorausgesetzt ist, ist  $V \triangleleft Y$  äquivalent zu  $f^{-1}(V) \triangleleft X$ . Ist  $f$  abgeschlossen, so folgt aus  $f^{-1}(V) \triangleleft X$  also  $V = f(f^{-1}(V)) \triangleleft Y$ ; da  $f$  als stetig vorausgesetzt ist, ist somit  $V \triangleleft Y$  äquivalent zu  $f^{-1}(V) \triangleleft X$ .  $\square$

**Beispiel 2.8.65** ( $n$ -Späre entsteht aus dem Südpol durch Hinzufügen einer  $n$ -Zelle). Sei wie üblich  $e_{n+1} := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ; anschaulich ist dies der Nordpol. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: D^n &\rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} \cos(\pi\|x\|) \cdot e_{n+1} + \sin(\pi\|x\|) \cdot \frac{(x,0)}{\|x\|}, & x \neq 0, \\ e_{n+1}, & x = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

ist stetig, wie der Leser leicht überprüft, und erfüllt  $\Phi(\mathbb{S}^{n-1}) = \{-e_{n+1}\}$ . Dies zeigt, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{\Phi|} & \{-e_{n+1}\} \\ \cap \downarrow & & \cap \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{S}^n, \end{array}$$

kommutativ ist. Die Bedingungen von Lemma 2.8.63 sind erfüllt, denn  $D^n$  ist quasi-kompakt,  $\mathbb{S}^n$  ist Hausdorff, und  $\Phi$  ist injektiv auf  $E^n$  mit Bild  $\mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ . Also ist unser Diagramm kokartesisch. Also entsteht  $\mathbb{S}^n$  aus (der einpunktigen Menge bestehend aus) dem Südpol durch Hinzufügen einer  $n$ -Zelle mit charakteristischer Abbildung  $\Phi$ .

**Beispiel 2.8.66** ( $n$ -Späre entsteht aus Äquator- $(n-1)$ -Sphäre durch Hinzufügen zweier  $n$ -Zellen). Anschaulich ist klar, dass die 2-Sphäre  $\mathbb{S}^2$  aus der 1-Sphäre  $\mathbb{S}^1$ , aufgefasst als „Äquator“ in  $\mathbb{S}^2$ , durch Hinzufügen zweier 2-Zellen entsteht, nämlich der (offenen) nördlichen und südlichen Hemispären.

Betrachte allgemeiner die offensichtliche abgeschlossene Einbettung  $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ ,  $x \mapsto (x, 0)$  (Beispiel 2.7.16). Dann entsteht  $\mathbb{S}^n$  aus  $\mathbb{S}^{n-1}$  durch Hinzufügen zweier  $n$ -Zellen mit den beiden stetigen Abbildungen  $\Phi_+$  und  $\Phi_-$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_{\pm}: D^n &\rightarrow \mathbb{S}^n, \\ x &\mapsto (x, \pm\sqrt{1-|x|^2}), \end{aligned}$$

als charakteristischen Abbildungen (beachte  $\Phi_{\pm}(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \mathbb{S}^{n-1}$ ). Dies folgt wie im vorigen Beispiel 2.8.65 aus Lemma 2.8.63.

Insgesamt kann man also mit der leeren Menge  $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$  starten und dann sukzessive  $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \dots, \mathbb{S}^n$  durch Hinzufügen je zweier Zellen der richtigen Dimension konstruieren.

**Beispiel 2.8.67** (Reell projektive Räume durch Hinzufügen von Zellen). Die Abbildung  $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}, [x] \mapsto [(x, 0)]$ , ist eine abgeschlossene Einbettung (nach Satz 2.7.15 und Aufgabe 2.8.47). Es entsteht  $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$  durch Hinzufügen einer  $n$ -Zelle mit der stetigen Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi: D^n &\rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R}, \\ x &\mapsto [x, \sqrt{1 - \|x\|^2}],\end{aligned}$$

als charakteristischer Abbildung (beachte  $\Phi(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \mathbb{P}^{n-1}\mathbb{R}$ ). Dies folgt wie in Beispiel 2.8.65 aus Lemma 2.8.63.

Insgesamt kann man also mit der leeren Menge  $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{R} := \emptyset$  starten und dann sukzessive  $\mathbb{P}^0\mathbb{R}, \mathbb{P}^1\mathbb{R}, \dots, \mathbb{P}^n\mathbb{R}$  durch Hinzufügen je einer Zelle der richtigen Dimension konstruieren.

**Beispiel 2.8.68** (Komplex projektive Räume per Hinzufügen von Zellen). Analog wie in Beispiel 2.8.67 entsteht  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  aus  $\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{C}$  durch Hinzufügen einer  $2n$ -Zelle mit der stetigen Abbildung (hier wird  $D^{2n}$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  aufgefasst)

$$\begin{aligned}\Phi: D^{2n} &\rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{C}, \\ x &\mapsto [x, \sqrt{1 - \|x\|^2}],\end{aligned}$$

als charakteristischer Abbildung. Man beachte, dass  $\Phi$  surjektiv ist (obwohl  $\sqrt{1 - \|x\|^2}$  reell und nichtnegativ ist).

Insgesamt kann man also mit der leeren Menge  $\mathbb{P}^{-1}\mathbb{C} := \emptyset$  starten und dann sukzessive  $\mathbb{P}^0\mathbb{C}, \mathbb{P}^1\mathbb{C}, \dots, \mathbb{P}^n\mathbb{C}$  durch Hinzufügen je einer Zelle der richtigen Dimension konstruieren.

**Definition 2.8.69** ([tD08, Chapter 8.3]). Ein **CW-Komplex**<sup>23</sup> ist ein topologischer Raum  $X$  zusammen mit einer **CW-Zerlegung**, d. h. einer aufsteigenden Folge  $X_{-1} = \emptyset \subset X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$  von (notwendig abgeschlossenen) Teilmengen von  $X$ , indiziert durch  $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ ,<sup>24</sup> so dass die folgenden Bedingungen gelten:

- (a)  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ .
- (b) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  entsteht  $X_n$  aus  $X_{n-1}$  durch Hinzufügen von  $n$ -Zellen.<sup>25</sup> Insbesondere ist  $X_{n-1}$  abgeschlossen in  $X_n$ .
- (c)  $X$  trägt die Finaltopologie bezüglich der Inklusionen  $X_n \hookrightarrow X$ : Für eine Teilmenge  $U \subset X$  gilt genau dann  $U \subseteq X$ , wenn  $U \cap X_n \subseteq X_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt.

**2.8.70.** Die letzte Bedingung ist automatisch erfüllt, falls es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $X_n = X$  gibt.

**Beispiel 2.8.71.** Die Beispiele 2.8.65, 2.8.66, 2.8.67, 2.8.68 liefern die folgenden CW-Komplexe:

- $X = \mathbb{S}^n$  mit CW-Zerlegung  $X_0 = \{-e_{n+1}\} = \dots = X_{n-1} \subset X_n = X$ .

<sup>23</sup> Die Buchstaben CW stehen für *closure-finiteness* und *weak topology*. Wir verweisen auf [Hat02, Appendix] für Details.

<sup>24</sup> Wir folgen hier der Literatur [tD08]. Formal besser scheint mir, für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine (automatisch abgeschlossene) Einbettung  $I_n: X_n \rightarrow X$  zu fixieren, so dass  $I_n(X_n) \subset I_{n+1}(X_{n+1})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt (die Vereinigung der  $X_n$  ist dann durch ihren Colimes zu ersetzen). Wenn man dann jedes  $X_n$  mit  $I_n(X_n)$  identifiziert, ist man in der Situation der Definition.

<sup>25</sup> Hier wird also nur die Existenz geeigneter charakteristischer Abbildungen gefordert. Man könnte diese auch zum Teil des Datums eines CW-Komplexes machen.

- $X = \mathbb{S}^n$  mit  $X_0 = \mathbb{S}^0 \subset X_1 = \mathbb{S}^1 \subset X_2 = \mathbb{S}^2 \subset \dots \subset X_n = \mathbb{S}^n = X$ .
- $X = \mathbb{P}^n \mathbb{R}$  mit  $X_0 = \mathbb{P}^0 \mathbb{R} \subset X_1 = \mathbb{P}^1 \mathbb{R} \subset X_2 = \mathbb{P}^2 \mathbb{R} \subset \dots \subset X_n = \mathbb{P}^n \mathbb{R} = X$ .
- $X = \mathbb{P}^n \mathbb{C}$  mit  $X_0 = \mathbb{P}^0 \mathbb{C} \subset X_1 = \mathbb{P}^1 \mathbb{C} \subset X_2 = \mathbb{P}^2 \mathbb{C} \subset \dots \subset X_n = \mathbb{P}^n \mathbb{C} = X$ .

Definiert man  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{R}$  als Vereinigung über die aufsteigende Folge  $\mathbb{P}^0 \mathbb{R} \subset \mathbb{P}^1 \mathbb{R} \subset \dots$  und versieht diesen Raum mit der Finaltopologie bezüglich der Inklusionen  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{P}^\infty \mathbb{R}$ , so erhält man die Struktur eines CW-Komplexes auf  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{R}$ . Analog kann man  $\mathbb{P}^\infty \mathbb{C}$  und  $\mathbb{S}^\infty$  definieren.

**Beispiel 2.8.72.** Die Fläche  $F_g$  vom Geschlecht  $g$  aus Beispiel 2.8.44 hat zwei offensichtliche CW-Komplex-Strukturen: Zum einen entsteht  $F_g$  aus einem Punkt durch Hinzufügen einer 2-Zelle mit charakteristischer Abbildung  $D^2 \cong P^g \rightarrow F_g$ . Zum anderen kann man zu einem Punkt zuerst  $2g$  1-Zellen hinzufügen (alias die „Wege“  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  in  $F_g$ ), und dann eine 2-Zelle hinzufügen.

**Beispiel 2.8.73** ( $\mathbb{R}^n$  als CW-Komplex). ) Wir beschreiben eine CW-Zerlegung von  $X = \mathbb{R}^2$ . Es bestehe  $X_0 = \mathbb{Z}^2$  aus allen ganzzahligen Gitterpunkten,  $X_1 = \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} (\{s\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{s\})$  aus alle vertikalen und horizontalen Geraden durch Gitterpunkte, und es gelte  $X_2 = \mathbb{R}^2$ . Der Nachweis, dass dies eine CW-Zerlegung ist, sei dem Leser überlassen (siehe Aufgabe 2.8.74). Analog kann man  $\mathbb{R}^n$  zu einem CW-Komplex machen, und jede dazu homöomorphe Menge, etwa die  $n$ -Zelle  $E^n$ .

Ende der 6. Vorlesung am 25.04.2019.

Hausaufgaben:

- (1) Teil (a) von Aufgabe 2.8.47, projektiver Raum kompakt; Teil (b) als Bonus
- (2) Aufgabe 2.8.48, projektiver Raum als Quotient einer Disk, oder Aufgabe 2.8.49, Weg in Hausdorffraum
- (3) Aufgabe 2.8.56, Transitivität von Kokartesisitat
- (4) Aufgabe 2.8.57, Pushouts und offene/abgeschlossene Einbettungen

**Aufgabe 2.8.74.** Beweise die Behauptung in Beispiel 2.8.73.

Hinweis: Verwende Lemma 2.8.63; für Bedingung (iv) ist Aufgabe 2.4.18 nützlich, die in der dortigen Notation besagt, dass  $X$  die Quotiententopologie bezüglich der offensichtlichen Abbildung  $\bigsqcup_{A \in \mathcal{A}} A \rightarrow X$  trägt (vgl. Beispiel 2.8.36).

Der Rest dieses Abschnitts wurde in der Vorlesung nicht erklärt.

**Definition 2.8.75.** Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  topologischer Räume heißt **final**<sup>26</sup>, wenn die Topologie auf  $Y$  die Finaltopologie bezüglich der Abbildung  $f$  ist.<sup>27 28</sup>

**2.8.76.** Jede finale Abbildung ist stetig.

**2.8.77.** Genau dann ist  $f: X \rightarrow Y$  final, wenn eine beliebige Teilmenge  $V \subset Y$  genau dann offen in  $Y$  ist, wenn ihr Urbild  $f^{-1}(V)$  offen in  $X$  ist (ist  $f$  stetig, so ist die Implikation  $\Rightarrow$  trivial). Hierbei kann *offen* durch *abgeschlossen* ersetzt werden.

<sup>26</sup>Diese Terminologie ist nicht allgemein verbreitet.

<sup>27</sup> Man könnte allgemeiner definieren, was eine *finale Familie* ( $f_i: X_i \rightarrow Y$ ) von Abbildungen zwischen topologischen Räumen (mit demselben Zielbereich) ist. Mit Aufgabe 2.8.38 kann man sich jedoch auf den Fall einer Abbildung zurückziehen.

<sup>28</sup>Analog kann man *initiale* Abbildungen oder Familien definieren.

**2.8.78.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine finale Abbildung. Dann ist  $f(X)$  offen und abgeschlossen in  $Y$ . Jede Teilmenge von  $Y \setminus f(X)$  ist offen und abgeschlossen in  $Y$ , d. h.  $Y \setminus f(X)$  trägt die diskrete Topologie.

**2.8.79.** Nach Lemma 2.8.64 ist jede stetige surjektive Abbildung  $f: X \rightarrow Y$ , die offen oder abgeschlossen ist, final.

**Beispiel 2.8.80.** In der Situation von Beispiel 2.8.36 ist die offensichtliche Abbildung  $\bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} U \rightarrow X$  stetig, offen, surjektiv und damit final.

**Beispiel 2.8.81.** Die Abbildung  $\text{Exp}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, t \mapsto \exp(2\pi it)$ , ist stetig, surjektiv, und nach Satz 2.7.15 abgeschlossen. (Sie ist nicht offen.) Also ist sie final.

**Lemma 2.8.82** (Transitivität finaler Abbildungen). *Seien  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  stetige Abbildungen. Dann gelten:*

- (a) (Komposition, composition) Sind  $f$  und  $g$  final, so auch  $g \circ f$ .
- (b) (Rechtsstreichen, right cancellation) Ist  $g \circ f$  final, so auch  $g$ .

*Beweis.* Wir verwenden im Beweis beider Aussagen die Charakterisierung der Finaltopologie aus Satz 2.8.35.

(a) Seien  $f$  und  $g$  final. Sei  $T$  ein topologischer Raum und sei  $t: Z \rightarrow T$  eine Abbildung von Mengen. Finalität von  $g$  zeigt, dass  $t$  genau dann stetig ist, wenn  $t \circ g$  stetig ist. Finalität von  $f$  zeigt, dass  $t \circ g$  genau dann stetig ist, wenn  $t \circ g \circ f$  stetig ist. Also ist  $t$  genau dann stetig, wenn  $t \circ g \circ f$  stetig ist. Also ist  $g \circ f$  final.

Alternativ kann man dies auch wie folgt nachrechnen: Für  $W \subset Z$  gilt  $W \textcircled{\subset} Z \iff g^{-1}(W) \textcircled{\subset} Y \iff (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)) \textcircled{\subset} X$ . Also trägt  $Z$  die Finaltopologie bezüglich  $g \circ f$ .

(b) Sei  $g \circ f$  final. Sei  $T$  ein topologischer Raum und sei  $t: Z \rightarrow T$  eine Abbildung von Mengen. Dann haben wir Implikationen

$$\begin{aligned} t \text{ stetig} &\implies t \circ g \text{ stetig} && \text{(da } g \text{ stetig)} \\ &\implies t \circ g \circ f \text{ stetig} && \text{(da } f \text{ stetig)} \\ &\implies t \text{ stetig} && \text{(da } g \circ f \text{ final).} \end{aligned}$$

Also ist  $g$  final. □

**Beispiel 2.8.83.** Jede stetige Abbildung mit Schnitt ist final: Sei  $f: X \rightarrow S$  eine stetige Abbildung, für die es einen stetigen **Schnitt** (= Rechtsinverses) gibt, also eine stetige Abbildung  $s: S \rightarrow X$  mit  $f \circ s = \text{id}_S$  (daraus folgt, dass  $f$  surjektiv ist). Da  $\text{id}_S$  final ist, ist  $f$  final nach Lemma 2.8.82.(b).

Beispielsweise ist die Strukturabbildung  $E \rightarrow S$  jedes Vektorbündels final (betrachte den Nullschnitt).

**Aufgabe 2.8.84** ([vQ79, Kapitel 3D]). Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung von Mengen. Zugehörigkeit zur selben Faser von  $f$  definiert eine Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $X$ . Dann faktorisiert  $f$  als Verknüpfung

$$X \xrightarrow{p} X/\sim \xrightarrow{\bar{f}} f(X) \xrightarrow{i} Y,$$

einer surjektiven Abbildung  $p$ , gefolgt von einer bijektiven Abbildung  $\bar{f}$ , gefolgt von einer injektiven Abbildung  $i$ .

Ist  $f$  eine stetige Abbildung topologischer Räume, so kann man  $X/\sim$  mit der Quotiententopologie versehen (so dass  $p$  final wird),  $f(X)$  mit der Spurtopologie (so dass  $i$  „initial“ wird). Die Abbildung  $\bar{f}$  ist dann stetig.

**Lemma 2.8.85** (Finalität ist lokal im Ziel (= Zielbereich)). *Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Hat  $Y$  eine offene Überdeckung  $\mathcal{V}$ , so dass die induzierte Abbildung  $f: f^{-1}(V) \rightarrow V$  für alle  $V \in \mathcal{V}$  final ist, so ist  $f$  final.*

*Beweis.* Offensichtlich. □

**Beispiel 2.8.86.** Hat eine stetige Abbildung lokal Schnitte, so ist sie final. Dies folgt aus Lemma 2.8.85 und Beispiel 2.8.83.

### 3. HOMOTOPIE UND FUNDAMENTALGRUPPE

#### 3.1. Definition der Fundamentalgruppe.

**3.1.1.** Wir hatten einen Weg in einem topologischen Raum  $X$  als stetige Abbildung  $\gamma: [a, b] \rightarrow X$  definiert. Im Folgenden betrachten wir oft nur Wege mit Definitionsbereich  $[0, 1]$  und nennen diese auch schlicht **Wege**. Genauer könnte man von **normierten** Wegen sprechen.

**Definition 3.1.2.** Seien  $x, y$  Punkte eines topologischen Raums  $X$ . Sei

$$\Omega(X, x, y) := \{\alpha: [0, 1] \rightarrow X \mid \alpha \text{ stetig mit } \alpha(0) = x \text{ und } \alpha(1) = y\}$$

die Menge aller Wege von  $x$  nach  $y$ .

Gegeben zwei Wege  $\alpha \in \Omega(X, x, y)$  und  $\beta \in \Omega(X, y, z)$  – der Endpunkt von  $\alpha$  ist also der Startpunkt von  $\beta$  – ist ihre **Verknüpfung** oder **Aneinanderhängung**  $\beta * \alpha \in \Omega(X, x, z)$  durch

$$(\beta * \alpha)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

definiert, wobei Stetigkeit aus Proposition 2.4.13.(b) folgt.<sup>29</sup>

Für  $x \in X$  ist der **konstante Weg**  $\varepsilon_x \in \Omega(X, x, x)$  durch  $\varepsilon_x(t) = x$  definiert.

Ist ein Weg  $\alpha \in \Omega(X, x, y)$  gegeben, so ist sein **umgekehrter Weg**  $\bar{\alpha} \in \Omega(X, y, x)$  durch  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$  definiert.

Ein Weg heißt **geschlossen** oder eine **Schleife**, wenn sein Anfangspunkt mit seinem Endpunkt übereinstimmt. Eine **Schleife bei  $x$**  ist ein geschlossener Weg mit  $x$  als Anfangs- und Endpunkt.

**3.1.3.** Die Verknüpfung  $*$  von Wegen ist nicht assoziativ.

**3.1.4.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Für jeden Weg  $\alpha \in \Omega(X, x, y)$  in  $X$  ist sein Bild  $f \circ \alpha \in \Omega(Y, f(x), f(y))$  unter  $f$  ein Weg in  $Y$ . Diese Zuordnung ist mit der Aneinanderhängung von Wegen verträglich: Gegeben zwei Wege  $\alpha \in \Omega(X, x, y)$  und  $\beta \in \Omega(y, z)$  gilt

$$f \circ (\beta * \alpha) = (f \circ \beta) * (f \circ \alpha).$$

<sup>29</sup>Wir durchlaufen in  $\beta * \alpha$  zuerst den Weg  $\alpha$  und dann den Weg  $\beta$ . In der Literatur kommt auch die andere Konvention vor, etwa in [[Hat02].

**Definition 3.1.5.** Seien  $\alpha, \beta \in \Omega(X, x, y)$  zwei Wege von  $x$  nach  $y$ . Eine **Homotopie (mit festen Randpunkten)** von  $\alpha$  nach  $\beta$  ist eine stetige Abbildung

$$h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- $h(t, 0) = \alpha(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ ,
- $h(t, 1) = \beta(t)$  für alle  $t \in [0, 1]$ ,
- $h(0, \tau) = x$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ ,
- $h(1, \tau) = y$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ .

Wir schreiben eine solche Homotopie als  $h: \alpha \cong \beta$ . Wir nennen  $\alpha$  und  $\beta$  **homotop (mit festen Randpunkten)** und schreiben  $\alpha \cong \beta$ , wenn eine Homotopie von  $\alpha$  nach  $\beta$  existiert.

Eine Schleife  $\alpha \in \Omega(X, x, x)$  heißt **zusammenziehbar**, wenn sie zum konstanten Weg  $\varepsilon_x$  homotop ist.

**3.1.6.** Man stellt sich eine Homotopie  $h: \alpha \cong \beta$  als „stetige“ Familie von Wegen  $h_\tau := h(-, \tau) \in \Omega(X, x, y)$ , für  $\tau \in [0, 1]$ , mit  $h_0 = \alpha$  und  $h_1 = \beta$  vor.

**Beispiel 3.1.7.** Ist  $X \subset \mathbb{R}^n$  konvex, so sind je zwei Wege  $\alpha, \beta$  von  $x$  nach  $y$  homotop mittels  $h(t, \tau) = (1 - \tau)\alpha(t) + \tau\beta(t)$ .

**Beispiel 3.1.8.** Bilder homotoper Wege sind homotop: Ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig und ist  $h: \alpha \cong \beta$  eine Homotopie, so ist auch  $f \circ h: f \circ \alpha \cong f \circ \beta$  eine Homotopie.

**Beispiel 3.1.9.** Jeder Weg  $\alpha$  ist homotop zu jeder Umparametrisierung  $\alpha \circ v$ , wobei  $v: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  eine beliebige stetige Abbildung mit  $v(0) = 0$  und  $v(1) = 1$  ist: Zunächst gilt  $v \cong \text{id}_{[0,1]}$  nach Beispiel 3.1.7 angewandt auf das konvexe Einheitsintervall, und dann folgt  $\alpha \circ v \cong \alpha \circ \text{id} = \alpha$  mit Beispiel 3.1.8.

**Lemma 3.1.10** (Homotopie ist Äquivalenzrelation). *Seien  $x, y$  Punkte eines topologischen Raums  $X$ . Dann ist Homotopie eine Äquivalenzrelation auf  $\Omega(X, x, y)$ .*

*Beweis.* Reflexivität und Symmetrie seien dem Leser überlassen. Transitivität: Seien  $h: \alpha \cong \beta$  und  $h': \beta \cong \gamma$  Homotopien. Dann definiert

$$H(t, \tau) := \begin{cases} h(t, 2\tau) & \text{falls } 0 \leq \tau \leq \frac{1}{2}, \\ h'(t, 2\tau - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq \tau \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie von  $\alpha$  nach  $\gamma$ , wobei man beachte, dass  $H$  nach Proposition 2.4.13.(b) stetig ist.  $\square$

**Definition 3.1.11.** Elemente von

$$\pi_1(X, x, y) := \Omega(X, x, y) / \sim$$

heißen **Homotopieklassen (mit festen Randpunkten)** von Wegen von  $x$  nach  $y$ . Die Homotopieklasse (= Äquivalenzklasse) von  $\alpha \in \Omega(X, x, y)$  wird  $[\alpha]$  notiert.

**Lemma 3.1.12.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wann immer die folgenden Aneinanderhängungen von Wegen in dem Sinne sinnvoll sind, dass der eine Weg dort aufhört, wo der nächste anfängt, gelten die folgenden Aussagen:*

- $\alpha \cong \alpha' \Rightarrow \alpha * \beta \cong \alpha' * \beta$
- $\beta \cong \beta' \Rightarrow \alpha * \beta \cong \alpha * \beta'$

- $\alpha * \varepsilon_x \cong \alpha \cong \varepsilon_y * \alpha$
- $\bar{\alpha} * \alpha \cong \varepsilon_x$  und  $\alpha * \bar{\alpha} \cong \varepsilon_y$
- $\overline{(\alpha * \beta)} = \bar{\beta} * \bar{\alpha}$
- $(\alpha * \beta) * \gamma \cong \alpha * (\beta * \gamma)$

*Beweis.* Wir erklären beispielhaft  $\bar{\alpha} * \alpha \cong \varepsilon_x$  und  $(\alpha * \beta) * \gamma \cong \alpha * (\beta * \gamma)$ . Die restlichen einfacheren Aussagen sind dem Leser überlassen.

$\bar{\alpha} * \alpha \cong \varepsilon_x$ : Die Formel

$$H(t, \tau) := \begin{cases} x & \text{falls } 2t \leq \tau, \\ \alpha(2t - \tau) & \text{falls } \tau \leq 2t \leq 1, \\ \alpha(2(1-t) - \tau) = \bar{\alpha}(2t - 1 + \tau) & \text{falls } 1 \leq 2t \leq 2 - \tau, \\ x & \text{falls } 2 - \tau \leq 2t, \end{cases}$$

definiert eine (stetige) Homotopie von  $\bar{\alpha} * \alpha$  nach  $\varepsilon_x$ .

$(\alpha * \beta) * \gamma \cong \alpha * (\beta * \gamma)$ : Sicherlich gilt

$$(\alpha * \beta) * \gamma = (\alpha * (\beta * \gamma)) \circ v$$

für eine geeignete Umparametrisierung  $v: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  mit  $v(0) = 0$  und  $v(1) = 1$ . Nach Beispiel 3.1.9 ist jeder Weg homotop zu jeder seiner Umparametrisierungen.  $\square$

**Aufgabe 3.1.13.** Seien  $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, x, y)$  und  $\beta, \beta' \in \Omega(X, y, z)$  Wege in einem topologischen Raum  $X$ . Gelte  $\beta * \alpha \cong \beta' * \alpha'$  und  $\beta \cong \beta'$ . Dann gilt  $\alpha \cong \alpha'$ .

**Definition 3.1.14.** Ein **punktierter (topologischer) Raum**<sup>30</sup> ist ein Paar  $(X, x)$  bestehend aus einem topologischen Raum  $X$  und einem Punkt  $x \in X$ , genannt **Basispunkt**.

**Definition 3.1.15.** Ist  $(X, x)$  ein punktierter topologischer Raum, so kürzen wir ab

$$\Omega(X, x) := \Omega(X, x, x) \quad \text{und} \quad \pi_1(X, x) := \pi_1(X, x, x).$$

**Satz 3.1.16.** Sei  $(X, x)$  ein punktierter Raum. Das Aneinanderhängen  $*$  von Schleifen bei  $x$  induziert eine Verknüpfung  $*$  auf der Menge  $\pi_1(X, x)$  der Homotopieklassen von Schleifen bei  $x$  und macht

$$\pi_1(X, x)$$

zu einer Gruppe, genannt **Fundamentalgruppe** von  $(X, x)$ .

*Beweis.* Dies folgt sofort aus Lemma 3.1.12: Die ersten beiden Aussagen dort zeigen, dass aus  $\alpha \cong \alpha'$  und  $\beta \cong \beta'$  die Aussage  $\alpha * \beta \cong \alpha' * \beta'$  folgt. Also ist die Verknüpfung

$$\begin{aligned} * : \Omega(X, x) \times \Omega(X, x) &\rightarrow \Omega(X, x), \\ ([\alpha], [\beta]) &\mapsto [\alpha * \beta], \end{aligned}$$

wohldefiniert. Sie ist assoziativ nach der letzten Aussage, hat  $\varepsilon_x$  als neutrales Element nach der dritten Aussage, und  $[\bar{\alpha}]$  ist nach der vierten Aussage sowohl links- als auch rechtsinvers zu  $[\alpha]$ .  $\square$

<sup>30</sup> Englisch *pointed space* (aber nicht *punctured space*). *Bepunktet* oder *pointiert* wäre eine bessere deutsche Übersetzung, sie ist aber unüblich.

**Beispiel 3.1.17.** Die Fundamentalgruppe von  $\mathbb{R}^n$  und jeder konvexen, nichtleeren Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$  ist für jeden Basispunkt  $x$  trivial (nach Beispiel 3.1.7), in Formeln  $\pi_1(\mathbb{R}^n, x) \cong 1$  und  $\pi_1(X, x) \cong 1$ .<sup>31</sup>

**3.1.18** (Fundamentalgruppe hängt nur von Wegzusammenhangskomponente ab). Sei  $x$  ein Punkt eines topologischen Raums  $X$  und sei  $W$  seine Wegzusammenhangskomponente. Da das Bild jeder Schleife bei  $x$  und jeder Homotopie zwischen zwei solchen Schleifen in  $W$  erhalten sein muss, sind die Gruppen  $\pi_1(W, x)$  und  $\pi_1(X, x)$  in offensichtlicher Weise isomorph (vgl. 3.2.19). Dies zeigt auch, dass für jedes  $y \in X \setminus W$  die beiden Fundamentalgruppen  $\pi_1(X, x)$  und  $\pi_1(X, y)$  im Allgemeinen nichts miteinander zu tun haben. Für wegverbundene Punkte liefert jeder Verbindungsweg einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Fundamentalgruppen, genauer gilt die folgende Proposition 3.1.19.

**Proposition 3.1.19** (Wechsel des Basispunkts). *Seien  $x, y$  Punkte eines topologischen Raums  $X$ . Dann liefert jeder Weg  $\gamma \in \Omega(X, x, y)$  von  $x$  nach  $y$  einen Gruppenisomorphismus*

$$c_\gamma: \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, y),$$

$$[\alpha] \mapsto [(\gamma * \alpha) * \bar{\gamma}] = [\gamma * (\alpha * \bar{\gamma})].$$

*Dieser Isomorphismus hängt nur von der Homotopieklasse von  $\gamma$  ab.*

*Beweis.* (Siehe Aufgabe 3.2.26 für eine kategorielle Version dieses Beweises.) Alles folgt aus Lemma 3.1.12: Die angegebene Abbildung  $c_\gamma$  ist wohldefiniert und ein Gruppenmorphismus<sup>32</sup>. Analoges gilt für  $c_{\bar{\gamma}}: \pi_1(X, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$ , und diese beiden Gruppenmorphisamen sind invers zueinander. Ist  $\gamma' \in \Omega(X, x, y)$  ein zu  $\gamma$  homotoper Weg, so gilt  $\bar{\gamma} \cong \bar{\gamma}'$  (das ist klar nach Definition oder nach Aufgabe 3.1.13 oder nach Lemma 3.1.12) und wir folgern  $c_\gamma = c_{\gamma'}$ .  $\square$

**Definition 3.1.20.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **einfach zusammenhängend**<sup>33</sup>, wenn er wegzusammenhängend ist und  $\pi_1(X, x) = \{1\}$  für jedes  $x \in X$  gilt. Die letzte Bedingung bedeutet in Worten, dass jede Schleife zussammenziehbar ist.

**3.1.21.** Nach Proposition 3.1.19 genügt es, die Bedingung  $\pi_1(X, x) = \{1\}$  für einen beliebigen Punkt  $x \in X$  zu prüfen, wenn  $X$  als wegzusammenhängend vorausgesetzt ist.

**Beispiel 3.1.22.** Jede nichtleere konvexe Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  ist einfach zusammenhängend.

**Satz 3.1.23.** *Sei  $X = U \cup V$  eine offene Überdeckung eines topologischen Raums  $X$ . Sind  $U$  und  $V$  einfach zusammenhängend und ist  $U \cap V$  wegzusammenhängend, so ist  $X$  einfach zusammenhängend.*

**Ausblick 3.1.24.** Dieser Satz wird sich als Spezialfall des Satzes von Seifert-van Kampen 3.10.4 erweisen.

*Beweis.* Da  $U, V$  und  $U \cap V$  wegzusammenhängend sind und insbesondere  $U \cap V \neq \emptyset$  gilt, ist  $X = U \cup V$  wegzusammenhängend. Sei  $x \in U \cap V \neq \emptyset$ . Sei  $\gamma \in \Omega(X, x)$  eine Schleife. Zu

<sup>31</sup>Das neutrale Element einer (multiplikativ notierten) Gruppe wird als 1 notiert. Wir schreiben oft 1 statt  $\{1\}$  für die Gruppe mit genau einem Element.

<sup>32</sup> Synonyme sind: Gruppenmorphismus, Morphismus von Gruppen, Gruppenhomomorphismus, Homomorphismus von Gruppen.

<sup>33</sup>Dies ist die übliche Terminologie. Etwas genauer wäre *einfach wegzusammenhängend*



zeigen ist, dass  $\gamma$  zusammenziehbar ist. Nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue 2.7.18, angewandt auf  $[0, 1] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$ , gibt es eine Unterteilung  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$  des Einheitsintervalls derart, dass jedes Intervall  $[a_i, a_{i+1}]$  unter  $\gamma$  ganz in  $U$  oder ganz in  $V$  landet. Ohne Einschränkung (durch Weglassen von  $a_i$ 's) können wir annehmen, dass  $\gamma$  „abwechselnd“<sup>34</sup> ganz in  $U$  bzw.  $V$  verläuft. Dann gilt  $\gamma(a_i) \in U \cap V$  für alle  $i$ . Da  $U \cap V$  wegzusammenhängend ist, gibt es für alle  $0 < i < n$  einen Weg  $\beta_i \in \Omega(U \cap V, x, \gamma(a_i))$ .

Sei  $v_i: [0, 1] \xrightarrow{\sim} [a_{i-1}, a_i]$  affin linear mit  $v_i(0) = a_{i-1}$  und  $v_i(1) = a_i$ , für  $1 \leq i \leq n$ , und setze  $\gamma_i := \gamma \circ v_i$ . Dann gilt

$$\gamma \cong \gamma_n * \dots * \gamma_2 * \gamma_1$$

nach Beispiel 3.1.9, wobei man sich den Ausdruck rechts beliebig geklammert denkt, es aber nach Lemma 3.1.12 egal ist, welche Klammerung man wählt, und wir eh nur an Wegen bis auf Homotopie interessiert sind. Nach demselben Lemma gilt

$$\begin{aligned} \gamma_n * \dots * \gamma_2 * \gamma_1 &\cong \gamma_n * (\beta_{n-1} * \bar{\beta}_{n-1}) * \gamma_{n-1} * \dots * \gamma_3 * (\beta_2 * \bar{\beta}_2) * \gamma_2 * (\beta_1 * \bar{\beta}_1) * \gamma_1 \\ &\cong (\gamma_n * \beta_{n-1}) * (\bar{\beta}_{n-1} * \gamma_{n-1} * \beta_{n-2}) * \dots * (\bar{\beta}_2 * \gamma_2 * \beta_1) * (\bar{\beta}_1 * \gamma_1). \end{aligned}$$

Jeder im letzten Ausdruck eingeklammerte Teilausdruck ist eine Schleife bei  $x$  und landet komplett in  $U$  oder in  $V$  und kann so als Element von  $\Omega(U, x)$  oder  $\Omega(V, x)$  aufgefasst werden. Nach Annahme ist jede Schleife in  $U$  zusammenziehbar, und analog für  $V$ . Die eingeklammerten Schleifen sind also erst recht in  $X$  zusammenziehbar, d. h. homotop zu  $\varepsilon_x$ , und es folgt  $\gamma \cong \varepsilon_x$ .  $\square$

**Satz 3.1.25.** Für  $n \geq 2$  ist die Sphäre  $\mathbb{S}^n$  einfach zusammenhängend. Insbesondere gilt  $\pi_1(\mathbb{S}^n, x) = \{1\}$  für jeden Basispunkt  $x \in \mathbb{S}^n$ .

**3.1.26.** Zu zeigen ist, dass jede Schleife  $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n$  zusammenziehbar ist. Ist  $\gamma$  nicht surjektiv, so ist das einfach, denn  $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$  ist homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  (stereographische Projektion), wobei  $p \in \mathbb{S}^n$  beliebig ist. Es gibt jedoch surjektive Schleifen, die man etwa aus der Hilbertkurve oder anderen raumfüllenden Kurven konstruieren kann. Der folgende Beweis funktioniert insbesondere für solche Schleifen.

*Beweis.* Seien  $u = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$  der „Nordpol“ und  $v = (-1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$  der „Südpol“. Setze  $U := \mathbb{S}^n \setminus \{u\}$  und  $V = \mathbb{S}^n \setminus \{v\}$ . Per stereographischer Projektionen (mit Projektionszentren  $u$  bzw.  $v$ ) sind  $U$  und  $V$  jeweils homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  und damit einfach zusammenhängend (Bsp. 3.1.22). Weiter ist  $U \cap V$  homöomorph zu  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , was für  $n \geq 2$  wegzusammenhängend ist. Nun verwende Satz 3.1.23.  $\square$

Ende der 7. Vorlesung am 30.04.2019.

**Aufgabe 3.1.27.** Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$  heißt **sternförmig**, wenn es einen Punkt  $z \in X$  gibt, so dass für alle  $y \in X$  das Segment  $[z, y] := \{(1-t)z + ty \mid t \in [0, 1]\}$  in  $X$  enthalten ist.

(a) Jede sternförmige Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist einfach zusammenhängend.

Eine Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$  heißt **lokalsternförmig**<sup>35</sup>, wenn jeder Punkt von  $X$  eine sternförmige Umgebung  $U \subset X$  besitzt. Beispielsweise ist jede offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  lokalsternförmig.

<sup>34</sup> Damit ist formal gemeint, dass  $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset U$  für alle geraden  $i$  und  $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset V$  für alle ungeraden  $i$  gilt (oder dieselbe Bedingung mit  $U$  und  $V$  vertauscht).

<sup>35</sup> Wir schreiben wegen 5.2.3 nicht *lokal sternförmig*.

- (b) Ein Weg in einer lokalsternförmigen Teilmenge  $X \subset \mathbb{R}^n$  ist homotop zu einem stückweise affin linearen Weg  $h$ , d. h. zu einem Weg, der aus endlich vielen geraden Strecken besteht, die mit konstanter Geschwindigkeit  $|\frac{\partial}{\partial t}h(t)|$  (was außer in endlich vielen Punkten  $t \in [0, 1]$ , die den Endpunkten der Strecken entsprechen, definiert ist) durchlaufen werden.
- (c) Bonus: Jede Vereinigung endlich vieler abgeschlossener konvexer Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  ist lokalsternförmig.

**Aufgabe 3.1.28.** Die Fundamentalgruppe einer punktierten kompakten (ohne Einschränkung zusammenhängenden) Mannigfaltigkeit ist endlich erzeugt.

Hinweis: Skript „Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie“ von Soergel, ergänzende Übung 1.2.29.

### 3.2. Fundamentalgruppe der Kreislinie.

**3.2.1.** Ziel dieses Abschnitts ist die Berechnung der Fundamentalgruppe der Kreislinie  $\mathbb{S}^1$ , siehe Satz 3.2.14. Sie ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$ . Die Fundamentalgruppen aller anderen Sphären  $\mathbb{S}^n$ , für  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  sind trivial (Satz 3.1.25 bzw. offensichtlich für  $n = 0$ ).

**3.2.2.** Wir fassen  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$  oft als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auf, indem wir  $\mathbb{R}^2$  per  $(a, b) \mapsto a + ib$  mit  $\mathbb{C}$  identifizieren.

**Definition 3.2.3.** Um Schreibarbeit zu sparen, definieren wir

$$\begin{aligned} \text{Exp}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto \text{Exp}(t) := e^{2\pi it} = \exp(2\pi it) = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

**3.2.4.** Die Abbildung  $\text{Exp}$  ist stetig, surjektiv, und ein Gruppenmorphismus  $\text{Exp}: (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{S}^1, \cdot)$  mit Kern  $\mathbb{Z}$ . (Außerdem ist diese Abbildung offen, so dass  $\mathbb{S}^1$  die Quotiententopologie bezüglich  $\text{Exp}$  trägt (Lemma 2.8.64).)

**3.2.5.** Die Abbildung  $\text{Exp}$  läßt sich geometrisch als Projektionsabbildung von einer Helix interpretieren. Genauer ist  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ , eine abgeschlossene Einbettung und hat als Bild eine Helix (vgl. Aufgaben 2.8.29 und 2.8.31). Dann ist  $\text{Exp}$  die Verknüpfung dieser Einbettung mit der Projektion auf die ersten beiden Koordinaten.

**Definition 3.2.6.** Ein **Lift** (bezüglich  $\text{Exp}$ ) einer stetigen Abbildung  $f: Y \rightarrow \mathbb{S}^1$  ist eine stetige Abbildung  $\tilde{f}: Y \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\text{Exp} \circ \tilde{f} = f$ . Das folgende Diagramm illustriert die Situation.

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \text{Exp} \\ Y & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

**Lemma 3.2.7.** Sei  $Y$  zusammenhängend und sei  $f: Y \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig. Sind  $\tilde{f}, \hat{f}: Y \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Lifts von  $f$ , so gibt es ein eindeutiges  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $\tilde{f}(y) = \hat{f}(y) + k$  für alle  $y \in Y$ .

*Beweis.* Da  $\text{Exp}$  ein Gruppenmorphismus ist, gilt

$$\text{Exp}(\tilde{f}(y) - \hat{f}(y)) = \text{Exp}(\tilde{f}(y)) \cdot \text{Exp}(\hat{f}(y))^{-1} = f(y) \cdot f(y)^{-1} = 1$$

für alle  $y \in Y$ , also  $\tilde{f}(y) - \hat{f}(y) \in \text{Ker}(\text{Exp}) = \mathbb{Z}$ . Das Bild der zusammenhängenden Menge  $Y$  unter der stetigen Abbildung  $\tilde{f} - \hat{f}: Y \rightarrow \mathbb{R}$  ist also eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{Z}$  (Proposition 2.6.6) und somit von der Form  $\{k\}$  für ein eindeutiges  $k \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Lemma 3.2.8.** *Jede stetige Abbildung  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  besitzt einen Lift  $\tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  ist die Einschränkung von  $\text{Exp}$  offensichtlich ein Homöomorphismus

$$(3.2.1) \quad \text{Exp}_t: (t, t+1) \xrightarrow{\sim} U_t := \mathbb{S}^1 \setminus \{\text{Exp}(t)\}$$

(Analysis bzw. Aufgabe 2.7.22 oder Aufgabe 2.8.49).

Ist  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{S}^1$  eine stetige Abbildung, die nicht surjektiv ist, so gilt  $g([a, b]) \subset U_t$  für ein geeignetes  $t \in \mathbb{R}$ , und  $(\text{Exp}_t)^{-1} \circ g$  ist ein Lift von  $g$ .

Nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue 2.7.18, angewandt auf die offene Überdeckung  $[0, 1] = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} f^{-1}(U_t)$  (wir könnten auch die offene Überdeckung  $[0, 1] = f^{-1}(U_0) \cup f^{-1}(U_{\frac{1}{2}})$  verwenden), (oder gleichmäßiger Stetigkeit von  $f$ ) gibt es eine Unterteilung  $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1$  des Intervalls  $[0, 1]$ , so dass die Restriktion von  $f$  auf jedes Segment  $[a_{j-1}, a_j]$  nicht surjektiv ist, für  $j = 1, \dots, n$ . Also hat jedes  $f|_{[a_{j-1}, a_j]}$  einen Lift  $\tilde{f}_j$ .

Da  $\tilde{f}_1(a_1) - \tilde{f}_2(a_1) \in \text{Ker}(\text{Exp}) = \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl ist, können wir diese zum Lift  $\tilde{f}_2$  addieren und so ohne Einschränkung annehmen, dass  $\tilde{f}_1(a_1) = \tilde{f}_2(a_1)$  gilt. Iterieren wir dies, so gilt ohne Einschränkung  $\tilde{f}_j(a_j) = \tilde{f}_{j+1}(a_j)$  für alle  $j = 1, \dots, n-1$ . Nach Proposition 2.4.13.(b) „verkleben“ die Lifts  $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$  zu dem gesuchten Lift  $\tilde{f}$  von  $f$ .  $\square$

**Lemma 3.2.9.** *Jede stetige Abbildung  $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  besitzt einen Lift  $\tilde{f}: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.2.8 können wir das Quadrat  $[0, 1]^2$  in genügend kleine (quadratische oder rechteckige) Schachfelder  $[a_{j-1}, a_j] \times [b_{k-1}, b_k]$  zerlegen, so dass  $f$  auf jedem Schachfeld einen Lift hat. Wir wählen solche Lifts.

Wir betrachten nun zunächst eine fixierte Zeile des Schachbretts. Auf dem Schnitt je zweier benachbarter Felder dieser Zeile stimmen die beiden gewählten Lifts von  $f$  bis auf eine ganze Zahl überein (Lemma 3.2.7). Durch geeignetes Abändern unserer Lifts erhalten wir so einen Lift von  $f$  auf der gesamten Zeile.

Nun ist  $f$  auf jeder Zeile des Schachbretts geliftet, und das soeben beschriebene Verfahren zeigt, dass  $f$  einen globalen Lift hat.  $\square$

**3.2.10.** Analog hat jede stetige Abbildung  $[0, 1]^n \rightarrow \mathbb{S}^1$  einen Lift.

**Aufgabe 3.2.11.** Jede stetige Abbildung  $I \rightarrow \mathbb{S}^1$  hat einen Lift, wobei  $I$  ein beliebiges Intervall in  $\mathbb{R}$  ist.

Hinweis: Überdecke beispielsweise  $(0, 1]$  durch kompakte Teilmengen der Form  $[1/n, 1]$ , für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ .

**Definition 3.2.12.** Sei  $\alpha \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$  eine Schleife bei 1. Wir definieren die **Umlaufzahl**  $\text{Um}(\alpha)$  von  $\alpha$  durch

$$\text{Um}(\alpha) := \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0)$$

wobei  $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ein beliebiger Lift von  $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  ist (ein solcher Lift existiert nach Lemma 3.2.8, und die Umlaufzahl ist unabhängig von der Wahl des Lifts nach Lemma 3.2.7).<sup>36</sup>

<sup>36</sup>Statt Schleifen bei 1 könnten wir hier auch Schleifen bei einem beliebigen Punkt von  $\mathbb{S}^1$  betrachten.

**Lemma 3.2.13.** *Zwei Schleifen  $\alpha, \beta \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$  sind genau dann homotop mit fixierten Randpunkten, wenn sie dieselbe Umlaufzahl haben, in Formeln*

$$\alpha \cong \beta \iff \text{Um}(\alpha) = \text{Um}(\beta).$$

*Beweis.* Gelte  $\alpha \cong \beta$ . Sei  $h$  eine Homotopie von  $\alpha$  nach  $\beta$ . Nach Lemma 3.2.9 hat  $h$  einen Lift  $\tilde{h}: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann sind

- $\tilde{h}(-, 0)$  ein Lift von  $\alpha$ ,
- $\tilde{h}(-, 1)$  ein Lift von  $\beta$ ,
- $\tilde{h}(0, -)$  und  $\tilde{h}(1, -)$  Lifts des konstanten Wegs  $\varepsilon_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}$ , also konstant nach Lemma 3.2.7 (da der konstante Weg  $\varepsilon_0: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  ein Lift von  $\varepsilon_1$  ist).

Es folgt

$$\text{Um}(\alpha) = \tilde{h}(1, 0) - \tilde{h}(0, 0) = \tilde{h}(1, 1) - \tilde{h}(0, 1) = \text{Um}(\beta).$$

Gelte umgekehrt  $\text{Um}(\alpha) = \text{Um}(\beta)$ . Seien  $\tilde{\alpha}$  bzw.  $\tilde{\beta}$  Lifts von  $\alpha$  und  $\beta$ . Wegen  $\tilde{\alpha}(0) - \tilde{\beta}(0) \in \mathbb{Z}$  können wir ohne Einschränkung  $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$  annehmen. Dann gilt auch  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$  wegen der Gleichheit der Umlaufzahlen. Nach Beispiel 3.1.7 sind die Wege  $\tilde{\alpha}$  und  $\tilde{\beta}$  homotop. Dann sind auch  $\alpha = \text{Exp} \circ \tilde{\alpha}$  und  $\beta = \text{Exp} \circ \tilde{\beta}$  homotop (Beispiel 3.1.8).  $\square$

**Satz 3.2.14** (Fundamentalgruppe der Kreislinie). *Die wie folgt definierte Abbildung ist ein Isomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1), \\ n &\mapsto [t \mapsto \text{Exp}(tn)], \end{aligned}$$

von Gruppen. Ihr Inverses ist durch die Umlaufzahl  $[\alpha] \mapsto \text{Um}(\alpha)$  gegeben.

*Beweis.* Für  $n \in \mathbb{Z}$  betrachte die Schleife  $\omega_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto \text{Exp}(tn)$ . Diese Schleife hat trivialerweise  $\tilde{\omega}_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto tn$ , als Lift.

Seien  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Bezeichne  $(\tilde{\omega}_n + m)$  die Translation von  $\tilde{\omega}_n$  um  $m$ , also den Weg  $t \mapsto \tilde{\omega}_n(t) + m = nt + m$  von  $m$  nach  $n + m$ . Dann ist die Aneinanderhängung  $(\tilde{\omega}_n + m) * \tilde{\omega}_m$  definiert und ein Weg von  $0$  nach  $n + m$ . Da je zwei Wege in  $\mathbb{R}$  mit demselben Anfangs- und Endpunkt homotop sind (Beispiel 3.1.7), gilt  $\tilde{\omega}_{n+m} \cong (\tilde{\omega}_n + m) * \tilde{\omega}_m$ . Mit Beispiel 3.1.8 und 3.1.4 folgt

$$\omega_{n+m} = \text{Exp} \circ \tilde{\omega}_{n+m} \cong \text{Exp} \circ ((\tilde{\omega}_n + m) * \tilde{\omega}_m) = (\text{Exp} \circ (\tilde{\omega}_n + m)) * (\text{Exp} \circ \tilde{\omega}_m) = \omega_n * \omega_m.$$

Also induziert  $n \mapsto \omega_n$  einen Morphismus  $\omega: \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  von Gruppen.

Nach Lemma 3.2.13 induziert  $\text{Um}: \Omega(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  die zweite der beiden nachfolgenden Abbildungen und zeigt, dass sie injektiv ist.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\omega} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \xrightarrow{\text{Um}} \mathbb{Z}$$

Wegen  $\text{Um}(\omega_n) = \tilde{\omega}_n(1) - \tilde{\omega}_n(0) = n$  gilt  $\text{Um} \circ \omega = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ . Also sind  $\text{Um}$  und  $\omega$  bijektiv.  $\square$

**3.2.15.** Modifiziert man die Argumente dieses Abschnitts wie folgt, so erhält man den Isomorphismus

$$(3.2.2) \quad \begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1), \\ n &\mapsto [t \mapsto \text{Exp}(tn)], \end{aligned}$$

von Gruppen mit der Umlaufzahl als Inversem: Statt  $\text{Exp} = \text{Exp}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  samt induzierten Homöomorphismen (3.2.1) verwende man die komplexe Exponentialfunktion  $\text{Exp} := \text{Exp}_{\mathbb{C}} := \exp(2\pi i -): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^{\times} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , die für jedes  $t \in \mathbb{R}$  per Einschränkung einen Homöomorphismus

$$(3.2.3) \quad \text{Exp}_t: \{w \in \mathbb{C} \mid t < \text{Re}(w) < t + 1\} \xrightarrow{\sim} U_t := \mathbb{C}^{\times} \setminus (\mathbb{R}_{>0} \cdot \text{Exp}(t))$$

induziert.

Ausblicke: Die beiden Abbildungen  $\text{Exp}_{\mathbb{R}}$  und  $\text{Exp}_{\mathbb{C}}$  sind (universelle) Überlagerungen. Der Isomorphismus (3.2.2) folgt auch aus Satz 3.2.14 und der Tatsache, dass die Inklusion  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^{\times}$  eine Homotopieäquivalenz ist (Korollar 3.5.2, Lemma 3.5.4).

**Aufgabe 3.2.16.** Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(\text{GL}_n(\mathbb{R}), I_n)$  ist abelsch; hierbei ist  $I_n$  die Einheitsmatrix und  $n \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl.

Hinweis: Allgemeiner gilt: Sei  $M$  ein topologischer Monoid, also ein topologischer Raum  $M$  zusammen mit einer Monoidstruktur auf der Menge  $M$ , so dass die Monoidverknüpfung  $\cdot: M \times M \rightarrow M$ ,  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ , stetig ist. Dann ist  $\pi_1(M, e)$  abelsch, wobei  $e \in M$  das neutrale Element von  $M$  ist.

Bemerkung: Insbesondere ist  $\pi_1(G, e)$  für jede topologische Gruppe  $G$  abelsch, wobei  $e \in G$  das neutrale Element ist. Beispiele topologischer Gruppen sind Lie-Gruppen wie  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ , aber auch beliebige Untergruppen solcher Gruppen. Dies zeigt unabhängig von dem stärkeren Satz 3.2.14, dass  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  abelsch ist.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 3.1.13, Wege kürzen
- (2) Aufgabe 3.1.27, (lokal)sternförmige Teilmengen
- (3) Aufgabe 3.2.11, Lifts auf beliebigen Intervallen, oder Aufgabe 3.2.23,  $z \mapsto z^n$  auf  $\pi_1(\mathbb{C}^{\times}, 1)$ .
- (4) Aufgabe 3.2.16, Fundamentalgruppe von  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  ist abelsch.

**3.2.17.** Grundbegriffe der Kategorientheorie samt Beispielen sind in Abschnitt A erklärt (siehe etwa Beispiele A.1.5 für die Definition der Kategorien  $\text{Top}$ ,  $\text{Top}_*$ ,  $\text{Grp}$ ).

Ende der 8. Vorlesung am 02.05.2019 (bereits erklärt: Definition einer Kategorie + Beispiel  $\text{Top}$ ).

**Lemma 3.2.18** (Fundamentalgruppe als Funktor). *Das Bilden der Fundamentalgruppe gibt in offensichtlicher Weise Anlass zu einem Funktor*

$$\pi_1: \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp},$$

genannt **Fundamentalgruppenfunktor**, der explizit durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \pi_1 = (\pi_1)_{\text{Obj}}: \text{Obj}(\text{Top}_*) &\rightarrow \text{Obj}(\text{Grp}), \\ (X, x) &\mapsto \pi_1(X, x), \end{aligned}$$

auf Objektmengen und die Abbildungen

$$\begin{aligned} \pi_1 = (\pi_1)_{(X,x),(Y,y)}: \text{Top}_*((X, x), (Y, y)) &\rightarrow \text{Grp}(\pi_1(X, x), \pi_1(Y, y)), \\ f &\mapsto \left( \pi_1(f): [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha] \right), \end{aligned}$$

auf Morphismenmengen, für Objekte  $(X, x), (Y, y) \in \text{Top}_*$ , gegeben ist.

*Beweis.* Nach Beispiel 3.1.8 ist  $\pi_1(f)$  wohldefiniert als Abbildung  $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, y)$  von Mengen und nach 3.1.4 ein Morphismus von Gruppen. Offensichtlich gelten  $\pi_1(\text{id}_{(X,x)}) = \text{id}_{\pi_1(X,x)}$  und  $\pi_1(g) \circ \pi_1(f) = \pi_1(g \circ f)$  für beliebige Morphismen  $(X, x) \xrightarrow{f} (Y, y) \xrightarrow{g} (Z, z)$  in  $\text{Top}_*$ .  $\square$

**3.2.19** (Die Fundamentalgruppe hängt nur von der Wegzusammenhangskomponente ab). Sei  $(X, x) \in \text{Top}_*$  und sei  $W$  die Wegzusammenhangskomponente des Basispunkts  $x$ . Sei  $i: W \rightarrow X$  die zugehörige Inklusion. Dann ist  $i: (W, x) \rightarrow (X, x)$  ein Morphismus in  $\text{Top}_*$ . Das Bild dieses Morphismus unter dem Fundamentalgruppenfunktors  $\pi_1$  ist ein Isomorphismus

$$\pi_1(W, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x)$$

von Gruppen (vgl. 3.1.18).

**Beispiel 3.2.20.** Die Inklusion  $\iota: (\mathbb{S}^1, 1) \hookrightarrow (\mathbb{C}^\times, 1)$  induziert einen Morphismus

$$\pi_1(\iota): \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1).$$

Dieser ist ein Isomorphismus, wie man sofort aus den Isomorphismen in Satz 3.2.14 und 3.2.15 folgert.

**Beispiel 3.2.21** (Nichtexistenz komplexer Wurzelfunktionen). Sei  $q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto z^2$ , die Quadrierfunktion. Nehmen wir an, dass es eine stetige Wurzelfunktion gibt, also eine stetige Abbildung  $w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $q \circ w = \text{id}_{\mathbb{C}}$ . Dann gilt  $w(z) \neq 0$  für alle  $z \neq 0$ . Indem wir eventuell  $w$  durch  $-w$  ersetzen, können wir ohne Einschränkung  $w(1) = 1$  annehmen, was ohnehin eine sinnvolle Annahme ist. Somit erhalten wir induzierte Morphismen

$$(\mathbb{C}^\times, 1) \xrightarrow{w} (\mathbb{C}^\times, 1) \xrightarrow{q} (\mathbb{C}^\times, 1)$$

in  $\text{Top}_*$ , deren Verknüpfung die Identität ist. Wenden wir den Fundamentalgruppenfunktors an, so erhalten wir Morphismen

$$\pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \xrightarrow{\pi_1(w)} \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1) \xrightarrow{\pi_1(q)} \pi_1(\mathbb{C}^\times, 1)$$

in Grp, deren Verknüpfung die Identität ist. Insbesondere ist  $\pi_1(q)$  surjektiv. Nach Aufgabe 3.2.23 und Beispiel 3.2.20 gilt aber  $(\pi_1(q))(g) = g^2$  (in multiplikativer Schreibweise), was wegen  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  (siehe Satz 3.2.14) nicht surjektiv ist. Dieser Widerspruch zeigt die Nichtexistenz einer stetigen komplexen Wurzelfunktion. Wer Beispiel 3.2.20 vermeiden will, kann auch direkt mit  $\mathbb{S}^1$  argumentieren, denn  $w$  und  $q$  bilden  $\mathbb{S}^1$  in sich ab.

**Aufgabe 3.2.22.** Seien  $(X, x), (Y, y) \in \text{Top}_*$ . Dann ist die von den Projektionen  $X \xleftarrow{p} X \times Y \xrightarrow{q} Y$  induzierte Abbildung ein Isomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x, y)) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

von Gruppen.

**Aufgabe 3.2.23.** Für  $n \in \mathbb{Z}$  induziert die Abbildung  $p: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $z \mapsto z^n$ , auf der (abelschen) Fundamentalgruppe  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  die Abbildung  $g \mapsto g^n$  in multiplikativer bzw.  $g \mapsto ng$  in additiver Schreibweise. (Dasselbe gilt auch für  $\mathbb{C}^\times$  statt  $\mathbb{S}^1$ .)

**Definition 3.2.24.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Das **Fundamentalgruppoid**  $\Pi_1(X)$  von  $X$  ist als Kategorie durch

$$\begin{aligned} \text{Obj}(\Pi_1(X)) &:= X, \\ \Pi_1(X)(x, y) &:= \pi_1(X, x, y), \quad \text{für Objekte } x, y \in \text{Obj}(\Pi_1(X)), \end{aligned}$$

und mit Verknüpfung dem Aneinanderhängen Homotopieklassen von Wegen definiert; nach Lemma 3.1.12 definiert dies in der Tat eine Kategorie und genauer ein Gruppoid.

**3.2.25** (Fundamentalgruppe als Automorphismen im Fundamentalgruppoid). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Für jedes Objekt  $x \in \Pi_1(X)$  des Fundamentalgruppoids gilt dann

$$\text{Aut}_{\Pi_1(X)}(x) = \pi_1(X, x).$$

Proposition 3.1.19 wird so zu einem Spezialfall einer einfachen kategoriellen Aussage, die wir als Aufgabe 3.2.26 formulieren.

**Aufgabe 3.2.26.** Sei  $\gamma: x \rightarrow y$  ein Isomorphismus in einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Wir erinnern an die Notation  $\mathcal{C}(x) := \mathcal{C}(x, x)$  (Definition A.1.4). Dann definiert „Konjugation mit  $\gamma$ “ eine bijektive Abbildung

$$\gamma \circ ? \circ \gamma^{-1}: \mathcal{C}(x) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(y).$$

Im Spezialfall, dass  $\mathcal{C}$  das Fundamentalgruppoid  $\Pi_1(X)$  ist, beweist dies Proposition 3.1.19.

### 3.3. Anwendungen und Beispiele.

**Definition 3.3.1.** Sei  $A$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ . Eine **Retraktion von  $X$  auf  $A$**  ist eine stetige Abbildung  $r: X \rightarrow A$  mit  $r|_A = \text{id}_A$ . Man nennt dann auch  $A$  ein **Retrakt** von  $X$  oder sagt, dass  $X$  auf  $A$  **retrahiert**.

**Beispiel 3.3.2.** Die Abbildung  $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto \frac{z}{|z|}$ , ist eine Retraktion. Die Einschränkung dieser Abbildung auf jede Teilmenge von  $\mathbb{C}^\times$ , die  $\mathbb{S}^1$  enthält, ist ebenfalls eine Retraktion.

**3.3.3.** Retraktionen sind im Wesentlichen dasselbe wie idempotente stetige Selbstabbildungen (eine Selbstabbildung  $e$  einer Menge heißt idempotent, wenn  $e^2 = e$  gilt; idempotente lineare Abbildungen werden meist Projektionen genannt). Ist genauer  $A$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ , so sind die folgenden Zuordnungen invers zueinander:

$$\begin{aligned} \{\text{Retraktionen von } X \text{ auf } A\} &\Leftrightarrow \{\text{Idempotente stetige Selbstabbildungen von } X \text{ mit Bild } A\}, \\ (r: X \rightarrow A) &\mapsto (X \xrightarrow{r} A \hookrightarrow X), \\ (X \xrightarrow{e} e(X)) &\mapsto (e: X \rightarrow X). \end{aligned}$$

**Lemma 3.3.4.** Sei  $i: A \hookrightarrow X$  die Inklusion einer Teilmenge  $A$  eines topologischen Raums  $X$ . Gibt es eine Retraktion  $r: X \rightarrow A$ , so ist

$$\pi_1(i): \pi_1(A, a) \hookrightarrow \pi_1(X, a)$$

injektiv und

$$\pi_1(r): \pi_1(X, a) \twoheadrightarrow \pi_1(A, a)$$

ist surjektiv, für beliebiges  $a \in A$ .

**Ausblick 3.3.5.** Inklusionen von Deformationsretrakten, wie in Definition 3.5.3 definiert, liefern Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen (Lemma 3.5.4). Allgemeiner liefert jede Homotopieäquivalenz (Definition 3.4.10) einen Isomorphismus auf den Fundamentalgruppen (Korollar 3.5.2).

*Beweis.* Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (A, a) & \xrightarrow{i} & (X, a) \\ & \searrow \text{id} & \downarrow r \\ & & (A, a) \end{array}$$

in  $\text{Top}_*$  ist kommutativ. Anwenden des Fundamentalgruppenfunktors (Lemma 3.2.18) liefert das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, a) & \xrightarrow{\pi_1(i)} & \pi_1(X, a) \\ & \searrow \pi_1(\text{id})=\text{id} & \downarrow \pi_1(r) \\ & & \pi_1(A, a) \end{array}$$

in Grp. Also sind  $\pi_1(i)$  injektiv und  $\pi_1(r)$  surjektiv.  $\square$

**Satz 3.3.6.** *Es gibt keine Retraktion von der abgeschlossenen Kreisscheibe  $D^2$  auf ihren Rand  $S^1$ .*

*Beweis.* Falls es eine solche Retraktion gibt, liefert die Inklusion  $i: S^1 \rightarrow D^2$  nach Lemma 3.3.4 eine injektive Abbildung

$$\pi_1(S^1, 1) \hookrightarrow \pi_1(D^2, 1).$$

Das ist aber unmöglich, denn  $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$  nach Satz 3.2.14 und  $\pi_1(D^2, 1) \cong 1$  nach Beispiel 3.1.17.  $\square$

**Satz 3.3.7** (Brouwerscher Fixpunktsatz für die Kreisscheibe (siehe (englischsprachige) Wikipedia für Geschichtliches)). *Jede stetige Selbstabbildung  $f: D^2 \rightarrow D^2$  der abgeschlossenen Kreisscheibe hat einen Fixpunkt, es gibt also ein  $p \in D^2$  mit  $f(p) = p$ .*

**3.3.8.** Ein hübscher Beweis des Brouwerscher Fixpunktsatzes mit Hilfe von Sporners Lemma ist in [AZ18] erklärt; der dortige Beweis läßt sich offensichtlich auf beliebige Disks  $D^n$  verallgemeinern.

*Beweis.* Wir nehmen an, dass  $f$  keinen Fixpunkt hat. Definiere

$$r: D^2 \rightarrow S^1, \\ x \mapsto \left( \begin{array}{l} \text{der (eindeutige) Schnittpunkt von } S^1 \text{ mit dem} \\ \text{offenen Strahl } \{(1-t)f(x) + tx \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}, \text{ der} \\ \text{in } f(x) \text{ beginnt und durch } x \text{ geht} \end{array} \right).$$

Diese Abbildung ist stetig, wie der Leser unschwer nachweist (Aufgabe 3.3.9). Wegen  $r(x) = x$  für alle  $x \in S^1$  ist sie eine Retraktion von  $D^2$  auf  $S^1$ . Dies widerspricht Satz 3.3.6.  $\square$



**Aufgabe 3.3.9** (Die Retraktion  $r$  im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes 3.3.7 ist stetig). Für  $n \in \mathbb{N}$  ist die folgende Abbildung stetig:

$$s: \{(x, y) \in D^n \times D^n \mid x \neq y\} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1},$$

$$(x, y) \mapsto \left( \begin{array}{l} \text{der (eindeutige) Schnittpunkt von } \mathbb{S}^{n-1} \text{ mit} \\ \text{dem offenen Strahl } \{(1-t)y + tx \mid t \in \mathbb{R}_{>0}\}, \\ \text{der in } y \text{ beginnt und durch } x \text{ geht} \end{array} \right).$$

**Lösung 3.3.10.** Seien  $x, y \in D^n$  mit  $x \neq y$ . Betrachte  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma(t) = (1-t)y + tx = t(x-y) + y$ . Wir sind interessiert an den Nullstellen von

$$p(t) := \|\gamma(t)\|^2 - 1 = t^2 \cdot \|x-y\|^2 + 2t\langle x-y, y \rangle + \|y\|^2 - 1.$$

Dies ist ein quadratisches Polynom mit positivem Leitkoeffizient. Wegen  $p(0) = \|y\|^2 - 1 \leq 0$  und  $p(1) = \|x\|^2 - 1 \leq 0$  hat  $p$  zwei verschiedene reelle Nullstellen, nennen wir sie  $t_- \leq 0 < 1 \leq t_+$ . Nach der Lösungsformel für quadratische Polynome gilt

$$t_+ = t_+(x, y) = \frac{-2\langle x-y, y \rangle + 2\sqrt{\langle x-y, y \rangle^2 - \|x-y\|^2(\|y\|^2 - 1)}}{2\|x-y\|^2}.$$

Nach den bisherigen Erklärungen ist klar, dass die Diskriminante, also der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen, eine positive reelle Zahl ist (dies kann man auch direkt nachrechnen, verwende  $\langle u, v \rangle = \cos(\alpha)\|u\| \cdot \|v\|$ ).

Daraus folgt offensichtlich, dass  $(x, y) \mapsto s(x, y) = \gamma(t_+(x, y))$  stetig ist.

**Aufgabe 3.3.11.** Sei  $n \geq 2$  eine natürliche Zahl. Nimm an, dass es einen Funktor  $F: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  in die Kategorie der abelschen Gruppen mit  $F(D^n) \cong 0$  und  $F(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  gibt. (Einen solchen Funktor gibt es, zum Beispiel den  $(n-1)$ -ten Homologiefunktor  $H_{n-1}(-, \mathbb{Z})$ .) Dann hat jede stetige Selbstabbildung von  $D^n$  einen Fixpunkt. (Diese Aussage gilt natürlich auch für  $n = 0, 1$ .)

**Aufgabe 3.3.12** (Teilaussage des Satzes von Perron-Frobenius). Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine quadratische reelle Matrix mit positiven Einträgen  $a_{ij} > 0$ , wobei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Dann hat  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  einen positiven reellen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ , zu dem es einen Eigenvektor  $v \in (\mathbb{R}_{>0})^n$  mit positiven Einträgen gibt.

Hinweis: Betrachte den Simplex  $\Delta := \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^n \mid x_1 + \dots + x_n = 1\}$  und verwende (ohne Beweis) den Brouwerschen Fixpunktsatz, dass jede stetige Selbstabbildung von  $D^n$  einen Fixpunkt hat.

**Satz 3.3.13** (Satz vom Igel). *Es gibt keine stetige Selbstabbildung  $\kappa: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ , so dass  $\kappa(x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^2$  senkrecht auf  $x$  steht.*

**3.3.14.** Anschaulich bedeutet dies, dass es nicht möglich ist, einen Igel stetig zu kämmen (vgl. Einleitung, Abschnitt 1).

**Ausblick 3.3.15.** Mit Hilfe des Abbildungsgrades kann man leicht zeigen, dass es auf der  $n$ -Sphäre genau dann ein nirgends verschwindendes (Tangential-)Vektorfeld gibt, wenn  $n$  ungerade ist. Für ungerades  $n = 2k - 1$  ist ein nirgends verschwindendes Vektorfeld durch  $\mathbb{R}^{2k} \supset \mathbb{S}^n \ni (x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \mapsto (-x_2, x_1, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1})$  gegeben.

*Beweis.* Sei  $\kappa: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  stetig mit  $\kappa(x)$  senkrecht zu  $x$  für alle  $x \in \mathbb{S}^2$ . Bezeichne

$$\mathbb{S}_+^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 \geq 0\}$$

bzw.  $\mathbb{S}_-^2$  die nördliche bzw. südliche abgeschlossene Hemisphäre und  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}_+^2 \cap \mathbb{S}_-^2$  den Äquator. Für  $p \in \mathbb{S}_+^2$  bezeichne  $R_p^+ \in \text{SO}(3) \subset \text{GL}_3(\mathbb{R})$  die Rotation mit Rotationsachse in der Äquatorebene, die  $p$  auf den Nordpol  $e_3 = (0, 0, 1)$  dreht. Dann ist

$$f_+ : \mathbb{S}_+^2 \rightarrow \mathbb{S}^1, \\ p \mapsto R_p^+(\kappa(p)),$$

eine stetige Abbildung. Analog definieren wir  $f_- : \mathbb{S}_-^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ .

Wir fassen  $\mathbb{S}^1$  als Teilmenge von  $\mathbb{C}$  auf und behaupten

$$(3.3.1) \quad -f_+(p) \cdot f_-(p) = p^2 \quad \text{für alle } p \in \mathbb{S}^1.$$

Für  $p \in \mathbb{S}^1$  gilt sicherlich

$$f_+(p) = s_p(f_-(p)),$$

wobei  $s_p$  die Spiegelung der Äquatorebene (alias  $\mathbb{C}$ ) an der zu  $p$  senkrechten Geraden beschreibt. Für  $z \in \mathbb{S}^1$  gilt  $s_p(x) = -p^2 x^{-1}$  (denn  $s_1(x) = -x^{-1}$  ist klar und  $s_p$  ist die Verknüpfung  $x \xrightarrow{p^{-1}} p^{-1}x \mapsto s_1(p^{-1}x) = -(p^{-1}x)^{-1} = -px^{-1} \xrightarrow{p} -p^2x^{-1}$ ; alternativ: die Abbildung erhält sicherlich Winkel und erfüllt  $s_p(p) = -p$  und  $s_p(ip) = ip$ ). Daraus folgt (3.3.1).

Diese Gleichung kann als kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{(-)^2} & \mathbb{S}^1 \\ \Delta \downarrow & & \uparrow \mu \\ \mathbb{S}_+^2 \times \mathbb{S}_-^2 & \xrightarrow{f_+ \times f_-} & \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ccc} (\mathbb{S}^1, 1) & \xrightarrow{(-)^2} & (\mathbb{S}^1, 1) \\ \Delta \searrow & & \nearrow \mu \circ (f_+ \times f_-) \\ & (\mathbb{S}_+^2 \times \mathbb{S}_-^2, (e_1, e_1)) & \end{array}$$

in Top bzw.  $\text{Top}_*$  geschrieben werden, wobei  $\Delta(p) = (p, p)$  und  $\mu(u, v) = -uv$ . Nimmt man rechts Fundamentalgruppen (genauer: man wendet den Fundamentalgruppenfunktorktor an), so erhält man ein kommutatives Diagramm, dessen obere Horizontale unter der Identifikation  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  aus Satz 3.2.14 die Abbildung  $(2 \cdot) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  ist (Aufgabe 3.2.23). Die Fundamentalgruppe von  $\mathbb{S}_+^2 \times \mathbb{S}_-^2$  ist aber trivial, denn dieser Raum ist homöomorph zur konvexen Teilmenge  $D^2 \times D^2$  von  $\mathbb{R}^4$ . Die Abbildung  $(2 \cdot)$  faktorisiert aber nicht über die triviale Gruppe.  $\square$

**Aufgabe 3.3.16.** Die Abbildung  $D := R^+ : \mathbb{S}_+^2 \rightarrow \text{SO}(3)$ ,  $p \mapsto D_p = R_p^+$ , aus dem Beweis von Satz 3.3.13 ist stetig. (Sie ist sogar stetig auf  $\mathbb{S}^2 \setminus \{-e_3\}$ .)

Ende der 9. Vorlesung am 07.05.2019.

**Lösung 3.3.17.** Sei  $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^2$  mit  $p \neq \pm e_3$ , es ist also  $p$  weder Nord- noch Südpol,

es gilt also  $x^2 + y^2 \neq 0$ . Dann spannt  $d := \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  die Drehachse von  $D_p$

auf. Sei  $w := p \times d = \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ z^2 - 1 = -(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$  das Kreuzprodukt. Die drei Vektoren  $p, d, w$

bilden eine Orthogonalbasis, es gelten  $|p|^2 = 1$ ,  $|d|^2 = |w|^2 = x^2 + y^2$ . Wir behaupten

$$D_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2+y^2}(yd^t + xw^t) \\ \frac{1}{x^2+y^2}(-xd^t + yw^t) \\ p^t \end{pmatrix}$$

Die drei Zeilen stehen offensichtlich senkrecht aufeinander und haben jeweils Länge Eins. Die Matrix ist also in  $\mathcal{O}(3)$  und somit Determinante  $\pm 1$ . Die Matrix hängt stetig von  $p$  ab und hat für  $p = e_1$  Determinante Eins. Weil  $\mathbb{S}^2 \setminus \{\pm e_3\}$  zusammenhängend ist, gilt  $D_p \in \text{SO}(3)$

für alle  $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm e_3\}$ . Weiter gelten  $D_p(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $D_p(d) = d$  (und  $D_p(w) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ) wie

gefordert. Dies zeigt, dass  $D_\gamma: \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm e_3\} \rightarrow \text{SO}(3)$  stetig ist. Wir zeigen nun, dass der Limes für  $p \rightarrow e_3$  existiert. Die erste Zeile von  $D_p$  ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+y^2}(y^2 + x^2z, -xy + xyz, x(z^2 - 1)) &= \left( \frac{y^2 + x^2 + x^2(z-1)}{x^2+y^2}, \frac{xy(z-1)}{x^2+y^2}, \frac{x(z^2-1)}{x^2+y^2} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{x^2(z-1)}{1-z^2}, \frac{xy(z-1)}{1-z^2}, \frac{x(z^2-1)}{1-z^2} \right) \\ &= \left( 1 - \frac{x^2}{1+z}, \frac{-xy}{1+z}, -x \right). \end{aligned}$$

Dies geht für  $p \rightarrow e_3$  gegen  $e_1$ , denn  $z \rightarrow 1$  und  $x, y \rightarrow 0$ . Die zweite Zeile von  $D_p$  ist

$$\frac{1}{x^2+y^2}(-xy + xyz, x^2 + y^2z, y(z^2 - 1))$$

Vergleicht man ihre Einträge mit denen der ersten Zeile und verwendet, dass die Rollen von  $x$  und  $y$  symmetrisch sind, so sieht man, dass diese Zeile gegen  $e_2$  konvergiert. Es folgt also  $\lim_{p \rightarrow e_3} D_p = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ .

Man beachte, dass der Limes für  $p \rightarrow -e_3$  nicht existiert: Nähert sich  $p$  auf verschiedenen Längenkreise dem Südpol, so ergeben sich im Limes Drehungen um  $180^\circ$  um verschiedene Achsen durch den Äquator.

### 3.4. Homotopien zwischen stetigen Abbildungen.

**Definition 3.4.1.** Stetige Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  heißen **homotop**, geschrieben  $f \cong g$ , falls es eine stetige Abbildung

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

mit  $H(-, 0) = f$  und  $H(-, 1) = g$  gibt. Eine solche Abbildung heißt **Homotopie** von  $f$  nach  $g$  und wird als  $H: f \cong g$  notiert.

Ist zusätzlich eine Teilmenge  $A \subset X$  gegeben, so sagt man, dass  $f$  und  $g$  **homotop relativ zu  $A$**  sind, falls es eine Homotopie  $H$  wie oben mit  $H(a, t) = f(a) = g(a)$  für alle  $a \in A$  und  $t \in [0, 1]$  gibt. Eine solche Homotopie heißt **Homotopie relativ zu  $A$** . Wir schreiben  $H: f \cong_A g$  und  $f \cong_A g$ .

**3.4.2.** Für  $H: f \cong g$  bilden die Abbildungen  $H(-, t): X \rightarrow Y$  eine „stetige“, durch  $t \in [0, 1]$  indizierte Familie stetiger Abbildungen, die zwischen  $f = H(-, 0)$  und  $g = H(-, 1)$  interpoliert. Ich stelle mir  $X \times [0, 1]$  als eine „Dose“ mit vertikaler „Zeitachse“  $[0, 1]$  und horizontalem

$X$  vor. Boden und Deckel der Dose sind  $X \times \{0\}$  und  $X \times \{1\}$ . Die Einschränkungen von  $H$  auf die horizontalen Schnitte  $X \times \{t\}$  der Dose bilden die Familie  $(H(-, t))_{t \in [0,1]}$ .

**3.4.3.** Der zuvor für Wege  $[0, 1] \rightarrow X$  eingeführte Homotopiebegriff *mit festen Randpunkten* ist also der nun definierte Homotopiebegriff *relativ zu der Teilmenge  $\{0, 1\}$* .

**3.4.4.** Wir beschäftigen uns nun mit dem „absoluten“ Homotopiebegriff.

**Lemma 3.4.5.** (a) Gegeben topologische Räume  $X$  und  $Y$  ist die Homotopierelation  $\cong$  auf  $\text{Top}(X, Y)$  eine Äquivalenzrelation.

(b) Sind  $W \xrightarrow{e} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$  stetige Abbildungen mit  $f \cong g$ , so folgt  $f \circ e \cong g \circ e$  und  $h \circ f \cong h \circ g$  (oder kurz  $h \circ f \circ e \cong h \circ g \circ e$ ).

*Beweis.* (a) Symmetrie und Reflexivität sind offensichtlich. Sind  $H: f \cong g$  und  $I: g \cong h$  Homotopien zwischen Abbildungen  $f, g, h: X \rightarrow Y$ , so ist

$$J(x, t) := \begin{cases} H(x, 2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ I(x, 2t - 1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ .

(b) Ist  $H: f \cong g$  eine Homotopie, so ist die Verknüpfung

$$W \times [0, 1] \xrightarrow{e \times \text{id}} X \times [0, 1] \xrightarrow{H} Y \xrightarrow{h} Z$$

eine Homotopie von  $h \circ f \circ e$  nach  $h \circ g \circ e$ . Die beiden anderen Aussagen sind Spezialfälle für  $h = \text{id}_Y$  oder  $e = \text{id}_X$ .  $\square$

**Notation 3.4.6.** Die Äquivalenzklasse einer stetigen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  bezüglich der Homotopierelation  $\cong$  wird als **Homotopieklasse** von  $f$  bezeichnet und als  $[f]$  notiert.

**3.4.7.** Ist  $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so hat  $[\alpha]$  nunmehr zwei Bedeutungen: Entweder bezeichnet es die Homotopieklasse mit festen Randpunkten, wenn man  $\alpha$  als Weg von  $\alpha(0)$  nach  $\alpha(1)$  auffaßt, oder die Homotopieklasse „mit freien Randpunkten“; letztere ist langweilig, denn mit freien Randpunkten ist  $\alpha$  zu der konstanten Abbildung  $t \mapsto \alpha(0)$  homotop (und auch zu jeder konstanten Abbildung  $t \mapsto x$  für  $x$  in derselben Wegzusammenhangskomponente von  $X$  wie  $\alpha(0)$ ). Für *Wege* ist deshalb eigentlich immer die erste Bedeutung gemeint sein.

**Definition 3.4.8.** Die **Homotopiekategorie topologischer Räume** ist definiert als die Kategorie  $\text{hTop}$ , deren Objekte die topologischen Räume sind, deren Morphismenmengen durch

$$\text{hTop}(X, Y) := \text{Top}(X, Y) / \cong$$

definiert sind, für je zwei Objekte  $X, Y \in \text{Obj}(\text{hTop}) = \text{Obj}(\text{Top})$ , und deren Verknüpfung durch

$$\begin{aligned} \circ: \text{hTop}(Y, Z) \times \text{hTop}(X, Y) &\rightarrow \text{hTop}(X, Z), \\ ([g], [f]) &\mapsto [g \circ f], \end{aligned}$$

für je drei Objekte  $X, Y, Z \in \text{Obj}(\text{hTop})$ , definiert ist. Nach Lemma 3.4.5 ist die Verknüpfung wohldefiniert und das so definierte Datum ist eine Kategorie.

**3.4.9.** Die Identität auf Objektmengen und die Zuordnung  $f \mapsto [f]$  auf Morphismenmengen definieren einen Funktor

$$\text{Top} \rightarrow \text{hTop}.$$

**Definition 3.4.10.** Ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  in  $\text{Top}$  alias eine stetige Abbildung heißt **Homotopieäquivalenz**, falls  $[f]: X \rightarrow Y$  in  $\text{hTop}$  ein Isomorphismus ist; äquivalent bedeutet das, dass es eine stetige Abbildung  $g: Y \rightarrow X$  gibt, so dass  $g \circ f \cong \text{id}_X$  und  $f \circ g \cong \text{id}_Y$  gilt.<sup>37</sup> Zwei topologische Räume heißen **homotopieäquivalent** (oder auch **vom gleichen Homotopietyp**), wenn sie isomorph in  $\text{hTop}$  sind<sup>38</sup>, wenn es also eine Homotopieäquivalenz von einem in den anderen gibt. Ein topologischer Raum heißt **zusammenziehbar**, wenn er homotopieäquivalent zu einem einpunktigen topologischen Raum ist. Ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  in  $\text{Top}$  heißt **nullhomotop**, wenn er homotop zu einer einwertigen Abbildung  $X \rightarrow Y$  ist, wenn also  $X$  nicht leer ist und es ein  $y_0 \in Y$  gibt, so dass  $f$  zur konstanten Abbildung  $X \rightarrow Y, x \mapsto y_0$ , homotop ist.

**3.4.11.** Für einen topologischen Raum  $X$  sind äquivalent:

- $X$  ist zusammenziehbar;
- es gibt einen Punkt  $x_0 \in X$ , so dass  $\text{id}_X$  zur konstanten Abbildung  $X \rightarrow X, x \mapsto x_0$ , homotop ist;
- $\text{id}_X$  ist nullhomotop.

**3.4.12.** Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist genau dann nullhomotop, wenn sie über einen zusammenziehbaren Raum faktorisiert und  $X \neq \emptyset$  gilt: Wir zeigen zuerst die Implikation  $\Rightarrow$ . Sei  $f$  nullhomotop. Sei  $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  zu einer konstanten Abbildung  $c: X \rightarrow Y, x \mapsto y_0$ , für ein geeignetes  $y_0 \in Y$ . Betrachte auf  $X \times [0, 1]$  die Äquivalenzrelation  $\sim$ , für die  $X \times \{1\}$  eine Äquivalenzklasse ist und alle anderen Äquivalenzklassen aus genau einem Element bestehen. Sei  $C := X / \sim$  die Menge der Äquivalenzklassen mit der Quotiententopologie. (Stellt man sich  $X \times [0, 1]$  als Dose mit  $X$  als Grundfläche vor, so erhält man  $C$  als Kegel über dieser Grundfläche, indem man die Oberseite der Dose zu einem Punkt zusammendrückt; der Buchstabe  $C$  steht für englisch *cone*). Dann gibt es genau eine stetige Abbildung  $H': C \rightarrow Y$ , so dass  $H$  die Komposition  $X \times [0, 1] \rightarrow C \xrightarrow{H'} Y$  ist. Schalten wir davor die Abbildung  $X \rightarrow X \times [0, 1], x \mapsto (x, 0)$ , so erhalten wir als Verknüpfung unsere Abbildung  $f$ . Also faktorisiert  $f$  über den Raum  $C$ . Dieser ist zusammenziehbar, was anschaulich hoffentlich klar ist (man läßt alle Punkte zur Kegelspitze wandern – der formale Beweis ist dem Leser überlassen).

Nun zeigen wir die Implikation  $\Leftarrow$ . Sei  $f: X \xrightarrow{b} Z \xrightarrow{a} Y$  eine Faktorisierung von  $f$  mit  $Z$  zusammenziehbar. Seien  $\zeta: Z \rightleftharpoons \{\text{pt}\}: \xi$  stetige Abbildungen mit  $\xi \circ \zeta \cong \text{id}_Z$  (und trivialerweise  $\zeta \circ \xi = \text{id}$ ). Wegen  $f = a \circ b = a \circ \text{id}_Z \circ b \cong a \circ \xi \circ \zeta \circ b$  ist  $f$  zu einer konstanten Abbildung homotop. Falls zusätzlich  $X \neq \emptyset$  gilt, ist diese einwertig.

**Beispiel 3.4.13.** Der Morphismus  $i: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  in  $\text{Top}$  ist kein Isomorphismus, aber eine Homotopieäquivalenz, denn er wird ein Isomorphismus  $[i]: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  in  $\text{hTop}$ . Gib das Inverse von  $[i]$  an.

<sup>37</sup>Dann ist  $g$  ebenfalls eine Homotopieäquivalenz. Außerdem ist  $g$  eindeutig bis auf (uneindeutige) Homotopie (damit meinen wir, dass jedes andere  $g'$  mit analogen Eigenschaften homotop zu  $g$  ist), denn  $[g] = [f]^{-1}$  in  $\text{hTop}$ .

<sup>38</sup>Daraus folgt sofort, dass Homotopieäquivalent-Sein eine Äquivalenzrelation auf der Menge der topologischen Räume definiert.

**Beispiele 3.4.14.** Eventuell einige der Beispiele 3.5.6 bereits hier.

**Satz 3.4.15** (Selbstabbildungen der Kreislinie bis auf Homotopie). *Die folgende Abbildung ist eine Bijektion von Mengen*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \text{hTop}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1), \\ n &\mapsto [z \mapsto z^n], \end{aligned}$$

und genauer ein Isomorphismus  $(\mathbb{Z}, \cdot) \xrightarrow{\sim} (\text{hTop}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1), \circ)$  von Monoiden.<sup>39</sup> Der **Abbildungsgrad**  $\text{grad}(f)$  einer stetigen Selbstabbildung  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  ist definiert als das Urbild von  $[f]$  unter dieser Bijektion (das Rezept zur Berechnung ist im Beweis erklärt).

*Beweis.* Wegen  $(z \mapsto z^n) \circ (z \mapsto z^m) = (z \mapsto z^{mn})$  ist die angegebene Abbildung ein Morphismus von Monoiden.

Sei  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig. Nach Lemma 3.2.8 gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{f}$ , so dass das Diagramm

$$(3.4.1) \quad \begin{array}{ccc} [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \downarrow \text{Exp} & & \downarrow \text{Exp} \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

in Top kommutiert. Dabei ist  $\tilde{f}$  nach Lemma 3.2.7 eindeutig bis auf Addition einer ganzen Zahl, weshalb

$$\text{grad}(f) := \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) \in \mathbb{Z}$$

nur von  $f$  abhängt und eine ganze Zahl ist, weil Exp die beiden Zahlen  $\tilde{f}(1)$  und  $\tilde{f}(0)$  auf dieselbe Zahl  $f(\text{Exp}(1)) = f(1) = f(\text{Exp}(0))$  abbildet.

Ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.2.13 zeigt man (Aufgabe 3.4.16), dass zwei stetige Abbildungen  $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  genau dann homotop sind, wenn  $\text{grad}(f) = \text{grad}(g)$  gilt. Dies beendet den Beweis, denn offensichtlich gilt  $\text{grad}(z \mapsto z^n) = n$ .  $\square$

**Aufgabe 3.4.16.** Vervollständige den Beweis von Satz 3.4.15.

Hinweis: Für die technischen Details verwende Lemma 2.8.64 und Satz 2.7.15.

**Lösung 3.4.17.** (Schwierigere Implikation) Gelte  $\text{grad}(f) = \text{grad}(g)$ . Wir zeigen, dass  $f$  und  $g$  homotop sind. Seien  $\tilde{f}, \tilde{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  Lifts von  $f \circ \text{Exp}$  und  $g \circ \text{Exp}$  (vgl. Diagramm (3.4.1)). Dann ist

$$\begin{aligned} H: [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (t, \tau) &\mapsto (1 - \tau)\tilde{f}(t) + \tau\tilde{g}(t), \end{aligned}$$

<sup>39</sup>Man beachte, dass 1 das neutrale Element des Monoids  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  ist!

eine Homotopie von  $\tilde{f}$  nach  $\tilde{g}$ . Weil  $\text{grad}(f) = \text{grad}(g)$  gilt und dies eine ganze Zahl ist, erhalten wir für beliebiges  $\tau \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{Exp}(H(1, \tau) - H(0, \tau)) &= \text{Exp}((1 - \tau)\tilde{f}(1) + \tau\tilde{g}(1) - (1 - \tau)\tilde{f}(0) - \tau\tilde{g}(0)) \\ &= \text{Exp}((1 - \tau)\text{grad}(f) + \tau\text{grad}(g)) \\ &= \text{Exp}(\text{grad}(f)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Da  $\text{Exp}$  ein Gruppenhomomorphismus ist, folgt  $\text{Exp}(H(1, \tau)) = \text{Exp}(H(0, \tau))$  für alle  $\tau \in [0, 1]$ . Wir folgern, dass es genau eine Abbildung  $H': \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  von Mengen gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & \mathbb{R} \\ \downarrow \text{Exp} \times \text{id} & & \downarrow \text{Exp} \\ \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & \xrightarrow{H'} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

kommutiert. Die linke vertikale Abbildung  $\text{Exp} \times \text{id}$  geht von einem quasi-kompakten Raum in einen Hausdorffraum und ist somit nach Satz 2.7.15 abgeschlossen. Sie ist stetig und surjektiv, so dass  $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  nach Lemma 2.8.64 die Finaltopologie bezüglich dieser Abbildung trägt. Weil  $H' \circ (\text{Exp} \times \text{id}) = \text{Exp} \circ H$  stetig ist, ist  $H'$  stetig. Es bleibt zu zeigen, dass  $H'$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$  ist. Wegen

$$\begin{aligned} H'(-, 0) \circ \text{Exp} &= (H' \circ (\text{Exp} \times \text{id}))(-, 0) = (\text{Exp} \circ H)(-, 0) \\ &= \text{Exp}(H(-, 0)) = \text{Exp} \circ \tilde{f} = f \circ \text{Exp} \end{aligned}$$

und Surjektivität von  $\text{Exp}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$  gilt  $H'(-, 0) = f$ . Analog zeigt man  $H'(-, 1) = g$ .

**Korollar 3.4.18.** *Die folgende Abbildung ist ein Isomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} \text{hTop}(\mathbb{C}^\times, \mathbb{C}^\times), \\ n &\mapsto [z \mapsto z^n], \end{aligned}$$

von Monoiden.

**3.4.19.** Sei  $i: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  die Inklusion. Sie ist eine Homotopieäquivalenz, wird also ein Isomorphismus  $[i]: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  in  $\text{hTop}$ . Da in einer beliebigen Kategorie Prä- bzw. Postkomposition mit einem Isomorphismus eine Bijektion auf Morphismenräumen liefert, sind im folgenden Diagramm die obere Horizontale und die rechte Vertikale Bijektionen.

$$\begin{array}{ccc} \text{hTop}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1) & \xrightarrow{[i] \circ ?} & \text{hTop}(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^\times) \\ \uparrow n \mapsto [z \mapsto z^n] & & \uparrow ? \circ [i] \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{n \mapsto [z \mapsto z^n]} & \text{hTop}(\mathbb{C}^\times, \mathbb{C}^\times) \end{array}$$

Die linke Vertikale ist nach Satz 3.4.15 bijektiv. Da das Diagramm offensichtlich kommutativ ist, ist auch die untere Horizontale bijektiv und genauer ein Isomorphismus von Monoiden.

**Aufgabe 3.4.20.** Sei  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig. Dann enthält  $f^{-1}(z)$  für alle  $z \in \mathbb{S}^1$  mindestens  $|\text{grad}(f)|$  Elemente. Insbesondere folgt aus  $\text{grad}(f) \neq 0$ , dass  $f$  surjektiv ist.

**Satz 3.4.21** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexen Koeffizienten hat eine komplexe Nullstelle.*

*Beweis.* Sei  $p = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$  ein normiertes Polynom vom Grad  $n \geq 1$ . Es genügt zu zeigen, dass  $p$  eine komplexe Nullstelle hat.

**Schritt 1:** Die beiden Abbildungen  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $q := (-)^n: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ , sind homotop vermöge der Homotopie

$$P: \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \\ (z, t) \mapsto P(z, t) = z^n + t(a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0).$$

Sei  $R := 1 + \max(|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|, 1)$  und setze  $\mathbb{S}_R^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ . Für beliebiges  $z \in \mathbb{S}_R^1$  gilt dann

$$|z^n| = R \cdot |z|^{n-1} > (|a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|) \cdot |z|^{n-1} \geq |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + \dots + |a_1| \cdot |z| + |a_0| \\ \geq |a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0|$$

Die Einschränkung von  $P$  auf  $\mathbb{S}_R^1 \times [0, 1]$  hat somit keine Nullstelle, landet also in  $\mathbb{C}^\times$  und definiert eine Homotopie zwischen den beiden Abbildungen

$$p, q: \mathbb{S}_R^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

**Schritt 2:** Für  $w \in \mathbb{Z}$  sei  $c_w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto w$ , die konstante Abbildung. Die beiden Abbildungen  $p, c_{p(0)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sind homotop mittels der Homotopie  $\mathbb{C} \times [0, 1] \ni (z, t) \mapsto p(tz) \in \mathbb{C}$  (diese Homotopie kommt offensichtlich daher, dass  $\{0\}$  ein Deformationsretrakt (siehe Definition 3.5.3) von  $\mathbb{C}$  via  $(z, t) \mapsto tz$  ist). Wir nehmen nun an, dass  $p$  keine komplexe Nullstelle hat. Dann landet unsere Homotopie in  $\mathbb{C}^\times$ , und die beiden Abbildungen  $p, c_{p(0)}: \mathbb{S}_R^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  sind homotop.

**Schritt 3:** Nach den beiden vorigen Schritten und Wegzusammenhang von  $\mathbb{C}^\times$  gilt  $[q] = [c_{p(0)}] = [c_1]: \mathbb{S}_R^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$  in  $\text{hTop}$ . Nach Korollar 3.4.18 gilt  $[q] = [z \mapsto z^n] \neq [z \mapsto 1] = [c_1]$  als Morphismen  $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  in  $\text{hTop}$ . Diese Ungleichheit bleibt erhalten, wenn wir den Isomorphismus  $\mathbb{S}_R^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  in  $\text{hTop}$  davorschalten. Dies widerspricht der obigen Gleichheit und zeigt, dass  $p$  eine komplexe Nullstelle hat.  $\square$

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 3.2.22, Fundamentalgruppe Produkt
- (2) Falls der erste Buchstabe Deines Nachnamens ungerade Position im Alphabet hat
  - Aufgabe 3.3.9, Retraktion in BFPS stetig,
  - sonst Aufgabe 3.3.16, Drehung in Igelsatz stetig
- (3) Aufgabe 3.4.20, Kardinalität der Faser  $\geq$  Abbildungsgrad
- (4) Aufgabe 3.4.16, Beweis  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \text{hTop}(\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1)$  vervollständigen

Ende der 10. Vorlesung am 09.05.2019.

**Definition 3.4.22.** (ad hoc Terminologie) Wir nennen eine Abbildung  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  **symmetrisch** bzw. **schiefsymmetrisch**, falls  $f(-x) = f(x)$  bzw.  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^n$  gilt. Wir verwenden dieselbe Terminologie für Abbildungen, die in einer geeigneten Teilmenge von  $\mathbb{R}^m$  landen.

**3.4.23.** Die Abbildung  $(-)^n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  ist genau dann symmetrisch bzw. schiefsymmetrisch, wenn  $n$  gerade bzw. ungerade ist.



**Satz 3.4.24.** *Jede stetige, schiefsymmetrischer Selbstabbildung der Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  hat ungeraden Abbildungsgrad und ist insbesondere surjektiv.*

*Beweis.* Sei  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  stetig mit  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^1$ . Nach Aufgabe 3.2.11 – einer leichten Folgerung aus Lemma 3.2.8 – gibt es eine stetige Abbildung  $\tilde{f}$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{R} \\ \downarrow \text{Exp} & & \downarrow \text{Exp} \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

in Top kommutiert. Nach dem Beweis von Satz 3.4.15 ist klar, dass für den Abbildungsgrad  $\text{grad}(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$  gilt. Für beliebiges  $t \in \mathbb{R}$  gilt wegen der Schiefsymmetrie von  $f$

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\tilde{f}(t)) &= f(\text{Exp}(t)) = -f(-\text{Exp}(t)) \\ &= -f(\text{Exp}(t + \frac{1}{2})) = -\text{Exp}(\tilde{f}(t + \frac{1}{2})) = \text{Exp}(\tilde{f}(t + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.2.7 gibt es ein  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $\tilde{f}(t) = \tilde{f}(t + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + k$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , so dass insbesondere  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + k = \tilde{f}(1) + 1 + 2k$  gilt. Also ist der Abbildungsgrad  $\text{grad}(f) \in 1 + 2\mathbb{Z}$  ungerade. Insbesondere ist  $f$  surjektiv nach Aufgabe 3.4.20.  $\square$

**Satz 3.4.25** (Satz von Borsuk-Ulam). *Jede stetige, schiefsymmetrische Abbildung  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  hat eine Nullstelle.*

**Ausblick 3.4.26.** Allgemeiner hat jede stetige, schiefsymmetrische Abbildung  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Nullstelle, für  $n \in \mathbb{N}$ . Der Leser mag sich die Fälle  $n = 0, 1$  überlegen.

*Beweis.* Sei  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  stetig und schiefsymmetrisch. Wir nehmen an, dass  $f$  keine Nullstelle hat. Dann ist die Abbildung  $g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $g(x) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ , ebenfalls stetig und schiefsymmetrisch. Ihre Einschränkung  $g|$  auf den Äquator  $\mathbb{S}^1$  hat nach Satz 3.4.24 ungeraden Abbildungsgrad, ist also nach Satz 3.4.15 nicht zur konstanten Abbildung  $z \mapsto 1$  homotop. Andererseits faktorisiert  $g|$  sicherlich als

$$g|: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}_+^2 \xrightarrow{g} \mathbb{S}^1,$$

wobei  $\mathbb{S}_+^2$  die abgeschlossene nördliche Hemispäre ist.

Anschaulich ist klar, dass  $g|$  homotop zu einer konstanten Abbildung ist: Man läßt den Äquator entlang der Breitenkreise auf den Nordpol schrumpfen und betrachtet  $g$  währenddessen auf den entsprechenden Breitenkreisen.

Formal argumentiert man beispielsweise so: Da  $\mathbb{S}_+^2$  zusammenziehbar ist, ist  $g|$  nullhomotop (siehe 3.4.12), also homotop zu einer konstanten Abbildung und dann auch zu  $z \mapsto 1$ . Widerspruch.  $\square$

**Korollar 3.4.27** (Plattdrücken einer Kugelschale ist nie injektiv). *Sei  $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine stetige Abbildung von der Kugelschale in die Ebene. Dann gibt es ein  $x \in \mathbb{S}^2$  mit  $f(x) = f(-x)$ . (Die beiden Antipodenpunkte  $x, -x$  haben also dasselbe Bild unter  $f$ .)*

*Insbesondere ist  $f$  nicht injektiv, und erst recht ist die 2-Späre  $\mathbb{S}^2$  zu keiner Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$  homöomorph.*

**Ausblick 3.4.28.** Allgemeiner gibt es für jede stetige  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  einen Punkt  $x \in \mathbb{S}^n$  mit  $f(x) = f(-x)$ . Die offensichtliche Projektion  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  hat die Eigenschaft, dass es genau einen solchen Punkt gibt.

**3.4.29.** Ist die Erde eine Kugelschale und sind Temperatur und Luftdruck stetig, so gibt es also einen Punkt auf der Erde, an dem dieselbe Temperatur und derselbe Luftdruck wie an seinem Antipodenpunkt herrschen.

*Beweis.* Betrachte die stetige „Schiefsymmetrisierung“  $g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto g(x) := f(x) - f(-x)$ , von  $f$ , die in der Tat schiefsymmetrisch ist. Nach dem Satz von Borsuk-Ulam 3.4.25 hat  $g$  eine Nullstelle  $x_0$ . Dann gilt  $f(x_0) = f(-x_0)$ .  $\square$

**3.4.30.** Umgekehrt folgert man den Satz von Borsuk-Ulam 3.4.25 sofort aus Korollar 3.4.27.

**Korollar 3.4.31** (Satz vom Butterbrot mit Schinken (*Ham sandwich theorem*)<sup>40</sup>). *Seien drei kompakte Teilmengen  $A, B, C$  des  $\mathbb{R}^3$  gegeben. Dann gibt es eine Ebene, die jede dieser drei Teilmengen in zwei volumengleiche Teile teilt.*

**Ausblick 3.4.32.** Dieser Satz gilt analog für  $n$  kompakte Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$ . Im zweidimensionalen heißt dieser Satz manchmal *pancake theorem* und kann mit dem *rotating-knife argument* bewiesen werden (siehe Wikipedia).

*Beweis.* Sei  $A \subset \mathbb{R}^3$  eine kompakte Teilmenge. Für  $x \in \mathbb{S}^2$  betrachte den Halbraum  $E_x := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \leq 0\}$  aller Vektoren, deren (Standard-)Skalarprodukt mit  $x$  nicht positiv ist. Für  $t \in \mathbb{R}$  sei  $\mu_x(t)$  das (übliche Lebesgue-)Volumen von  $A \cap (tx + E_x)$ . Die Funktion  $t \mapsto \mu_x(t)$  ist stetig (klar nach Maßtheorie), monoton wachsend und nimmt für genügend kleines bzw. großes  $t$  den Wert Null bzw.  $\text{vol}(A) \geq 0$  an. Die abgeschlossene Teilmenge  $\mu_x^{-1}(\frac{1}{2} \text{vol}(A)) = \{t \in \mathbb{R} \mid \mu_x(t) = \frac{1}{2} \text{vol}(A)\}$  von  $\mathbb{R}$  ist nach dem Zwischenwertsatz nicht leer. Im Fall  $\text{vol}(A) > 0$  ist sie beschränkt und somit offensichtlich ein abgeschlossenes Intervall; sei  $\alpha(x)$  der Mittelpunkt dieses Intervalls. Im Fall  $\text{vol}(A) = 0$  setze  $\alpha(x) = 0$ .

Die so definierte Funktion  $\alpha: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig (dies ist anschaulich klar; der formale Beweis ist dem Leser überlassen (da  $A$  in einem abgeschlossenen Ball  $\overline{B}_R(0)$  für genügend großes  $R$  enthalten ist, kann man die Veränderung von  $\mu_x(t)$  für kleine Änderungen von  $x$  und  $t$  kontrollieren)). Außerdem ist sie offensichtlich schiefsymmetrisch. Die zu  $x$  senkrechte Ebene durch  $\alpha(x)x$  teilt  $A$  nach Konstruktion in zwei volumengleiche Teile.

Sind nun zwei weitere kompakte Teilmengen  $B, C$  von  $\mathbb{R}^3$  gegeben, so definieren wir schiefsymmetrische stetige Abbildungen  $\beta, \gamma: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  nach demselben Rezept. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ x &\mapsto (\alpha(x) - \beta(x), \beta(x) - \gamma(x)), \end{aligned}$$

ist stetig und schiefsymmetrisch. Nach dem Satz von Borsuk-Ulam 3.4.25 hat sie eine Nullstelle  $x \in \mathbb{S}^2$ . Die zu  $x$  senkrechte Ebene durch  $\alpha(x)x = \beta(x)x = \gamma(x)x$  teilt dann jede der drei Teilmengen  $A, B, C$  in zwei volumengleiche Teile.  $\square$

**Korollar 3.4.33** (Lusternik-Schnirelmann 1930). *Ist die Kugelschale  $\mathbb{S}^2$  durch drei abgeschlossene Teilmengen  $A_1, A_2, A_3$  überdeckt, so enthält eine dieser Teilmengen zwei einander gegenüberliegende Punkte, es gibt also einen Punkt  $p \in \mathbb{S}^2$  und ein  $i \in \{1, 2, 3\}$  mit  $p, -p \in A_i$ .*

<sup>40</sup>... oder für die Vegetarier: Baguette mit Tomate und Mozzarella; dieser Name ist eh viel besser, denn die drei Bestandteile sind deutlich sichtbar.

*Beweis.* Ist  $A$  eine abgeschlossene nichtleere Teilmenge von  $\mathbb{S}^2$ , so ist die Abstandsfunktion  $\rho(-, A): \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \inf_{a \in A} \|x - a\|$ , stetig (Aufgabe 2.2.6). Weil  $A$  abgeschlossen ist, ist  $x \in A$  für  $x \in \mathbb{S}^2$  zu  $\rho(x, A) = 0$  äquivalent.

Maximal zwei der drei Mengen  $A_1, A_2, A_3$  können leer sein, und sind zwei davon leer, so ist die Aussage trivial. Sonst seien ohne Einschränkung  $A_1$  und  $A_2$  nicht leer. Betrachte die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ x &\mapsto (\rho(x, A_1), \rho(x, A_2)). \end{aligned}$$

Nach Korollar 3.4.27 – Plattdrücken einer Kugelschale –, nimmt diese Abbildung an einem Punkt  $p \in \mathbb{S}^2$  und ihrem Antipodenpunkt  $-p$  denselben Wert an, es gelten also  $\rho(p, A_1) = \rho(-p, A_1)$  und  $\rho(p, A_2) = \rho(-p, A_2)$ . Es folgt  $p \in A_i \Leftrightarrow -p \in A_i$  für  $i = 1, 2$ . Im Fall  $p \in A_1 \cup A_2$  oder  $-p \in A_1 \cup A_2$  sind wir somit fertig. Sonst gilt  $p, -p \in A_3$  und wir sind ebenfalls fertig.  $\square$

### 3.5. Homotopie und Fundamentalgruppe.

**Satz 3.5.1.** Sei  $H: f \cong g$  eine Homotopie zwischen stetigen Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  und sei  $x \in X$  ein Basispunkt. Definiere den Weg  $\gamma$  von  $f(x)$  nach  $g(x)$  durch  $\gamma := H(x, -): [0, 1] \rightarrow Y$ . Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(Y, g(x)) \\ & \nearrow^{\pi_1(g)} & \uparrow \sim c_\gamma \\ \pi_1(X, x) & & \pi_1(Y, f(x)) \\ & \searrow_{\pi_1(f)} & \end{array}$$

in Grp, wobei der vertikale Isomorphismus der Basispunktwechselisomorphismus aus Proposition 3.1.19 ist.

Insbesondere ist  $\pi(g)$  genau dann injektiv/surjektiv/bijektiv/trivial<sup>41</sup>, wenn  $\pi_1(f)$  diese Eigenschaft hat.

*Beweis.* Sei  $\alpha \in \Omega(X, x)$ . Dann ist  $(\gamma * (f \circ \alpha)) * \bar{\gamma} \cong g \circ \alpha$  zu zeigen (Homotopie von Wegen, also Homotopie mit festen Randpunkten). Äquivalent ist  $\varepsilon_{f(x)} * ((f \circ \alpha) * \varepsilon_{f(x)}) \cong \bar{\gamma} * ((g \circ \alpha) * \gamma)$  oder umgeschrieben

$$\varepsilon_{f(x)} * ((H(-, 0) \circ \alpha) * \varepsilon_{f(x)}) \cong \bar{\gamma} * ((H(-, 1) \circ \alpha) * \gamma)$$

zu zeigen. Für  $\tau \in [0, 1]$  definiere den Weg  $\gamma_\tau$  durch  $\gamma_\tau(t) := \gamma(\tau \cdot t)$  von  $\gamma_\tau(0) = \gamma(0) = f(x) = H(x, 0)$  nach  $\gamma_\tau(1) = \gamma(\tau) = H(x, \tau) = H(\alpha(0), \tau) = H(\alpha(1), \tau)$ . Die Wege  $(\gamma_\tau)_{\tau \in [0, 1]}$  interpolieren zwischen  $\gamma_0 = \varepsilon_{f(x)}$  und  $\gamma_1 = \gamma$ . Die Schleifen

$$\bar{\gamma}_\tau * ((H(-, \tau) \circ \alpha) * \gamma_\tau)$$

bei  $f(x)$ , für  $\tau \in [0, 1]$ , bilden dann eine „stetige“ Familie von Schleifen bei  $f(x)$ , die in offensichtlicher Weise die gesuchte Homotopie liefert.  $\square$

**Korollar 3.5.2.** Jede Homotopieäquivalenz  $f: X \rightarrow Y$  liefert einen Isomorphismus

$$\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$$

<sup>41</sup>Ein Morphismus von Gruppen ist trivial, wenn er alle Elemente auf das neutrale Element schickt.

auf den Fundamentalgruppen, für jeden Basispunkt  $x \in X$ . Jeder nullhomotope Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  liefert die triviale Abbildung  $\pi_1(f): \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(Y, f(x))$ ,  $[\alpha] \mapsto 1 = [\varepsilon_{f(x)}]$  auf den Fundamentalgruppen, für alle  $x \in X$ . Ist  $X$  ein zusammenziehbarer Raum, so gilt  $\pi_1(X, x) = 1$  für alle  $x \in X$ .

*Beweis.* Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz. Sei  $g: Y \rightarrow X$  stetig mit  $g \circ f \cong \text{id}_X$  und  $f \circ g \cong \text{id}_Y$ . Da  $\pi_1(\text{id}_X) = \text{id}$  bijektiv ist, ist auch  $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$  bijektiv (Satz 3.5.1). Analog ist  $\pi_1(f) \circ \pi_1(g)$  bijektiv. Also muss  $\pi_1(f)$  bijektiv sein.

Ist  $X$  zusammenziehbar, so ist die eindeutige Abbildung  $X \rightarrow \{\text{pt}\}$  eine Homotopieäquivalenz und wir erhalten nach dem gerade Bewiesenen  $\pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\{\text{pt}\}, \text{pt}) \cong 1$ .

Jede nullhomotope (stetige) Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  ist zu einer konstanten Abbildung  $c: X \rightarrow Y$ ,  $x \mapsto y_0$ , homotop, für ein geeignetes  $y_0 \in Y$ . Da  $\pi_1(c)$  offensichtlich die triviale Abbildung ist, folgt dasselbe für  $\pi_1(f)$  nach Satz 3.5.1.  $\square$

Ende der 11. Vorlesung am 14.05.2019.

**Definition 3.5.3.** <sup>42</sup> Sei  $A$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ . Eine **Deformationsretraktion von  $X$  auf  $A$**  ist eine stetige Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $H(-, 0) = \text{id}_X$  und  $H(x, 1) \in A$  für alle  $x \in X$  und  $H(a, t) = a$  für alle  $a \in A$  und  $t \in [0, 1]$ . Existiert eine solche, nennt man  $A$  ein **Deformationsretrakt von  $X$** . <sup>43</sup>

**Lemma 3.5.4.** *Ist eine Teilmenge  $A$  eines topologischen Raums  $X$  ein Deformationsretrakt, so ist sie ein Retrakt und die Inklusion  $i: A \rightarrow X$  ist eine Homotopieäquivalenz.*

*Insbesondere ist für jeden Basispunkt  $a \in A$  die induzierte Abbildung auf den Fundamentalgruppen ein Isomorphismus*

$$\pi_1(A, a) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, a)$$

*Beweis.* Sei  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Deformationsretraktion von  $X$  auf  $A$ . Dann landet  $H(-, 1): X \rightarrow X$  in  $A$  und die induzierte stetige Abbildung  $r: X \rightarrow A$  ist eine Retraktion, d. h. es gilt  $r \circ i = \text{id}_A$ . Also ist  $A$  ein Retrakt. Weiter ist  $H$  eine Homotopie relativ zu  $A$  von  $\text{id}_X$  zu  $i \circ r$ . Also ist  $i$  eine Homotopieäquivalenz. Die letzte Behauptung folgt aus Korollar 3.5.2.  $\square$

**Beispiele 3.5.5.** (vgl. Beispiele 3.3.2)

- (a) Die Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  ist ein Deformationsretrakt von  $\mathbb{C}^\times$ .
- (b) Die Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  ist kein Deformationsretrakt von  $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$ , denn sonst müßten die zugeordneten Fundamentalgruppen isomorph sein (Lemma 3.5.4): Man sieht sofort, dass die Vereinigung der beiden Kreislinien  $\mathbb{S}^1$  und  $2 + \mathbb{S}^1$  (also eine Figur Acht) ein Deformationsretrakt von  $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$  ist, und somit haben diese beiden Räume isomorphe Fundamentalgruppen. Wir werden als Anwendung des Satzes von Seifert-van Kampen 3.10.4 die Fundamentalgruppe der Figur Acht berechnen (siehe Beispiel 3.10.8). Da diese nicht kommutativ ist, kann sie nicht isomorph zu  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$  sein.

**Beispiele 3.5.6.** (mit Bildern in der Vorlesung)

<sup>42</sup>Wir folgen hier [Hat02]; es gibt verschiedene Varianten dieses Begriffs in der Literatur; statt unserer Forderung  $H(a, t) = a$  für alle  $a \in A$  und  $t \in [0, 1]$  kann man nur  $H(a, 1) = a$  für alle  $a \in A$  fordern.

<sup>43</sup>Man könnte auch die Inklusion  $i: A \rightarrow X$  ein **Deformationsretrakt** nennen.

- Die Figuren 8 und  $O-O$  und  $\Theta$  (hier berühre der Querbalken den äußeren Kreis) sind homotopieäquivalent. Man kann dies direkt sehen oder verwenden, dass sie alle Deformationsretrakte einer dicken 8 sind.
- Der Torus ohne einen Punkt hat ein Bouquet von zwei Kreislinien  $\mathbb{S}^1$  (also eine Figur 8) als Deformationsretrakt.
- Die folgenden vier Räume sind homotopieäquivalent (die letzten drei Räume sind in [Hat02, S. 11] abgebildet; im dortigen Kapitel 0 findet man weitere nette Bilder (etwa Seite 12) und auch andere Kriterien für Homotopieäquivalenz). Insbesondere sind ihre Fundamentalgruppen isomorph (Korollar 3.5.2).
  - $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{S}^1$ ;
  - $\mathbb{R}^3 \setminus$  Volltorus;
  - die 2-Sphäre  $\mathbb{S}^2$  zusammen mit der Achse durch Nord- und Südpol;
  - die 2-Sphäre zusammen mit einer Verbindungslinie zwischen Nord- und Südpol, die „außerhalb“ der Sphäre liegt und etwa einer Magnetfeldlinie folgt;
  - die Verklebung von  $\mathbb{S}^2$  und  $\mathbb{S}^1$  in einem Punkt;
  - ein „gepinchter“ Torus, also der Quotient des Torus  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  nach der Äquivalenzrelation, deren einzige nicht einelementige Äquivalenzklasse die Menge  $\{1\} \times \mathbb{S}^1$  ist.
- Nicht homotopieäquivalent (und erst recht nicht homöomorph) sind die folgenden drei Räume (denn wir werden mit dem Satz von Seifert-van Kampen 3.10.4 sehen, dass die Fundamentalgruppen nicht isomorph sind, siehe Beispiel 3.10.9 und Aufgaben 3.10.10 und 3.10.11:
  - Das Komplement von  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^3$ .
  - Das Komplement zweier „nichtverschlungener“ Kreislinien  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^3$ .
  - Das Komplement zweier „verschlungener“ Kreislinien  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^3$ .
 (Die beiden verschlungenen Kreislinien und die beiden unverschlungenen Kreislinien sind jeweils homöomorph zur disjunkten Vereinigung  $\mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$  – der umgebende Raum  $\mathbb{R}^3$  spielt hierbei nur die marginale Rolle, dass die Topologie auf den (un)verschlungenen Kreislinien die induzierte Topologie ist).
- Ein nichttriviales Beispiel für einen zusammenziehbaren Raum ist das „house with two rooms“, siehe [Hat02, S. 4].

**Aufgabe 3.5.7.** Welche der folgenden Buchstaben sind homotopieäquivalent? Genauer ist in der folgenden Liste von Buchstaben ein (minimales) Repräsentantensystem für die vorkommenden Isomorphieklassen in  $\text{hTop}$  anzugeben.

- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, \omicron, \pi, \rho, \sigma, \tau, \upsilon, \varphi, \chi, \psi, \omega$   
 $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda, M, N, \Xi, O, \Pi, P, \Sigma, T, \Upsilon, \Phi, X, \Psi, \Omega$

Hinweis: Kein formaler Beweis nötig, die richtige Antwort genügt. Es darf verwendet werden, dass 8 weder zu 1 noch zu 0 homotopieäquivalent ist. Bitte zoomen.

**Aufgabe 3.5.8** ([Hat02, Chapter 0, Exercise 5]). Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $x \in X$ . Ist  $\{x\}$  ein Deformationsretrakt von  $X$ , so existiert für jede Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$  eine Umgebung  $V$  von  $x$  in  $X$  mit  $V \subset U$ , so dass die Inklusion  $V \hookrightarrow U$  nullhomotop ist.

Hinweis: Quasi-Kompaktheit von  $[0, 1]$ .

**Aufgabe 3.5.9** ([Hat02, Chapter 0, Exercise 4], Verstärkung von Lemma 3.5.4). Sei  $A$  eine Teilmenge eines topologischen Raums  $X$ . Eine **schwache Deformationsretraktion von**

$X$  auf  $A$  ist eine stetige Abbildung  $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$  mit  $H(-, 0) = \text{id}_X$  und  $H(x, 1) \in A$  für alle  $x \in X$  und  $H(a, t) \in A$  für alle  $a \in A$  und  $t \in [0, 1]$ .<sup>44</sup> Existiert eine solche schwache Deformationsretraktion, so nennt man  $A$  ein **schwaches Deformationsretrakt von  $X$** .<sup>45</sup> Ist  $A$  ein schwaches Deformationsretrakt von  $X$ , so ist die Inklusion  $i: A \rightarrow X$  eine Homotopieäquivalenz, und insbesondere liefert die Inklusion  $i: A \rightarrow X$  für jedes  $A$  einen Gruppenisomorphismus

$$\pi_1(i): \pi_1(A, a) \xrightarrow{\sim} \pi_1(X, a).$$

**Aufgabe 3.5.10.** Für einen topologischen Raum  $X$  bezeichne  $\pi_0(X)$  die Menge seiner Wegzusammenhangskomponenten.

(a) Die Zuordnung  $X \mapsto \pi_0(X)$  läßt sich in sinnvoller Weise zu einem Funktor

$$\pi_0: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$$

ausdehnen.

(b) Sind  $f, g: X \rightarrow Y$  homotope Abbildungen, so gilt  $\pi_0(f) = \pi_0(g): \pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$ .

(c) Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz, so ist  $\pi_0(f)$  eine Bijektion.

Insbesondere haben homotopieäquivalente Räume gleich viele Wegzusammenhangskomponenten.

Bemerkung: Insbesondere liefert der Funktor  $\pi_0: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$  (in eindeutiger Weise) einen Funktor

$$\bar{\pi}_0: \text{hTop} \rightarrow \text{Set},$$

so dass  $\pi_0$  die Komposition  $\text{Top} \rightarrow \text{hTop} \xrightarrow{\bar{\pi}_0} \text{Set}$  von Funktoren (siehe A.2.14) ist, wobei der erste Funktor der offensichtliche ist.

Bemerkung: Neben den nun bekannten Funktoren  $\pi_0: \text{Top} \rightarrow \text{Set}$  und  $\pi_1: \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$  gibt es weitere Funktoren  $\pi_i: \text{Top}_* \rightarrow \text{Ab}$ , für jede natürliche Zahl  $i \geq 2$ . Man nennt  $\pi_i(X, x)$  die  **$i$ -te Homotopiegruppe von  $(X, x)$** .

**Aufgabe 3.5.11.** Eine stetige Abbildung  $f: S^n \rightarrow X$  von einer Sphäre in einen topologischen Raum  $X$  ist genau dann nullhomotop, wenn sie sich zu einer stetigen Abbildung  $D^{n+1} \rightarrow X$  ausdehnen läßt.

**Aufgabe 3.5.12.** Seien  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow X$  Morphismen in einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Sind  $g \circ f$  und  $f \circ g$  Isomorphismen, so sind auch  $f$  und  $g$  Isomorphismen.

**Aufgabe 3.5.13** (Funktoren erhalten Isomorphismen und Isomorphie). Sind  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor und  $f: X \rightarrow Y$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{C}$ , so ist  $F(f): F(X) \rightarrow F(Y)$  ein Isomorphismus in  $\mathcal{D}$ . Insbesondere bildet jeder Funktor isomorphe Objekte auf isomorphe Objekte ab.

**Aufgabe 3.5.14.** Seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume.

(a) Ist  $Y$  zusammenziehbar, so sind alle stetigen Abbildungen  $X \rightarrow Y$  homotop.

(b) Ist  $X$  zusammenziehbar und ist  $Y$  wegzusammenhängend, so sind alle stetigen Abbildungen  $X \rightarrow Y$  homotop.

In beiden Fällen ist also  $\text{hTop}(X, Y)$  einelementig (da nichtleer).

<sup>44</sup>Offensichtlich ist jede Deformationsretraktion eine schwache Deformationsretraktion.

<sup>45</sup>Für ein Beispiel eines schwachen Deformationsretrakt, das kein „starkes“ Deformationsretrakt ist, siehe [Hat02, Chapter 0, Exercise 6]

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 3.5.10, Menge der Wegzusammenhangskomponenten als Funktor
- (2) Aufgabe 3.5.11, nullhomotope Abbildungen von Sphäre
- (3) Aufgaben 3.5.12 und 3.5.13, kategorielle Trivialitäten
- (4) Aufgabe 3.5.14, Homotopie für Abbildungen von Räumen mit gewissen Eigenschaften (zusammenziehbar, wegzusammenhängend)
- (5) Bonus-Spaßaufgabe 3.5.7, griechische Buchstaben bis auf Homotopieäquivalenz

### 3.6. Produkte und Koproducte.

**3.6.1.** Unser nächstes Ziel ist der Satz von Seifert-van Kampen 3.10.4, der – wie bereits angedeutet – die Berechnung einiger weiterer Fundamentalgruppen ermöglicht. Um ihn dann sofort effektiv anwenden zu können, erklären wir zuerst einige kategorielle Begriffe und Konstruktionen.<sup>46</sup>

**Definition 3.6.2.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und seien  $X, Y \in \mathcal{C}$  Objekte. Ein **Produkt von  $X$  und  $Y$**  ist ein Tripel  $(P, p, q)$ , bestehend aus einem Objekt  $P \in \mathcal{C}$  und zwei Morphismen  $p: P \rightarrow X$  und  $q: P \rightarrow Y$ , so dass gilt: Für alle Objekte  $T \in \mathcal{C}$  und alle Morphismen  $a: T \rightarrow X$  und  $b: T \rightarrow Y$  gibt es genau einen Morphismus  $c: T \rightarrow P$  mit  $p \circ c = a$  und  $q \circ c = b$  (per Diagramm veranschaulichen). Dies bedeutet, dass für alle Objekte  $T \in \mathcal{C}$  die folgende Abbildung bijektiv ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(T, P) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(T, X) \times \mathcal{C}(T, Y), \\ c &\mapsto (p \circ c, q \circ c). \end{aligned}$$

- Beispiele 3.6.3.**
- (a) Für  $X, Y \in \text{Set}$  ist  $P = X \times Y$  zusammen mit den Projektionen  $p: X \times Y \rightarrow X$  und  $q: X \times Y \rightarrow Y$  ein Produkt.
  - (b) In  $\text{Top}$  ist  $X \times Y$  mit der Produkttopologie und den offensichtlichen Projektionen ein Produkt von  $X, Y \in \text{Top}$ .
  - (c) Sind  $X$  und  $Y$  Objekte von Ring bzw. Grp bzw. Ab bzw.  $\text{Mod}(R)$ , so ist die Menge  $X \times Y$  mit der jeweils offensichtlichen Zusatzstruktur ein Produkt von  $X$  und  $Y$ .
  - (d) Ist  $(P, p, q)$  ein Produkt von  $X$  und  $Y$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  und ist  $c: Z \xrightarrow{\sim} P$  ein Isomorphismus, so ist auch  $(Z, p \circ c, q \circ c)$  ein Produkt von  $X$  und  $Y$ . Dies ist der einzige Spielraum, den man hat, wie wir in 3.6.4 erklären.
  - (e) Nicht in allen Kategorien gibt es für je zwei Objekte ein Produkt. Der Leser mag sich überlegen: Ist  $X$  ein nichtleerer topologischer Raum, so gibt es in  $\Pi_1(X)$  genau dann für je zwei Objekte ein Produkt, wenn  $X$  einfach zusammenhängend ist.

**3.6.4** (Eindeutigkeit von Produkten bis auf eindeutigen Isomorphismus). Seien  $X$  und  $Y$  Objekte einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Seien  $(P, p, q)$  und  $(P', p', q')$  Produkte von  $X$  und  $Y$ . Dann gibt es genau einen Morphismus  $c: P \rightarrow P'$  mit  $p' \circ c = p$  und  $q' \circ c = q$ , es gibt genau einen Morphismus  $d: P' \rightarrow P$  mit  $p \circ d = p'$  und  $q \circ d = q'$ . Weiter gibt es genau einen Morphismus  $f: P \rightarrow P$  mit  $p \circ f = p$  und  $q \circ f = q$ . Da sowohl  $\text{id}_P$  als auch  $d \circ c$  diese beiden Bedingungen erfüllen, muss  $\text{id}_P = d \circ c$  gelten. Analog folgt  $\text{id}_{P'} = c \circ d$ . Also sind  $c$  und  $d$  zueinander inverse Isomorphismen, die mit den jeweiligen Abbildungen nach  $X$  und  $Y$  verträglich sind.<sup>47</sup>

<sup>46</sup>Eventuell könnte man die Abschnitte 3.6 bis 3.9 in den Appendix verlagern.

<sup>47</sup> Der Begriff „eindeutiger Isomorphismus“, im Titel dieser Bemerkung meint einen solchen „verträglichen“ Isomorphismus.

Auf Grund dieser Eindeutigkeit sprechen wir im Folgenden meist von dem Produkt (falls es existiert) und notieren es als  $(X \times Y, \text{pr}_X, \text{pr}_Y)$ . Die Abbildungen  $\text{pr}_X: X \times Y \rightarrow X$  und  $\text{pr}_Y: X \times Y \rightarrow Y$  nennt man **Projektionen**. Abkürzend läßt man oft die Projektionen weg und spricht von  $X \times Y$  als dem Produkt.

**Definition 3.6.5.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten in  $\mathcal{C}$ . Ein **Produkt** der  $(X_i)_{i \in I}$  besteht aus einem Objekt  $P \in \mathcal{C}$  und Morphismen  $p_i: P \rightarrow X_i$ , so dass gilt: Gegeben ein beliebiges Objekt  $T$  und Morphismen  $f_i: T \rightarrow X_i$ , für alle  $i \in I$ , gibt es genau einen Morphismus  $g: T \rightarrow P$  mit  $p_i \circ g = f_i$ .

- 3.6.6.**
- Im Fall  $I = \{1, 2\}$  spezialisiert diese Definition zur vorigen Definition **3.6.2**.
  - Ist  $I$  einelementig, so ist ein Produkt eines Objekts  $X$  zum Beispiel durch  $(X, \text{id}_X)$  gegeben.
  - Im Fall  $I = \emptyset$  ist ein Produkt über die leere Familie<sup>48</sup> ein Objekt  $T$ , so dass es für jedes Objekt  $Z$  genau einen Morphismus  $Z \rightarrow T$  gibt. Ein solches Objekt heißt **terminales** oder **finale**s Objekt.
  - In der Kategorie Set ist jede einelementige Menge ein terminales Objekt. In Top ist jeder einelementige topologische Raum terminal. In Ring ist der Nullring terminal (warum ist der zweielementige Ring  $\{0, 1\}$  nicht terminal?). In Ab ist die triviale Gruppe  $\{0\}$  terminal. In Grp ist die triviale Gruppe  $\{1\}$  terminal.

**Beispiele 3.6.7.** In Set existieren alle Produkte: Gegeben Objekte  $X_i$ , für  $i \in I$ , ist das „übliche Produkt“  $\prod_{i \in I} X_i$  mit den üblichen Projektionen ein Produkt der  $(X_i)_{i \in I}$ . Analoges gilt in Top, wenn man  $\prod_{i \in I} X_i$  mit der Produkttopologie versieht. Analoges gilt in Ring und Grp und Ab und  $\text{Mod}(R)$  mit der offensichtlichen Gruppenstruktur auf dem mengentheoretischen Produkt.

**3.6.8.** Produkte von Familien  $(X_i)_{i \in I}$  sind im zu **3.6.4** analogen Sinne eindeutig. Man spricht deshalb von *dem* Produkt und notiert es  $(\prod_{i \in I} X_i, \text{pr}_i)$ .

**3.6.9.** Definition der opponierten Kategorie **A.2.9**.

**Definition 3.6.10.** Kurzform: Ein **Koprodukt** in einer Kategorie ist ein Produkt in ihrer opponierten Kategorie.

Langform: Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie von Objekten von  $\mathcal{C}$ . Ein **Koprodukt** der  $(X_i)_{i \in I}$  ist ein Paar  $(C, (c_i)_{i \in I})$ , wobei  $C$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$  ist und  $(c_i)_{i \in I}$  eine Familie von Morphismen  $c_i: X_i \rightarrow C$  in  $\mathcal{C}$  ist, so dass gilt: Für alle  $T \in \mathcal{C}$  und alle Familien von Morphismen  $f_i: X_i \rightarrow T$ , wobei  $i \in I$ , existiert genau ein Morphismus  $a: C \rightarrow T$  mit  $a \circ c_i = f_i$  für alle  $i \in I$ .

Ende der 12. Vorlesung am 16.05.2019.

**Definition 3.6.11.** Ein Objekt  $I \in \mathcal{C}$  heißt **initial**, wenn es für jedes Objekt  $X \in \mathcal{C}$  genau einen Morphismus  $I \rightarrow X$  gibt.

**3.6.12.** Ein initiales Objekt ist dasselbe wie ein finales Objekt in der opponierten Kategorie, oder wie ein Koprodukt über die leere Familie.

---

<sup>48</sup>Damit meinen wir eine Familie, deren Indexmenge leer ist.



**Beispiel 3.6.13.** In der Kategorie Set der Mengen ist ein/das Koprodukt zweier Mengen  $X, Y$  die disjunkte Vereinigung  $X \sqcup Y$  mit den offensichtlichen Abbildungen  $X \rightarrow X \sqcup Y \leftarrow Y$ . Ebenso ist  $\bigsqcup_{i \in I} X_i$  (mit den offensichtlichen Morphismen) ein Koprodukt einer Familie  $(X_i)_{i \in I}$  von Mengen. Das Koprodukt der durch die leere Menge indizierten Familie ist die leere Menge. Die leere Menge ist also das initiale Objekt von Set.

**3.6.14** (Eindeutigkeit von Koprodukten bis auf eindeutigen Isomorphismus). Koprodukte sind eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, denn sie sind Produkte in der opponierten Kategorie, und für Produkte kennen wir diese Aussage bereits (siehe 3.6.4). Wer mag, kann das dortige Argument durch Umdrehen der Pfeile anpassen. Wir sprechen deswegen von *dem* Koprodukt und notieren es als  $(\coprod X_i, (\text{incl}_i)_{i \in I})$  bzw. als  $X \amalg Y$  im Fall zweier Objekte.

**Definition 3.6.15.** Ein Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt **verträglich mit (beliebigen) Produkten**, falls für jedes Produkt  $(\prod_{i \in I} X_i, \text{pr}_i)$  in  $\mathcal{C}$  das Datum  $(F(\prod_{i \in I} X_i), F(\text{pr}_i))$  ein Produkt in  $\mathcal{D}$  ist. Analog heißt  $F$  **mit (beliebigen) Koprodukten verträglich**, wenn für jedes Koprodukt  $(\coprod X_i, (\text{incl}_i)_{i \in I})$  in  $\mathcal{C}$  das Datum  $(F(\coprod X_i), (F(\text{incl}_i))_{i \in I})$  ein Koprodukt in  $\mathcal{D}$  ist. Analog definiert man Verträglichkeit mit initialen Objekten, terminalen Objekten, mit endlichen Produkten (also Produkten von endlichen<sup>49</sup> Familien von Objekten), mit endlichen Koprodukten.

**Beispiele 3.6.16.** (a) Analog wie in Set sind Koprodukte in Top durch disjunkte Vereinigungen mit der Finaltopologie gegeben. Der Vergissfunktork  $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$  ist verträglich mit Koprodukten.

(b) In der Kategorie Ab der abelschen Gruppen ist das Koprodukt zweier abelscher Gruppen  $A, B$  durch  $A \oplus B$  gegeben. Analog ist

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} A_i &= \{a = (a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \mid a_i = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele Indizes } i \in I\} \\ &= \{a \in \text{Set}(I, A) \mid \text{der Träger von } a \text{ ist endlich}\} \end{aligned}$$

das Koprodukt der  $A_i$ . Der Vergissfunktork  $\text{Ab} \rightarrow \text{Set}$  ist nicht mit Koprodukten verträglich. Schon das initiale Objekt  $\{0\}$  von Ab wird nicht auf das initiale Objekt  $\emptyset$  von Set abgebildet.

(c) In Grp ist die triviale Gruppe  $\{1\}$  initial. Koprodukte in Grp existieren, wie wir zeigen werden, dies ist aber nicht offensichtlich. Der Leser mag sich überlegen, wie das Koprodukt  $\mathbb{Z} \amalg \mathbb{Z}$  in Grp aussieht.

**3.6.17.** Wir haben gesehen, dass Koprodukte und Produkte in Set grundverschieden sind. In Ab ist der Unterschied subtiler. Ist  $(A_i)_{i \in I}$  eine Familie abelscher Gruppen, so ist

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i, \\ (x_i)_{i \in I} &\mapsto (x_i)_{i \in I}, \end{aligned}$$

ein Morphismus abelscher Gruppen (vgl. Aufgabe 3.6.21). Er ist ein Isomorphismus, falls  $I$  endlich ist.

**Definition 3.6.18.** Ein **Nullobjekt** einer Kategorie ist ein Objekt, das sowohl terminal als auch initial ist. Es ist eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus und wird oft als 0 notiert.

<sup>49</sup>Wir nennen eine Familie endlich, wenn die Indexmenge endlich ist.

Ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  mit Nullobjekt  $0$  heißt Nullmorphismus, wenn er mit der Verknüpfung  $X \rightarrow 0 \rightarrow Y$  eindeutiger Morphismen übereinstimmt.

**Beispiele 3.6.19.** In  $\text{Top}$  gibt es kein Nullobjekt. In  $\text{Top}_*$  ist  $(\{\text{pt}\}, \text{pt})$  ein Nullobjekt. In  $\text{Ab}$  ist  $\{0\}$  ein Nullobjekt, was die allgemeine Notation  $0$  für ein Nullobjekt rechtfertigt. In  $\text{Grp}$  ist  $\{1\}$  ein Nullobjekt und wird abkürzend meist als  $1$  notiert (man könnte dafür auch  $0$  schreiben).

**Aufgabe 3.6.20.** Bestimme das Produkt und das Koprodukt von  $(X, x), (Y, y)$  in  $\text{Top}_*$ .

**Aufgabe 3.6.21.** Falls eine Kategorie  $\mathcal{C}$  ein Nullobjekt  $0$  hat, so gibt es einen genau einen Morphismus  $\coprod X_i \rightarrow \prod X_i$  mit (... bitte ergänzen ...), wobei  $(X_i)_{i \in I}$  eine beliebige Familie von Objekten ist. (Der Morphismus  $\prod X_i \rightarrow 0 \rightarrow \prod X_i$  ist nicht die erwünschte Antwort.)

Unter welcher Bedingung an  $(X_i)_{i \in I}$  ist dieser Morphismus ein Isomorphismus in  $\text{Ab}$ ?

### 3.7. Kokartesische Diagramme (oder Pushout-Diagramme).

**3.7.1.** Definition 2.8.54 hat eine offensichtliche Verallgemeinerung von  $\text{Top}$  auf beliebige Kategorien.

**Definition 3.7.2.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & f' \downarrow \\ X & \xrightarrow{g'} & Z \end{array}$$

in  $\mathcal{C}$  heißt **kokartesisches** Diagramm (oder Quadrat) oder **Pushout-Diagramm**, falls es kommutativ ist, also  $f' \circ g = g' \circ f$  gilt, und falls für alle Objekte  $T$  und alle Paare  $\alpha: X \rightarrow T$  und  $\beta: Y \rightarrow T$  von Morphismen mit  $\alpha \circ f = \beta \circ g$  genau ein Morphismus  $\gamma: Z \rightarrow T$  mit  $\gamma \circ g' = \alpha$  und  $\gamma \circ f' = \beta$  existiert.

Man nennt dann  $Z$  (zusammen mit  $f'$  und  $g'$ ) den **Pushout von  $f$  und  $g$** . Er wird oft als  $X \amalg_W Y$  notiert. Der bestimmte Artikel ist nach dem Analogon zu 2.8.55 gerechtfertigt. Man nennt auch  $g'$  den **Pushout** von  $g$  und  $f'$  den **Pushout** von  $f$ . Läßt sich jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow f & & \\ X & & \end{array}$$

in  $\mathcal{C}$  zu einem kokartesischen Diagramm ergänzen, so sagen wir, dass  $\mathcal{C}$  **alle Pushouts hat**.

**Definition 3.7.3.** Ein **kartesisches Diagramm** in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist ein kokartesisches Diagramm in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .<sup>50</sup> Ein **Pullback** in  $\mathcal{C}$  ist ein Pushout in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  (wie beim Pushout wird dieser Begriff sowohl für Objekte als auch für Morphismen verwendet).<sup>51</sup> Ein Kategorie **hat alle Pullbacks**, wenn sich jedes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow b \\ X & \xrightarrow{a} & Z \end{array}$$

<sup>50</sup>Aus sprachlicher Sicht sollte man zuerst kartesische Diagramme definieren.

<sup>51</sup>Auch der Begriff Basiswechsel kommt in diesem Zusammenhang vor.

zu einem kartesischen Diagramm ergänzen läßt. Man notiert den Pullback eines solchen Diagramms als  $X \times_Z Y$  (oder ganz genau als  $X \times_{a,Z,b} Y$ ) und nennt ihn auch **Faserprodukt** von  $X$  und  $Y$  über  $Z$  (vgl. Aufgabe 3.7.9).<sup>52</sup>

**Definition 3.7.4.** Verträglichkeit eines Funktors mit kartesischen Diagrammen (= Pullbacks) bzw. mit kokartesischen Diagrammen (= Pushouts) ist analog zu den entsprechenden Begriffsbildungen in Definition 3.6.15 definiert.

**Beispiel 3.7.5.** Sei  $\varphi: G \rightarrow H$  ein Morphismus in Grp. Dann ist das folgende linke Diagramm kartesisch in Grp und das folgende rechte Diagramm ist kokartesisch in Grp, wobei  $N$  der kleinste Normalteiler von  $H$  ist, der  $\varphi(G)$  enthält (alle Morphismen sind die offensichtlichen, und 1 ist die triviale Gruppe):

$$\begin{array}{ccc} \text{Ker}(\varphi) & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ 1 & \longrightarrow & H \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & H/N \end{array}$$

Dieselbe Aussage gilt auch in Ab, wobei hier jede Untergruppe bereits ein Normalteiler ist, also  $N = \varphi(G)$  gilt und damit  $H/N = \text{Cok}(\varphi)$ , und man die triviale abelsche Gruppe meist als 0 notiert. Analoges gilt in  $\text{Mod}(R)$ , wobei  $R$  ein beliebiger Ring ist.

**Beispiel 3.7.6.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus in Top. Ist  $i: Z \hookrightarrow Y$  eine Einbettung, so ist das folgende Diagramm (mit den offensichtlichen Abbildungen) kartesisch in Top:

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(Z) & \xhookrightarrow{j} & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xhookrightarrow{i} & Y \end{array}$$

Der Pullback  $j$  von  $i$  ist also ebenfalls eine Einbettung (die offen bzw. abgeschlossen ist, falls  $i$  diese Eigenschaft hat).

Dies bedeutet, dass der Pullback jeder Einbettung/offenen Einbettung/abgeschlossenen Einbettung wieder eine Einbettung/offene Einbettung/abgeschlossene Einbettung ist (vgl. Aufgabe 3.7.10 und Aufgabe 2.8.57 für strukturell ähnliche Aussagen).

**3.7.7.** Hat eine Kategorie  $\mathcal{C}$  ein terminales Objekt  $T$ , so ist ein Pullback  $X \times_T Y$  von  $X \rightarrow T \leftarrow Y$  dasselbe wie ein Produkt  $X \times Y$  von  $X$  und  $Y$ . Analoges gilt in Kategorien mit einem initialen Objekt für Pushouts und Koproducte.

**3.7.8.** Transitivität von Kokartesianität/Pushouts gilt in beliebigen Kategorien genau so, wie in Aufgabe 2.8.56 für Top formuliert. Der Leser mag dies in eine Transitivitätsaussage für Kartesianität/Pullbacks übersetzen.

**Aufgabe 3.7.9.** (Beispiel in der Vorlesung) Sowohl Set als auch Top hat alle Pullbacks. Der Vergissfunktors  $\text{Top} \rightarrow \text{Set}$  ist verträglich mit Pullbacks.

Hinweis: Betrachte  $X \times_Z Y := \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ , wobei  $f: X \rightarrow Z$  und  $g: Y \rightarrow Z$  gegebene (stetige) Abbildungen sind.

<sup>52</sup>Man sagt auch, dass  $X \times_Z Y$  der Basiswechsel von  $Y$  (entlang des Basiswechselfunktors  $G$ ) ist, oder dass  $X \times_Z Y \rightarrow X$  durch Basiswechsel entlang  $G$  aus  $F$  entsteht.

Bemerkung: Dies erklärt den Namen **Faserprodukt** für  $X \times_Z Y$ . Die Faser von  $X \times_Z Y \rightarrow Y$  über  $y \in Y$  wird unter  $X \times_Z Y \rightarrow X$  mit der Faser von  $f$  über  $g(y)$  identifiziert.

**Aufgabe 3.7.10.** Sei ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{a'} & Y \\ b' \downarrow & & \downarrow b \\ X & \xrightarrow{a} & Z \end{array}$$

in Top gegeben. Ist  $b$  offen bzw. surjektiv, so auch  $b'$ .

Hinweis: Aufgabe 3.7.9.

**Aufgabe 3.7.11.** Wähle eine der Kategorien  $\text{Vect}(\mathbb{R})$ ,  $\text{Ab}$ ,  $\text{Mod}(R)$  (wobei  $R$  ein Ring ist), und zeige, dass sie alle Pullbacks und alle Pushouts hat.

Hinweis: Man modifiziere das Produkt  $X \times Y$  bzw. das Koproduct  $X \oplus Y$ . Die Konstruktion ist in den drei genannten Kategorien dieselbe; die beiden anderen Kategorien sind ohnehin Spezialfälle von  $\text{Mod}(R)$  für  $R = \mathbb{R}$  und  $R = \mathbb{Z}$ .

**Aufgabe 3.7.12.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie und  $X$  ein Objekt. Die **Kategorie  $\mathcal{C}_{/X}$  von Objekten über  $X$**  hat als Objekte Morphismen  $a: A \rightarrow X$  in  $\mathcal{C}$  mit Ziel  $X$ , als Morphismenmenge von einem Objekt  $(a: A \rightarrow X)$  in ein Objekt  $(b: B \rightarrow X)$  die Menge aller Morphismen  $f: A \rightarrow B$  in  $\mathcal{C}$ , die  $b \circ f = a$  erfüllen (male kommutatives Diagramm!), und als Verknüpfung die von  $\mathcal{C}$  induzierte.

Es gelten

- Ein kartesisches Diagramm in  $\mathcal{C}$  mit rechter unterer Ecke  $X$  (also der Ecke, in der zwei Morphismen enden) ist „dasselbe“ wie ein Produkt in der Kategorie  $\mathcal{C}_{/X}$  der Objekte über  $X$ .
- Ein kokartesisches Diagramm in  $\mathcal{C}$  mit linker oberer Ecke  $X$  (also der Ecke, wo zwei Morphismen starten) ist „dasselbe“ wie ein Produkt in der Kategorie  $\mathcal{C}_{X/}$  der Objekte unter  $X$ , die der Leser geeignet definiere.

### 3.8. Freie Monoide und Gruppen.

**3.8.1.** Die folgenden Überlegungen bereiten die Konstruktion von Koproducten und kokartesischen Diagrammen in  $\text{Grp}$  vor.

**3.8.2.** Sei  $\text{Mon}$  die Kategorie der Monoide (als Objekte) und Homomorphismen von Monoiden (als Morphismen).

**Satz 3.8.3.** Sei  $X$  eine Menge.

- (a) Es gibt ein Paar  $(W, \tau)$ , bestehend aus einem Monoid  $W$  und einem Morphismus  $\tau: X \rightarrow W$  von Mengen, so dass für jedes Monoid  $M$  das Vorschalten von  $\tau$  eine Bijektion

$$(3.8.1) \quad (? \circ \tau): \text{Mon}(W, M) \xrightarrow{\sim} \text{Set}(X, M),$$

$$\varphi \mapsto \varphi \circ \tau,$$

induziert.<sup>53</sup> Wir nennen eine Abbildung  $\tau$  von einer Menge in ein Monoid mit dieser Eigenschaft eine **universelle Menge-Monoid-Abbildung**.<sup>54</sup>

(b) Sind  $\tau: X \rightarrow W$  und  $\tau': X \rightarrow W'$  universelle Menge-Monoid-Abbildungen, so gibt es genau einen Morphismus  $c: W \rightarrow W'$  von Monoiden mit  $c \circ \tau = \tau'$ , und genau einen Morphismus  $d: W' \rightarrow W$  von Monoiden mit  $d \circ \tau' = \tau$ , und  $c$  und  $d$  sind zueinander inverse Isomorphismen.

Man nennt ein Paar  $(W, \tau)$  wie in (a) (oder auch nur  $W$ , wobei  $\tau$  implizit mitverstanden ist) ein oder das **freie Monoid über  $X$** . Oft schreiben wir es als  $\text{Free}_{\text{Mon}}(X)$  oder kürzer als  $F(X)$ . Der bestimmte Artikel ist durch die in (b) beschriebene „Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus“ gerechtfertigt.

**3.8.4.** Die Bijektion (3.8.1) bedeutet als „universelle“ Eigenschaft: Für jedes Monoid  $M$  und jede Abbildung von Mengen  $\mu: X \rightarrow M$  gibt es genau einen Morphismus  $\hat{\mu}: W \rightarrow M$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tau} & W \\ & \searrow \mu & \downarrow \exists! \hat{\mu} \\ & & M \end{array}$$

kommutiert.

**Beispiel 3.8.5.** Für die leere Menge ist  $\emptyset \rightarrow (\{1\}, \cdot)$  eine universelle Menge-Monoid-Abbildung. Das freie Monoid über der leeren Menge ist also das triviale Monoid  $\{1\}$ .

Für eine einpunktige Menge  $\{\text{pt}\}$  ist  $\{\text{pt}\} \rightarrow (\mathbb{N}, +)$ ,  $\text{pt} \mapsto 1$ , eine universelle Menge-Monoid-Abbildung. Das freie Monoid über einer einelementigen Menge ist also  $(\mathbb{N}, +)$ .

*Beweis.* Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $W_n := \text{Set}(\{1, \dots, n\}, X)$ . Elemente  $a = (a_1, \dots, a_n) \in W_n$  heißen **Wörter der Länge  $n$  im Alphabet  $X$**  und werden als  $a_1 a_2 \dots a_n$  geschrieben. Die Menge  $W_0$  besteht nur aus dem leeren Wort  $()$ , notiert  $e$ . Sei  $W := \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$  die Menge aller Wörter. Das „Hintereinanderschreiben“ von Wörtern definiert eine Verknüpfung

$$\begin{aligned} W \times W &\rightarrow W, \\ (a, b) &\mapsto ab, \end{aligned}$$

auf  $W$  (die Länge von  $ab$  ist die Summe der Längen von  $a$  und  $b$ ). Diese Verknüpfung ist assoziativ und hat das leere Wort als neutrales Element, macht also  $W$  zu einem Monoid. Sei  $\tau: X \rightarrow W_1 \subset W$  die offensichtliche Abbildung, die einem Element  $x \in X$  das Wort  $x$  der Länge Eins zuordnet.<sup>55</sup> Offensichtlich ist  $\tau$  eine universelle Mengen-Monoid-Abbildung. Dies zeigt (a).

Der Beweis von (b) ist dem Leser überlassen (vgl. ähnliche Argumente in 2.8.55 oder 3.6.4).  $\square$

<sup>53</sup> Hier unterscheiden wir in der Notation nicht zwischen  $W$  als Monoid und  $W$  als Menge. Ist  $V: \text{Mon} \rightarrow \text{Set}$  der Vergissfunktorkomplex, so ist  $\tau$  genauer ein Morphismus  $\tau: X \rightarrow V(W)$  in  $\text{Set}$  und die Bijektion ist genauer wie folgt gegeben:

$$(3.8.2) \quad \begin{aligned} \text{Mon}(W, M) &\xrightarrow{\sim} \text{Set}(X, V(M)), \\ \varphi &\mapsto V(\varphi) \circ \tau. \end{aligned}$$

<sup>54</sup> Diese Sprechweise ist nicht sehr verbreitet.

<sup>55</sup> Wer genauer sein will, notiert ein Wort als  $\underline{(a_1, a_2, \dots, a_n)}$ . Dann gilt  $\tau(x) = \underline{(x)}$ .

**Beispiele 3.8.6.** • Das freie Monoid  $F(\{a\})$  über der einelementigen Menge  $\{a\}$  besteht genau aus den folgenden paarweise verschiedenen Elementen:  $a^0 = e, a^1 = a, a^2 = aa, a^3 = aaa, \dots, a^n, \dots$ . Die Abbildung  $\{a\} \rightarrow \mathbb{N}$  von Mengen entspricht nach der universellen Eigenschaft dem (Iso-)Morphismus  $F(\{a\}) \rightarrow (\mathbb{N}, +)$ ,  $a^n \mapsto n$ , von Monoiden.

- (Abstrakte Definition der Länge eines Wortes) Ist  $X$  eine Menge, so liefert die Abbildung  $X \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $x \mapsto 1$ , von Mengen einen Morphismus

$$(3.8.3) \quad \ell: F(X) \rightarrow (\mathbb{N}, +)$$

von Monoiden, der offensichtlich jedem Element von  $F(X)$ , also jedem Wort in  $X$ , seine Länge zuordnet.

- Das freie Monoid  $F(\{a, b\})$  über der zweielementigen Menge  $\{a, b\}$  besteht genau aus den folgenden paarweise verschiedenen Elementen

$$e, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb, \dots,$$

wobei die Länge der Wörter monoton wächst und alle Wörter fixierter Länge in alphabetischer Reihenfolge (bzgl. der üblichen totalen Ordnung  $a < b$ ) aufgeschrieben sind.

- Das freie Monoid über dem ASCII-Code enthält alle (in diesem Alphabet verfasste und verfasst werdende) Poesie, alle Mathebücher und jeden Blödsinn als Elemente.

**3.8.7.** Nach dem Beweis von Satz 3.8.3 ist klar, dass die universelle Menge-Monoid Abbildung  $X \rightarrow F(X)$  injektiv ist, und dass jedes Element von  $F(X)$  in eindeutiger Weise als Produkt von Elementen von  $X$  geschrieben werden kann (nämlich als Wort im Alphabet  $X$ ). Diese beiden Eigenschaften kann man auch abstrakt herleiten; um etwa zu zeigen, dass  $X \rightarrow F(X)$  injektiv ist, betrachte man das additive Monoid  $(\mathbb{N}^X = \text{Set}(X, \mathbb{N}), +)$  aller Abbildungen von  $X$  nach  $\mathbb{N}$  mit punktweiser Verknüpfung. Für den Beweis der anderen Aussage definiert man eine geeignete Monoidoperation von  $F(X)$  auf dem Raum der Wörter (vgl. Aufgabe 3.8.13).

**3.8.8** (Freies Monoid als Funktor; fast identisch mit Aufgabe 3.8.9). Sei  $\varphi: X \rightarrow Y$  ein Morphismus in  $\text{Set}$ . Sei  $(F(X), \tau_X)$  das freie Monoid über  $X$  und sei  $(F(Y), \tau_Y)$  das freie Monoid über  $Y$ . Betrachte das folgende Diagramm (in  $\text{Set}$ ) zunächst ohne den gestrichelten Morphismus

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow \tau_X & & \downarrow \tau_Y \\ F(X) & \dashrightarrow & F(Y). \end{array}$$

Da  $F(X)$  das freie Monoid über  $X$  ist, gibt es genau einen gestrichelten Morphismus in  $\text{Mon}$ , der das obige Diagramm kommutativ macht. Wir nennen diesen Morphismus  $F(\varphi)$ . Aus der universellen Eigenschaft des freien Monoids folgt sofort, dass dies einen Funktor

$$F = \text{Free}_{\text{Mon}}: \text{Set} \rightarrow \text{Mon}$$

definiert.

**Aufgabe 3.8.9.** Sei  $V: \text{Mon} \rightarrow \text{Set}$  der Vergissfunktors (cf. (3.8.2)). Fixiert man für jede Menge  $X$  ein freies Monoid  $(W_X, \tau_X)$  über  $X$ , so gibt es genau einen Funktor

$$\text{Free} = \text{Free}_{\text{Mon}}: \text{Set} \rightarrow \text{Mon},$$

der auf Objekten durch  $X \mapsto \text{Free}(X) := W_X$  gegeben ist und die Eigenschaft hat, dass die Bijektionen

$$\begin{aligned} \theta_{X,M}: \text{Mon}(\text{Free}(X), M) &\xrightarrow{\sim} \text{Set}(X, V(M)), \\ \varphi &\mapsto V(\varphi) \circ \tau_X, \end{aligned}$$

für  $X \in \text{Set}$  und  $M \in \text{Mon}$ , mit Morphismen in  $\text{Set}$  kompatibel sind, dass also für alle Morphismen  $f: Y \rightarrow X$  in  $\text{Set}$  und alle Objekte  $M \in \text{Mon}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Mon}(\text{Free}(X), M) & \xrightarrow[\sim]{\theta_{X,M}} & \text{Set}(X, V(M)) \\ \downarrow \text{?} \circ \text{Free}(f) & & \downarrow \text{?} \circ f \\ \text{Mon}(\text{Free}(Y), M) & \xrightarrow[\sim]{\theta_{Y,M}} & \text{Set}(Y, V(M)) \end{array}$$

kommutiert. (Die Bijektionen  $\theta_{X,M}$  sind eh mit Morphismen in  $\text{Mon}$  kompatibel.)

Hinweis: Wähle  $M$  geschickt, um  $\text{Free}(f)$  zu definieren.

Bemerkung: Dies zeigt, dass der Funktor *Nimm-freies-Monoid*  $\text{Free}_{\text{Mon}}: \text{Set} \rightarrow \text{Mon}$  linksadjungiert zum Vergissfunktors  $V: \text{Mon} \rightarrow \text{Set}$  ist. Man nennt auch  $(\text{Free}_{\text{Mon}}, V)$  ein adjungiertes Paar von Funktoren oder sagt, dass  $V$  rechtsadjungiert zu  $\text{Free}_{\text{Mon}}$  ist.

**Satz 3.8.10.** Sei  $X$  eine Menge.

- (a) Es gibt ein Paar  $(F, \tau)$ , bestehend aus einer Gruppe  $F$  und einem Morphismus  $\tau: X \rightarrow F$  von Mengen, so dass für jede Gruppe  $G$  das Vorschalten von  $\tau$  eine Bijektion

$$(3.8.4) \quad (? \circ \tau): \text{Grp}(F, G) \xrightarrow{\sim} \text{Set}(X, G)$$

induziert. Wir nennen eine Abbildung  $\tau$  von einer Menge in eine Gruppe mit dieser Eigenschaft eine **universelle Menge-Gruppe-Abbildung**.<sup>56</sup>

- (b) Sind  $\tau: X \rightarrow F$  und  $\tau': X \rightarrow F'$  universelle Mengen-Gruppe-Abbildungen, so gibt es genau einen Morphismus  $c: F \rightarrow F'$  von Gruppen mit  $c \circ \tau = \tau'$ , und genau einen Morphismus  $d: F' \rightarrow F$  von Gruppen mit  $d \circ \tau' = \tau$ , und  $c$  und  $d$  sind zueinander inverse Isomorphismen.

Man nennt ein Paar  $(F, \tau)$  wie in (a) (oder auch nur  $F$ , wobei  $\tau$  implizit mitverstanden ist) eine oder die **freie Gruppe über  $X$** . Oft schreiben wir sie als  $\text{Free}_{\text{Grp}}(X)$  oder kürzer als  $F(X)$ . Der bestimmte Artikel ist durch die in (b) beschriebene „Eindeutigkeit bis auf eindeutigen Isomorphismus“ gerechtfertigt.

*Beweis.* (a)

- Nimm  $X^\pm := X \times \{+1, -1\}$  als Alphabet und betrachte das zugehörige freie Monoid  $W^\pm := \text{Free}_{\text{Mon}}(X^\pm)$ . Elemente  $(a_1, \varepsilon_1)(a_2, \varepsilon_2) \dots (a_n, \varepsilon_n)$  werden als  $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n}$  notiert. Ein typisches Element von  $W^\pm$  hat also die Gestalt  $xyx^{-1}x^{-1}yy^{-1}y := x^1 y^1 x^{-1} x^{-1} y^1 y^{-1} y^1$ , für  $x, y \in X$ .
- Betrachte auf  $W^\pm$  die kleinste Äquivalenzrelation  $\sim$ , so dass gelten:
  - $xx^{-1} \sim e \sim x^{-1}x$  für alle  $x \in X$  (hier ist  $e$  das leere Wort),

<sup>56</sup>Diese Sprechweise ist nicht sehr verbreitet.

–  $w \sim v$  impliziert  $uw \sim uv$  und  $wu \sim vu$  für alle  $u, v, w \in W^\pm$ .

- Definiere  $F := W^\pm / \sim$ . Die Monoidverknüpfung auf  $W^\pm$  steigt wegen der zweiten Bedingung an  $\sim$  zu einer Verknüpfung auf  $F$  ab, mit der  $F$  ein Monoid wird (Assoziativität ist klar, und  $[e]$  ist neutrales Element). Genauer ist  $F$  eine Gruppe: Jedes  $f \in F$  hat die Form  $f = [a^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}]$ ; setze  $f' := [a_n^{-\varepsilon_n} \dots a_1^{-\varepsilon_1}]$ ; dann gilt  $ff' = [e] = f'f$  auf Grund unserer Bedingungen an  $\sim$ . Beispielsweise hat  $xyx^{-1}x^{-1}yy^{-1}y$  als Inverses  $y^{-1}yy^{-1}xxy^{-1}x^{-1}$ .
- Definiere  $\tau$  als Verknüpfung

$$\tau: X \xrightarrow{x \mapsto x = x^1 = (x,1)} X^\pm \rightarrow W^\pm \twoheadrightarrow F$$

der offensichtlichen drei Abbildungen.

- Da  $F$  als Gruppe von  $\tau(X)$  erzeugt ist, ist jeder Gruppenmorphismus  $\gamma: F \rightarrow G$  eindeutig durch  $\gamma \circ \tau$  bestimmt.

Gegeben eine beliebige Abbildung  $\varphi: X \rightarrow G$  in eine Gruppe  $G$ , setzen wir sie zunächst per  $x^\varepsilon \mapsto \varphi(x)^\varepsilon$  zu einer Abbildung  $X^\pm \rightarrow G$  fort. Diese kommt von einem eindeutigen Monoidmorphismus  $\tilde{\varphi}: W^\pm \rightarrow G$ , da  $X^\pm \rightarrow W^\pm$  eine universelle Menge-Monoid-Abbildung ist. Nun betrachte man die Äquivalenzrelation  $\approx$  auf  $W^\pm$ , deren Äquivalenzklassen genau die nichtleeren Fasern der Abbildung  $\tilde{\varphi}$  sind, für die also  $w \approx v$  genau dann gilt, wenn  $\tilde{\varphi}(w) = \tilde{\varphi}(v)$  gilt. Da für die Relation  $\approx$  offensichtlich die beiden oben an  $\sim$  gestellten Forderungen gelten, faktorisiert  $\tilde{\varphi}$  eindeutig als Komposition  $W^\pm \twoheadrightarrow F \xrightarrow{\tilde{\varphi}} G$ . Da  $\tilde{\varphi}$  ein Monoidmorphismus ist und  $W^\pm \rightarrow F$  ein surjektiver Monoidmorphismus ist, ist auch  $\tilde{\varphi}$  ein Monoidmorphismus. Da  $F$  und  $G$  Gruppen sind, ist  $\tilde{\varphi}$  automatisch ein Gruppenmorphismus. Nach Konstruktion gilt  $\tilde{\varphi} \circ \tau = \varphi$ . Dies zeigt, dass  $(F, \tau)$  eine universelle Menge-Gruppe-Abbildung ist.

(b): Kann der Leser mittlerweile selbst. □

**3.8.11** (Freie Gruppe als Funktor). Analog wie in 3.8.8 erhalten wir einen Funktor

$$F = \text{Free}_{\text{Grp}}: \text{Set} \rightarrow \text{Grp}.$$

**Notation 3.8.12.** Ist  $F(X)$  die im Beweis von Satz 3.8.10 konstruierte freie Gruppe über  $X$  und ist  $w \in W^\pm$  ein Wort, so schreiben wir sein Bild in  $F(X)$  meist ebenfalls als  $w$  statt als  $[w]$ . Da freie Gruppen eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus sind, ist diese Notation auch allgemein sinnvoll: Ist  $(F(X), \tau)$  eine freie Gruppe über  $X$ , so liefert beispielsweise das Wort  $xyx^{-1}$  das Gruppenelement  $\tau(x)\tau(y)\tau(x)^{-1} \in F(X)$ , das wir schlicht als  $xyx^{-1}$  notieren.

**Aufgabe 3.8.13** (Elemente der freien Gruppe als gekürzte Wörter). Wir verwenden Notation aus dem Beweis von Satz 3.8.10. Wir nennen ein Wort  $a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n} \in W_n^\pm$  **gekürzt** (oder manchmal vollständig gekürzt), falls für alle  $i = 1, \dots, n-1$  gilt: Aus  $a_i = a_{i+1}$  folgt  $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ . Sei  $K \subset W^\pm$  die Menge aller gekürzten Wörter.

(a) Die Komposition

$$K \hookrightarrow W^\pm \twoheadrightarrow F = F(X)$$

ist bijektiv, jedes Element der freien Gruppe  $F = F(X)$  läßt sich also durch genau ein gekürztes Wort repräsentieren.

Hinweis (für die Injektivität): Konstruieren Sie eine geeignete Operation von  $F = F(X)$  auf  $K$ , also einen Gruppenmorphismus  $F \rightarrow \text{Set}(K, K)^\times = \text{Aut}_{\text{Set}}(K)$ .



Genauerer Hinweis: Die Operation von  $x \in X$  auf  $w = (a_1^{\varepsilon_1}, a_2^{\varepsilon_2}, \dots, a_n^{\varepsilon_n}) \in K$  ist durch

$$x.w := \begin{cases} (a_2^{\varepsilon_2}, \dots, a_n^{\varepsilon_n}) & \text{falls } x = a_1 \text{ und } \varepsilon_1 = -1, \\ (x^1, a_1^{\varepsilon_1}, a_2^{\varepsilon_2}, \dots, a_n^{\varepsilon_n}) & \text{sonst,} \end{cases}$$

definiert. Für  $w = ()$  das leere Wort ist  $x.w$  als  $(x^1)$  zu interpretieren.

- (b) (leichte Folgerung) Seien  $k \in K$  und  $w \in W^\pm$  mit  $[k] = [w]$ . Dann gilt  $\ell(k) \leq \ell(w)$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $k = w$  gilt (hier ist  $\ell$  die Länge eines Wortes im Alphabet  $X^\pm$ , vgl. (3.8.3) für die abstrakte Definition).

**Aufgabe 3.8.14.** Ist  $\varphi: X \rightarrow Y$  eine injektive Abbildung von Mengen, so ist die induzierte Abbildung  $F(\varphi): F(X) \rightarrow F(Y)$  freier Gruppen ebenfalls injektiv.

Bemerkung: Mit  $\varphi$  ist auch  $F(\varphi)$  surjektiv. Diese beiden Aussagen gelten natürlich auch für freie Monoide.

Hinweis: Entweder per universeller Eigenschaft oder mit Aufgabe 3.8.13.

**Aufgabe 3.8.15.** (Falls projektive Objekte bekannt.) Freie Gruppen sind projektive Objekte von Grp.

Bemerkung: Freie Gruppen sind genau die projektiven Objekte von Grp, wie man leicht aus dem Satz von Nielsen-Schreier folgert (siehe 3.8.17).

**Beispiele 3.8.16.** Die folgenden Aussagen verwenden Aufgabe 3.8.13.

- Die freie Gruppe  $F(\{a\})$  über der einelementigen Menge  $\{a\}$  besteht genau aus den folgenden paarweise verschiedenen Elementen:  $\dots, a^{-2} = a^{-1}a^{-1}, a^{-1}, a^0 = e, a^1 = a, a^2 = aa, a^3, \dots$ . Die Abbildung  $\{a\} \rightarrow \mathbb{Z}$  von Mengen entspricht dem (Iso-)Morphismus  $F(\{a\}) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ ,  $a^n \mapsto n$ , von (abelschen) Gruppen.
- Ist  $X$  eine Menge, so liefert die Abbildung  $X \rightarrow \{\pm 1\}$ ,  $x \mapsto 1$ , von Mengen einen Morphismus  $\text{sgn}: F(X) \rightarrow \{\pm 1\}$  von Gruppen, der jedem Wort in  $X$  seine *Signatur* zuordnet.
- Die freie Gruppe  $F(\{a, b\})$  über der zweielementigen Menge  $\{a, b\}$  besteht genau aus den folgenden paarweise verschiedenen nichtdurchgestrichenen Elementen

Gekürzte Rep. der Länge 0:	$e,$
Gekürzte Rep. der Länge 1:	$a, a^{-1}, b, b^{-1},$
Gekürzte Rep. der Länge 2:	$aa, \cancel{aa}^{-1}, ab, ab^{-1},$ $\cancel{a}^{-1}a, a^{-1}a^{-1}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1},$ $ba, ba^{-1}, bb, \cancel{bb}^{-1},$ $b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, \cancel{b}^{-1}b, b^{-1}b^{-1},$
Gekürzte Rep. der Länge 3:	$aaa, \dots$
	$\vdots$

wobei der Leser hoffentlich die Systematik unseres Aufschreibverfahrens erkennt.

Ende der 13. Vorlesung am 21.05.2019, freie Gruppe als Funktor noch nicht erklärt.

**3.8.17.** Der Satz von Nielsen-Schreier besagt, dass jede Untergruppe einer freien Gruppe wieder frei ist (vgl. Aufgabe 3.8.18). Dies kann man mit algebraischer Topologie und genauer mit Überlagerungstheorie beweisen, siehe Wikipedia.

**Aufgabe 3.8.18.** In der freien Gruppe  $F(\{x, y\})$  ist die von den beiden Elementen  $x$  und  $a := yxyx^{-1}y^{-1}$  erzeugte Untergruppe  $U$  wieder eine freie Gruppe. Genauer ist sie frei über  $x$  und  $a$ , d. h. die Inklusionsabbildung  $\{x, a\} \hookrightarrow U$  ist eine universelle Menge-Gruppe-Abbildung.

Hinweis: Aufgabe 3.8.13

**Aufgabe 3.8.19.** Sei  $e \neq g \in F(X)$  ein Element der freien Gruppe über einer Menge  $X$ , das vom Einselement verschieden ist. Dann hat  $g$  unendliche Ordnung.

Hinweis: Aufgabe 3.8.13

### 3.9. Koproducte und Pushouts von Gruppen.

**Definition 3.9.1.** Sei  $G$  eine beliebige Gruppe. Sei  $(F(G), \tau)$  die freie Gruppe über der Menge  $G$ . Sei

$$(3.9.1) \quad \alpha: F(G) \rightarrow G$$

der eindeutige Gruppenmorphismus mit  $\alpha \circ \tau = \text{id}_G$ ; er ist durch „Ausmultiplizieren von Wörtern“ gegeben; sind beispielsweise  $g \neq h$  Elemente von  $G$ , so sind die gekürzten Wörter  $(g, h, g^{-1})$ ,  $(gh, g^{-1})$ ,  $(g, hg^{-1})$ ,  $(ghg^{-1})$  (der Längen 3, 2, 2, 1) verschiedene<sup>57</sup> Elemente von  $F(G)$ , die auf dasselbe Element  $ghg^{-1}$  von  $G$  abgebildet werden. Man nennt die Elemente von  $R(G) := \text{Ker}(\alpha)$  die **Relationen von  $G$** . Identifiziert man Elemente von  $F(G)$  mit gekürzten Wörtern (Aufgabe 3.8.13), so ist eine Relation ein gekürztes Wort, das ausmultipliziert das neutrale Element von  $G$  ergibt. Beispielsweise ist das gekürzte Wort  $(-1)(+2)(-1)$  eine Relation von  $\mathbb{Z}$ .

**Satz 3.9.2.** In der Kategorie der Gruppen haben je zwei Gruppen ein Koproduct. Allgemeiner existieren beliebige Koproducte in Grp.

**3.9.3.** Eine konkrete Beschreibung des Koproducts wird in Aufgabe 3.9.6 gegeben.

*Beweis.* Seien  $G_1, G_2 \in \text{Grp}$  Objekte. Betrachte für  $i \in \{1, 2\}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 G_i & \xrightarrow{\text{incl}_i} & G_1 \sqcup G_2 \\
 \downarrow \tau_{G_i} & & \downarrow \tau_{G_1 \sqcup G_2} \\
 R(G_i) \hookrightarrow F(G_i) & \xrightarrow{F(\text{incl}_i)} & F(G_1 \sqcup G_2) \\
 \downarrow \alpha_i & & \downarrow \pi \\
 G_i & \xrightarrow{\beta_i} & \frac{F(G_1 \sqcup G_2)}{N}
 \end{array}$$

$\swarrow \text{triv}$

Das obere Quadrat besteht aus den offensichtlichen Morphismen und ist kommutativ. Der Morphismus  $\alpha_i$  ist der eindeutige Morphismus von Gruppen mit

$$(3.9.2) \quad \alpha_i \circ \tau_{G_i} = \text{id}_{G_i},$$

<sup>57</sup>Hier werden Wörter als Tupel geschrieben, denn die Wortschreibweise  $ghg^{-1}$  ist wegen der Verknüpfung auf  $G$  mehrdeutig.

vgl. (3.9.1). Dessen Kern ist  $R(G_i)$ , die Menge der Relationen von  $G_i$ , und  $\rho_i$  ist die entsprechende Inklusion, und  $\text{triv}$  ist der triviale Gruppenmorphismus, und das Dreieck kommutiert. Da mit  $\text{incl}_i$  auch  $F(\text{incl}_i)$  injektiv ist (Aufgabe 3.8.14), können wir  $R(G_1)$  und  $R(G_2)$  als <sup>58</sup> Teilmengen von  $F(G_1 \sqcup G_2)$  auffassen. Sei  $N$  der kleinste Normalteiler von  $F(G_1 \sqcup G_2)$ , der  $R(G_1)$  und  $R(G_2)$  enthält, und  $\pi$  sei die kanonische Abbildung in die Quotientengruppe. Nun ist klar, dass es genau einen Morphismus  $\beta_i$  in  $\text{Grp}$  gibt, der das untere Quadrat kommutativ macht. Wir behaupten, dass  $(\frac{F(G_1 \sqcup G_2)}{N}, \beta_1, \beta_2)$  ein Koprodukt von  $G_1$  und  $G_2$  ist.

Sei  $T$  eine beliebige Gruppe und seien  $\gamma_i: G_i \rightarrow T$  Gruppenmorphismen, für  $i \in \{1, 2\}$ . Da  $G_1 \sqcup G_2$  das Koprodukt in  $\text{Set}$  ist, existiert genau ein Morphismus  $\delta: G_1 \sqcup G_2 \rightarrow T$  von Mengen mit  $\delta \circ \text{incl}_i = \gamma_i$  für alle  $i \in \{1, 2\}$ . Da  $\tau_{G_1 \sqcup G_2}$  eine universelle Menge-Gruppe-Abbildung ist, existiert genau ein Morphismus  $\delta': F(G_1 \sqcup G_2) \rightarrow T$  von Gruppen mit  $\delta' \circ \tau_{G_1 \sqcup G_2} = \delta$ .

Um zu zeigen, dass  $\delta'$  über  $\pi$  faktorisiert, ist  $\delta'(R(G_i)) = \{1\}$  für alle  $i \in \{1, 2\}$  zu zeigen. Zunächst gilt für alle  $i \in \{1, 2\}$

$$\delta' \circ F(\text{incl}_i) \circ \tau_{G_i} = \delta' \circ \tau_{G_1 \sqcup G_2} \circ \text{incl}_i = \delta \circ \text{incl}_i = \gamma_i \stackrel{(3.9.2)}{=} \gamma_i \circ \alpha_i \circ \tau_{G_i}$$

Da  $\tau_{G_i}$  eine universelle Menge-Gruppe-Abbildung ist, folgt

$$\delta' \circ F(\text{incl}_i) = \gamma_i \circ \alpha_i.$$

Vorschalten von  $\rho_i$  liefert

$$\delta' \circ F(\text{incl}_i) \circ \rho_i = \gamma_i \circ \alpha_i \circ \rho_i = \gamma_i \circ \text{triv} = \text{triv}.$$

Dies zeigt  $\delta'(R(G_i)) = \{1\}$  für alle  $i \in \{1, 2\}$ . Also gibt es genau einen Gruppenmorphismus  $\delta'': \frac{F(G_1 \sqcup G_2)}{N} \rightarrow T$  mit  $\delta'' \circ \pi = \delta'$ . Für alle  $i \in \{1, 2\}$  gilt

$$\delta'' \circ \beta_i \stackrel{(3.9.2)}{=} \delta'' \circ \beta_i \circ \alpha_i \circ \tau_{G_i} = \delta'' \circ \pi \circ \tau_{G_1 \sqcup G_2} \circ \text{incl}_i = \delta' \circ \tau_{G_1 \sqcup G_2} \circ \text{incl}_i = \delta \circ \text{incl}_i = \gamma_i.$$

Wegen (3.9.2) sieht man sofort, dass  $\frac{F(G_1 \sqcup G_2)}{N}$  von den  $\beta_i(G_i)$ , für  $i \in \{1, 2\}$  als Gruppe erzeugt ist. Somit gibt es höchstens einen Gruppenmorphismus  $\varepsilon: \frac{F(G_1 \sqcup G_2)}{N} \rightarrow T$  mit  $\varepsilon \circ \beta_i = \gamma_i$  für alle  $i \in \{1, 2\}$ . Dies zeigt, dass unsere Konstruktion ein Koprodukt ist.

Ist  $(G_i)_{i \in I}$  eine beliebige Familie von Gruppen, so zeigt eine offensichtliche Modifikation des obigen Beweises (ersetze  $G_1 \sqcup G_2$  durch  $\bigsqcup G_i$  und definiere  $N$  als den kleinsten Normalteiler, der alle  $R(G_i)$  enthält), dass das Koprodukt  $\coprod G_i$  existiert.  $\square$

**3.9.4.** Sei  $G \amalg H$  das Koprodukt zweier Gruppen  $G$  und  $H$ . Dann ist  $G \amalg H$  als Gruppe von den Bildern von  $G \rightarrow G \amalg H$  und  $H \rightarrow G \amalg H$  erzeugt. Dies folgt entweder aus dem Beweis von Satz 3.9.2 oder aus der folgenden Beobachtung: Sei  $K$  die von den Bildern von  $G$  und  $H$  erzeugte Untergruppe von  $G \amalg H$ . Dann ist  $K$  zusammen mit den Gruppenmorphismen  $G \rightarrow K$  und  $H \rightarrow K$  ein Koprodukt von  $G$  und  $H$ . Wegen der Eindeutigkeit von Koprodukten folgt  $K = G \amalg H$ .

**3.9.5.** Das Koprodukt  $G \amalg H$  zweier Gruppen wird manchmal als **freies Produkt** bezeichnet und als  $G * H$  notiert. Es handelt sich dabei aber keinesfalls um ein Produkt im kategoriellen Sinne.<sup>59</sup> Deswegen werde ich den Begriff *freies Produkt* vermeiden, die Notation  $G * H$  jedoch nutzen (um Verwechslungsgefahr mit der disjunkten Vereinigung als Mengen zu vermeiden).

<sup>58</sup> disjunkte (wie aus Aufgabe 3.8.13 folgt)

<sup>59</sup> Vermutlich kommt der Name daher, dass man „Produkte von Elementen der beiden Gruppen bildet, ohne weitere Relationen einzuführen“, vgl. Aufgabe 3.9.6.

**Aufgabe 3.9.6.** Seien  $G$  und  $H$  Gruppen. Sei  $W := F(G \sqcup H) = \text{Free}_{\text{Mon}}(G \sqcup H)$  das freie Monoid über  $G \sqcup H$ , also die Menge der Wörter im Alphabet  $G \sqcup H$ . Ein Wort  $(a_1, \dots, a_n) \in W$  heißt **reduziert**, falls darin weder ein neutrales Element vorkommt noch zwei aufeinanderfolgende Buchstaben aus derselben Gruppe kommen:

- $a_i \neq e_G$  und  $a_i \neq e_H$  für alle  $i = 1, \dots, n$ ;
- $a_i \in G \Leftrightarrow a_{i+1} \notin G$  für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Durch Weglassen neutraler Elemente und Multiplizieren benachbarter Buchstaben aus derselben Gruppe kann man offensichtlich jedes Wort in ein reduziertes Wort verwandeln. Sei  $R$  die Menge der reduzierten Wörter. Zeige, dass die Verknüpfung

$$R \hookrightarrow W \rightarrow G * H$$

bijektiv ist. Jedes Element des Koproducts  $G * H$  hat also einen eindeutigen reduzierten Repräsentanten.

Hinweis: Ähnlich wie in Aufgabe 3.8.13 definiere man eine Operation von  $G * H$  auf  $R$ , indem man angibt, wie  $G$  und  $H$  operieren (dabei sind jeweils vier Fälle zu unterscheiden).

Bemerkung: Man kann die Gruppenverknüpfung von  $G * H$  entlang unserer Bijektion auf  $R$  übertragen: Hänge zwei reduzierte Wörter aneinander und reduziere das so erhaltene Wort.

Bemerkung: In der Literatur wird  $G * H$  oft als Menge der reduzierten Wörter mit der gerade beschriebenen Verknüpfung definiert, wobei aber diverse Details geprüft werden müssen, etwa Assoziativität.

**Definition 3.9.7.** Sei  $X$  eine Menge und  $F(X) = \text{Free}_{\text{Grp}}(X)$  die freie Gruppe über  $X$ . Sei  $R \subset F(X)$  eine Teilmenge<sup>60</sup>. Wir nennen

$$\langle X \mid R \rangle := \frac{F(X)}{N}$$

die **von der Menge  $X$  mit den Relationen  $R$  erzeugte Gruppe**, wobei  $N = N(R)$  der kleinste Normalteiler von  $F(X)$  ist, der  $R$  enthält. Man nennt  $R$  in diesem Kontext eine Menge von **Relationen**<sup>61</sup>. Wir verwenden oft abkürzende Schreibweisen, beispielsweise stehen

$$\langle a, b \mid ab = ba \rangle \quad \text{und} \quad \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$$

für dieselbe Gruppe

$$\langle \{a, b\} \mid \{aba^{-1}b^{-1}\} \rangle,$$

wobei man implizit davon ausgeht, dass  $a \neq b$  gilt.

Wir schreiben auch  $\langle X \rangle = \text{Free}_{\text{Grp}}(X)$  statt  $\langle X \mid \emptyset \rangle$  – dies ist also die freie Gruppe über  $X$  (ohne Relationen), die man auch freie Gruppe mit Erzeugern (den Elementen von)  $X$  nennt. Abkürzend schreibt man beispielsweise  $\langle a, b \rangle$  statt  $\langle \{a, b\} \rangle$ .

**Aufgabe 3.9.8.** Die Gruppen  $\langle a, b \mid ab = ba \rangle$  und  $\mathbb{Z}^2$  sind isomorph.

**3.9.9.** Für jede Gruppe  $G$  gilt  $\langle G \mid R(G) \rangle \xrightarrow{\sim} G$ . Dies ist klar nach der Definition 3.9.1 von  $R(G)$ .

<sup>60</sup> Stattdessen kann man auch mit einer Menge von Wörtern im Alphabet  $X \times \{\pm 1\}$  starten und dann  $R$  als deren Bild in  $F(X)$  definieren

<sup>61</sup> Dieser Begriff einer Relation unterscheidet sich von dem in Definition 3.9.1.

**3.9.10.** Seien  $X$  und  $R$  wie in Definition 3.9.7. Dann gilt für jede Gruppe  $H$

$$\text{Grp}(\langle X \mid R \rangle, H) = \{f \in \text{Set}(X, H) \mid \tilde{f}(R) = \{1\}\},$$

wobei  $\tilde{f}: F(X) \rightarrow H$  der eindeutig durch  $f: X \rightarrow H$  bestimmte Morphismus von Gruppen ist.

**3.9.11.** Ist eine Gruppe durch Erzeuger und Relationen gegeben, so ist es im Allgemeinen algorithmisch nicht möglich zu entscheiden, ob zwei Wörter in den Erzeugern und ihren formalen Inversen dasselbe Gruppenelement darstellen (siehe *word problem for groups*, Satz von Novikov-Boone).

Insofern ist es stets wünschenswert, eine durch Erzeuger und Relationen gegebene Gruppe mit einer bekannten Gruppe zu identifizieren (oder ein Repräsentantensystem von Wörtern für die Elemente der Gruppe zu finden). Beispielsweise gilt

$$(3.9.3) \quad \langle S, T \mid S^2 = e, (ST)^3 = e \rangle \xrightarrow{\sim} \frac{\text{SL}_2(\mathbb{Z})}{\{\pm I_2\}}$$

$$S \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Koprodukt  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$  ist ebenfalls isomorph zu diesen beiden Gruppen.

**Aufgabe 3.9.12** (Koprodukt von Gruppen, die durch Erzeuger und Relationen gegeben sind). Seien  $G = \langle X \mid R \rangle$  und  $H = \langle Y \mid S \rangle$  durch Erzeuger und Relationen gegebene Gruppen. Dann ist  $\langle X \sqcup Y \mid R \cup S \rangle$  mit den offensichtlichen Abbildungen ein Koprodukt von  $G$  und  $H$  (Hinweis: Verwende 3.9.10); hierbei wird  $R \cup S$  als Teilmenge von  $F(X \sqcup Y)$  aufgefasst (nach Aufgabe 3.8.14 können wir  $R$  und  $S$  als Teilmengen von  $F(X \sqcup Y)$  auffassen, und der Schnitt dieser Teilmengen enthält höchstens das neutrale Element, etwa nach Aufgabe 3.8.13).

Insbesondere (dies ist zu zeigen!), haben je zwei Gruppen ein Koprodukt. (Analoges gilt für Familien von Gruppen).

Berechne das Koprodukt  $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ .

**Satz 3.9.13.** Die Kategorie  $\text{Grp}$  der Gruppen hat alle Pushouts.

*Beweis.* Seien  $\varphi_1: G \rightarrow G_1$  und  $\varphi_2: G \rightarrow G_2$  Morphismen in  $\text{Grp}$ . Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi_2} & G_2 \\ & \searrow \text{incl}_2 & \downarrow \pi \circ \text{incl}_2 \\ & G_1 * G_2 & \\ \varphi_1 \downarrow & \nearrow \text{incl}_1 & \searrow \pi \\ G_1 & \xrightarrow{\pi \circ \text{incl}_1} & \frac{G_1 * G_2}{N} \end{array}$$

Dabei ist  $(G_1 * G_2, \text{incl}_1, \text{incl}_2)$  das Koprodukt von  $G_1$  und  $G_2$  (das obere linke Dreieck ist im Allgemeinen nicht kommutativ),  $N$  ist der kleinste Normalteiler von  $G_1 * G_2$ , der alle Elemente

$\text{incl}_1(\varphi_1(g))^{-1}\text{incl}_2(\varphi_2(g))$ , für  $g \in G$ , enthält, und  $\pi$  ist der offensichtliche Morphismus von Gruppen. Dann prüft man leicht, dass das äußere Quadrat kokartesisch ist.  $\square$

**3.9.14.** Der Pushout  $G_1 \amalg_G G_2$  zweier Gruppenmorphisamen  $G \rightarrow G_1$  und  $G \rightarrow G_2$  wird manchmal als **amalgamiertes freies Produkt** bezeichnet und als  $G_1 *_G G_2$  notiert (vgl. 3.9.5). Ich werde die Notation  $G_1 *_G G_2$  nutzen, den Begriff *amalgamiertes freies Produkt* aber meiden.

**Aufgabe 3.9.15** (Pushout von Gruppen, die durch Erzeuger und Relationen gegeben sind). Sei eine Menge  $X = X_1 \cup X_2$  Vereinigung zweier Teilmengen  $X_1$  und  $X_2$ , und sei  $X_0 = X_1 \cap X_2$  deren Schnitt. Seien  $R_i \subset F(X_i) = \text{Free}_{\text{Grp}}(X_i)$  Mengen von Relationen, für  $i = 0, 1, 2$ . Sei  $R_0$  im von  $R_i$  erzeugten Normalteiler enthalten, für  $i = 1, 2$  (so dass die obere und linke Abbildung im folgenden Diagramm definiert sind). Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \langle X_0 \mid R_0 \rangle & \longrightarrow & \langle X_2 \mid R_2 \rangle \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle X_1 \mid R_1 \rangle & \longrightarrow & \langle X \mid R_1 \cup R_2 \rangle \end{array}$$

mit den offensichtliche Morphismen ein kokartesisches Diagramm in Grp.

Hinweis: Verwende 3.9.10.

Bemerkung: Im Fall  $R_0 = R_1 = R_2 = \emptyset$  zeigt dies  $\langle X \rangle = \langle X_1 \rangle *_{\langle X_0 \rangle} \langle X_2 \rangle$ . Sind überdies  $X_1$  und  $X_2$  disjunkt, so gilt  $\langle X \rangle = \langle X_1 \rangle *_{\langle \emptyset \rangle} \langle X_2 \rangle = \langle X_1 \rangle *_1 \langle X_2 \rangle = \langle X_1 \rangle * \langle X_2 \rangle$  (vgl. 3.7.7) – das Koprodukt zweier freier Gruppen ist also ebenfalls eine freie Gruppe.

Bonus: Verwende dies, um einen Alternativbeweis für die Existenz von Pushouts in Grp zu geben. Hinweis: Ist  $\langle X \mid R \rangle \rightarrow \langle Y \mid S \rangle$  ein Morphismus von Gruppen, die durch Erzeuger und Relationen gegeben sind, so ist die Gruppe  $\langle Y, S \rangle$  isomorph zu  $\langle X \sqcup Y \mid S' \rangle$  für geeignete Relationen  $S'$ .

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 3.8.13, freie Gruppe und gekürzte Wörter
- (2) Aufgabe 3.7.11, Modulkategorien haben alle Pullbacks und Pushouts.
- (3) Aufgabe 3.9.6, konkrete Beschreibung Koprodukt von Gruppen
- (4) Aufgabe 3.9.12, Koprodukt von Gruppen, die durch Erzeuger und Relationen gegeben sind

Wer noch nicht genug hat:

- (1) (schon in Vorlesung gelöst:) Aufgabe 3.7.9, Top hat alle Pullbacks
- (2) Leicht: Aufgabe 3.9.8. (Wer mehr arbeiten möchte, zeigt den Isomorphismus (3.9.3)).
- (3) Aufgabe 3.9.15, Pushout von Gruppen, die durch Erzeuger und Relationen gegeben sind
- (4) Aufgabe 3.8.18, freie Untergruppe
- (5) Aufgabe 3.8.19, unendliche Ordnung
- (6) Aufgabe 3.7.10, offen bzw. surjektiv stabil unter Basiswechsel
- (7) Aufgabe 3.7.12, (ko)kartesisch als (Ko-)Produkt in Unter-/Überkategorie

### 3.10. Der Satz von Seifert und van Kampen.

**3.10.1.** Wir erinnern an die Definition eines Funktors A.2.1 und die Kategorie Cat der Kategorien, deren Morphismen die Funktoren sind und deren Verknüpfung die offensichtliche

Verknüpfung von Funktoren ist (vgl. A.2.14). Der Begriff eines kokartesischen Diagramms ist also auch in  $\text{Cat}$  sinnvoll.

**3.10.2.** Wir erinnern an das Fundamentalgruppoid  $\Pi_1(X)$  eines topologischen Raums  $X$  (siehe Definition 3.2.24). Die Zuordnung  $X \mapsto \Pi_1(X)$  wird wie folgt zu einem Funktor

$$\Pi_1: \text{Top} \rightarrow \text{Cat}.$$

Ist  $f: X \rightarrow Y$  ein Morphismus in  $\text{Top}$ , so ist der Funktor

$$\Pi_1(f): \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_1(Y)$$

alias Morphismus in  $\text{Cat}$  auf Objekten  $x \in \Pi_1(X) = X$  durch  $(\Pi_1(f))(x) = f(x)$  und auf Morphismen  $[\alpha] \in (\Pi_1(X))(x, x') = \pi_1(X, x, x')$  durch

$$(\Pi_1(f))([\alpha]) := [f \circ \alpha] \in (\Pi_1(Y))(f(x), f(x')) = \pi_1(Y, f(x), f(x'))$$

definiert.

**Satz 3.10.3** (Seifert-van Kampen für Fundamentalgruppoiden). *Sei ein topologischer Raum  $X = U \cup V$  die Vereinigung zweier offener Teilmengen  $U, V \subseteq X$ . Dann ist das von den Inklusionen induzierte Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(U \cap V) & \longrightarrow & \Pi_1(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi_1(U) & \longrightarrow & \Pi_1(X) \end{array}$$

in  $\text{Cat}$  kokartesisch.

*Beweis.* Das Diagramm ist offensichtlich kommutativ. Wir verwenden im Beweis die Notation  $U_{+1} := U$  und  $U_{-1} := V$ . Außerdem seien  $\iota_i: U_i \rightarrow X$  die Inklusionen.

Wir zeigen zunächst, dass ein Funktor  $F: \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{C}$  in eine beliebige Kategorie  $\mathcal{C}$  bereits eindeutig durch die Verknüpfungen  $F \circ \Pi_1(\iota_i)$ , für  $i = \pm 1$ , festgelegt ist. Für die Abbildung auf Objekten ist dies wegen  $X = U_{+1} \cup U_{-1}$  klar (man könnte auch sagen, dass das daran liegt, dass das Quadrat mit Ecken  $U \cap V, U, V, X$  kokartesisch in  $\text{Set}$  ist). Für die Abbildung auf Morphismenmengen folgt dies daraus, dass jeder Morphismus in  $\Pi_1(X)$  eine Verknüpfung von Morphismen ist, die von  $\Pi_1(U_{+1})$  oder  $\Pi_1(U_{-1})$  herkommen. Konkret sei  $g \in (\Pi_1(X))(x, x') = \pi_1(X, x, x')$  ein Morphismus. Sei  $\gamma \in \Omega(X, x, x')$  ein Weg mit  $[\gamma] = g$ . Mit dem Überdeckungssatz von Lebesgue 2.7.18 finden wir ein  $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$  und eine Unterteilung  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1$  des Einheitsintervalls und Vorzeichen  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$  mit  $\gamma|_{[a_{\rho-1}, a_\rho]} \in U_{\varepsilon_\rho}$  für alle  $\rho = 1, \dots, n$ . Sei  $\gamma_\rho: [0, 1] \rightarrow U_{\varepsilon_\rho}$  die Verknüpfung  $[0, 1] \rightarrow [a_{\rho-1}, a_\rho] \xrightarrow{\gamma} U_{\varepsilon_\rho}$ , wobei die erste Abbildung die offensichtliche Umparametrisierung ist. Dann gilt (mit beliebiger Klammerung)

$$\gamma \cong \gamma_n * \dots * \gamma_1.$$

Fassen wir  $\gamma_\rho$  als Morphismus  $[\gamma_\rho]$  in  $\Pi_1(U_{\varepsilon_\rho})$  auf, so gilt

$$g = [\gamma] = \Pi_1(\iota_{\varepsilon_n})([\gamma_n]) \circ \dots \circ \Pi_1(\iota_{\varepsilon_1})([\gamma_1]).$$

in  $\Pi_1(X)$ . Da  $F$  ein Funktor ist, folgt

$$(3.10.1) \quad F(g) = F(\Pi_1(\iota_{\varepsilon_n})([\gamma_n])) \circ \dots \circ F(\Pi_1(\iota_{\varepsilon_1})([\gamma_1])).$$

Dies zeigt die Eindeutigkeitsaussage in der Definition eines kokartesischen Diagramms.

Ende der 14. Vorlesung am 23.05.2019.

Für die Existenzaussage sei ein kommutatives Diagramm

$$(3.10.2) \quad \begin{array}{ccc} \Pi_1(U_{+1} \cap U_{-1}) & \longrightarrow & \Pi_1(U_{-1}) \\ \downarrow & & \downarrow^{G_{-1}} \\ \Pi_1(U_{+1}) & \xrightarrow{G_{+1}} & \mathcal{C} \end{array}$$

in  $\text{Cat}$  gegeben. Zu zeigen ist die Existenz eines Funktors  $F: \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{C}$  mit  $F \circ \Pi_1(\iota_i) = G_i$  für alle  $i = \pm 1$ .

Wir definieren  $F$  auf Objekten  $x \in \Pi_1(X) = X$  in der dafür einzig möglichen Weise durch

$$F(x) = \begin{cases} G_{+1}(x) & \text{falls } x \in U_{+1} = U, \\ G_{-1}(x) & \text{falls } x \in U_{-1} = V. \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert wegen  $G_{+1}(x) = G_{-1}(x)$  für  $x \in U_{+1} \cap U_{-1} = U \cap V$ .

Für die Definition von  $F$  auf Morphismen haben wir nach (3.10.1) nur eine Möglichkeit: Für jeden Morphismus  $g$  in  $\Pi_1(X)$  und jede Wahl  $(\gamma, n, (a_\rho)_{\rho=1}^n, (\varepsilon_\rho)_{\rho=1}^n)$  wie oben definiere

$$(3.10.3) \quad F_{\gamma, n, (a_\rho), (\varepsilon_\rho)} = G_{\varepsilon_n}([\gamma_n]) \circ \cdots \circ G_{\varepsilon_1}([\gamma_1]).$$

Zu zeigen ist, dass  $F_{\gamma, n, (a_\rho), (\varepsilon_\rho)}$  nur von  $g = [\gamma]$  abhängt.

Ist dies gezeigt, so nennen wir diesen nur von  $g$  abhängigen Morphismus  $F(g)$  und sehen sofort, dass dies einen Funktor  $F: \Pi_1(X) \rightarrow \mathcal{C}$  definiert: Die Gleichheiten  $F(\text{id}_x) = \text{id}_{F(x)}$  und  $F(g \circ h) = F(g) \circ F(h)$  sind leicht durch geschickte Wahlen einzusehen. Es ist auch klar, dass  $F \circ \Pi_1(\iota_i) = G_i$  für alle  $i = \pm 1$  gilt (wähle  $n = 1$ ).

Sei  $(\gamma, n, (a_\rho), (\varepsilon_\rho))$  eine Wahl für  $g$  wie oben. Gilt  $\gamma|_{[a_{\rho-1}, a_\rho]} \in U_{+1} \cap U_{-1}$  für ein  $\rho \in \{1, \dots, n\}$ , so ändert sich  $F_{\gamma, n, (a_\rho), (\varepsilon_\rho)}$  nicht, wenn wir  $\varepsilon_\rho$  durch  $-\varepsilon_\rho$  ersetzen, denn das Diagramm (3.10.2) ist kommutativ. Wir können unser Element also unzweideutig als  $F_{\gamma, n, (a_\rho)}$  schreiben. Wenn wir von einer Unterteilung des Intervalls zu einer Subunterteilung übergehen, so ändert sich dieses Element nicht, denn  $G_{+1}$  und  $G_{-1}$  sind Funktoren. Indem wir zu einer gemeinsamen Subunterteilung zweier gegebener Unterteilungen übergehen, sehen wir, dass  $F_{\gamma, n, (a_\rho)}$  nur von  $\gamma$  abhängt. Wir schreiben dieses Element als  $F_\gamma$ .

Seien nun  $\gamma$  und  $\beta$  Wege mit  $[\gamma] = [\beta]$ . Zu zeigen ist  $F_\gamma = F_\beta$ . Sei  $h: \gamma \cong \beta$  eine Homotopie von Wegen (mit festen Endpunkten). Mit Lebesgue finden wir eine Schachbrettunterteilung des Quadrats  $[0, 1] \times [0, 1]$ , so dass  $h$  jedes Feld nach  $U_{+1}$  oder  $U_{-1}$  abbildet. In jedem Feld des Schachbretts sind die beiden offensichtlichen Wege entlang des Randes von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke homotop. Analoges gilt für die entsprechenden beiden Wege entlang des Randes von der linken unteren Ecke  $(0, 0)$  des gesamten Schachbretts  $[0, 1] \times [0, 1]$  in die rechte obere Ecke  $(1, 1)$ . Die Verknüpfung dieser beiden Wege mit  $h$  sind die Wege  $\varepsilon * \gamma$  und  $\beta * \varepsilon$ . Indem man sich Feld für Feld durch das Schachbrett hangelt – mit dem Feld rechts unten beginnend –, sieht man, dass  $F_{\varepsilon * \gamma} = F_{\beta * \varepsilon}$  gilt. Da die Gleichheiten  $F_{\varepsilon * \gamma} = F_\gamma$  und  $F_{\beta * \varepsilon} = F_\beta$  offensichtlich sind, folgt daraus  $F_\gamma = F_\beta$  wie gewünscht.  $\square$

**Satz 3.10.4** (Satz von Seifert-van Kampen). *Sei ein topologischer Raum  $X = U \cup V$  die Vereinigung zweier offener Teilmengen  $U, V \subseteq X$ . Ist der Schnitt  $U \cap V$  wegzusammenhängend<sup>62</sup>,*

<sup>62</sup> Wer mag, kann hier ohne Einschränkung annehmen – so findet man dies meist in der Literatur, und wir werden uns zu Anfang des Beweises eh auf diesen Fall zurückziehen –, dass auch  $U$  und  $V$  und damit  $X$



so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x) & \longrightarrow & \pi_1(V, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

in Grp kokartesisch, wobei  $x \in U \cap V$  ein beliebiger Basispunkt ist und alle Morphismen die offensichtlich sind.

**3.10.5.** Als Spezialfall erhalten wir Satz [3.1.23](#).

**3.10.6.** Wir bereiten den Beweis von Satz [3.10.4](#) mit einigen allgemeinen Überlegungen vor.

Ist  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie und  $x$  ein Objekt, so ist  $\text{End}_{\mathcal{C}}(x) = \mathcal{C}(x, x) = \mathcal{C}(x)$  ein Monoid. Diesem ist die „Ein-Objekt-Kategorie“  $\underline{\mathcal{C}}(x)$  mit einem Objekt  $*$  und Morphismenmenge  $\underline{\mathcal{C}}(x)(*, *) := \mathcal{C}(x)$  zugeordnet (siehe Beispiele [A.1.5](#)). Dann definiert

$$\begin{aligned} i_x: \underline{\mathcal{C}}(x) &\rightarrow \mathcal{C}, \\ * &\mapsto x, \\ \underline{\mathcal{C}}(x)(*, *) &\xrightarrow{\text{id}} \mathcal{C}(x, x), \end{aligned}$$

tautologisch einen Funktor. Ist  $\mathcal{C}$  ein Gruppoid, das überdies in dem Sinne **zusammenhängend** ist, dass es für je zwei Objekte  $y, z \in \mathcal{C}$  einen Morphismus  $y \rightarrow z$  gibt (der automatisch ein Isomorphismus ist), so können wir einen Funktor in die andere Richtung konstruieren: Fixiere für jedes  $y \in \mathcal{C}$  einen Morphismus  $g_y: y \rightarrow x$ , wobei  $g_x = \text{id}_x: x \rightarrow x$  die Identität sei. Dann definiert

$$\begin{aligned} r_x: \mathcal{C} &\rightarrow \underline{\mathcal{C}}(x), \\ y &\mapsto *, \\ \mathcal{C}(y, z) &\xrightarrow{\sim} \underline{\mathcal{C}}(x)(*, *) = \mathcal{C}(x, x), \\ f &\mapsto g_z \circ f \circ g_y^{-1}, \end{aligned}$$

offensichtlich einen Funktor. Es ist klar, dass die Komposition

$$\underline{\mathcal{C}}(x) \xrightarrow{i_x} \mathcal{C} \xrightarrow{r_x} \underline{\mathcal{C}}(x)$$

der Identitätsfunktor ist. (Informell mag man sich vorstellen, dass  $\underline{\mathcal{C}}(x)$  ein Retrakt von  $\mathcal{C}$  ist.)

*Beweis.* Unser Diagramm ist offensichtlich kommutativ. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $U$  und  $V$  wegzusammenhängend sind (siehe [3.2.19](#)). Dann ist auch  $X = U \cup V$  wegzusammenhängend, und alle Fundamentalgruppoiden  $\Pi_1(X)$ ,  $\Pi_1(U)$ ,  $\Pi_1(V)$ ,  $\Pi_1(U \cap V)$  sind zusammenhängende Gruppoiden, so dass [3.10.6](#) auf sie angewendet werden kann. Sei  $x \in U \cap V$  und beachte  $(\Pi_1(X))(x, x) = \pi_1(X, x)$ . Wir wählen für jeden Punkt  $y \in X$  einen Weg  $\gamma_y \in \Omega(X, y, x)$ , der ganz in  $U$  bzw.  $V$  verläuft, falls  $y \in U$  bzw.  $V$  gilt (insbesondere verläuft er in  $U \cap V$ , falls  $y \in U \cap V$ ), wobei wir  $\gamma_x$  als konstanten Weg  $\gamma_x = \varepsilon_x \in \Omega(X, x, x)$  wählen.

wegzusammenhängend sind, denn die im folgenden Diagramm vorkommenden Fundamentalgruppen hängen ohnehin nur von der jeweiligen Wegzusammenhangskomponente von  $x$  ab (vgl. [3.2.19](#)).

Die Homotopieklassen dieser Wege liefern Morphismen in allen vier Fundamentalgroupoiden mit Zielobjekt  $x$ . Mit diesen Wahlen erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi_1(U \cap V) & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1(V) \\
 \downarrow & \searrow^{r_x} & \downarrow \\
 & \pi_1(U \cap V, x) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(V, x) \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 \Pi_1(U) & \xrightarrow{\quad} & \Pi_1(X) & \searrow^{r_x} \\
 & \searrow^{r_x} & \downarrow & \downarrow \\
 & \pi_1(U, x) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(X, x)
 \end{array}$$

in  $\text{Cat}$ . Wir stellen uns dieses Diagramm als einen Würfel mit den „Ein-Objekt-Kategorien“ auf der Vorderseite vor und nennen ihn den  $r_x$ -Würfel. Drehen wir alle mit  $r_x$  beschrifteten Pfeile um und beschriften sie mit  $i_x$ , so erhalten wir einen weiteren kommutativen Würfel, den wir  $i_x$ -Würfel nennen (vgl. Aufgabe 3.10.14 für den Rest des Beweises).

Sei nun  $G$  eine beliebige Gruppe und sei das linke kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(U \cap V, x) & \longrightarrow & \pi_1(V, x) & & \Pi_1(U \cap V) & \longrightarrow & \Pi_1(V) \\
 \downarrow & & \downarrow^{F'} & & \downarrow & & \downarrow^{F' \circ r_x} \\
 \pi_1(U, x) & \xrightarrow{F} & G & & \Pi_1(U) & \xrightarrow{F \circ r_x} & G
 \end{array}$$

in  $\text{Grp}$  gegeben. Das mittlere kommutative Diagramm in  $\text{Cat}$  entsteht daraus, indem wir jede Gruppe als Ein-Objekt-Kategorie auffassen<sup>63</sup>. Das rechte kommutative Diagramm entsteht aus dem mittleren, indem wir in den drei Ecken links unten/links oben/rechts oben den jeweiligen Funktor  $r_x$  vorausschalten.

Nach Satz 3.10.3 existiert genau ein Funktor  $\Pi_1(X) \rightarrow \underline{G}$ , dessen Verknüpfungen mit  $\Pi_1(U) \rightarrow \Pi_1(X)$  und  $\Pi_1(V) \rightarrow \Pi_1(X)$  die Funktoren  $\underline{F} \circ r_x$  und  $\underline{F}' \circ r_x$  in dem rechten Diagramm sind. Vorschalten von  $i_x$  liefert einen Funktor  $\underline{\pi}_1(X, x) \rightarrow \underline{G}$  zwischen Ein-Objekt-Kategorien, also einen Gruppenmorphismus  $\pi_1(X, x) \rightarrow \underline{G}$ ; wegen  $r_x \circ i_x = \text{id}$  und Kommutativität der rechten und unteren Seite des  $i_x$ -Würfels sind dessen Verknüpfungen mit  $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  und  $\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  die gegebenen Gruppenmorphis­men  $F$  und  $F'$ . Dies zeigt die Existenzaussage in der Definition eines kokartesischen Diagramms.

Die Eindeutigkeitsaussage wird ähnlich bewiesen: Sind  $\varphi, \psi: \pi_1(X, x) \rightarrow \underline{G}$  zwei Gruppenmorphis­men, deren Verknüpfungen mit  $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  bzw.  $\pi_1(V, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  übereinstimmen, so folgt aus unserem kommutativen Würfel und Satz 3.10.3, dass die beiden Gruppenmorphis­men  $\underline{\varphi} \circ r_x$  und  $\underline{\psi} \circ r_x: \Pi_1(X) \rightarrow \underline{G}$  übereinstimmen. Dann stimmen aber auch  $\underline{\varphi} = \underline{\varphi} \circ r_x \circ i_x$  und  $\underline{\psi} = \underline{\psi} \circ r_x \circ i_x: \underline{\pi}_1(X, x) \rightarrow \underline{G}$  überein. Es folgt  $\varphi = \psi$ .  $\square$

Ende der 15. Vorlesung am 04.06.2019.

<sup>63</sup>Genauer wenden wir die Verknüpfung  $\text{Grp} \rightarrow \text{Mod} \rightarrow \text{Cat}$  des Vergissfunktors mit dem Funktor, der ein Monoid  $M$  auf die Kategorie  $\underline{M}$  mit einem Objekt  $*$  und Endomorphismenmenge  $\underline{M}(*, *) = M$  abbildet (und das Naheliegende auf Monoidmorphis­men tut), an.

**Beispiel 3.10.7** (Fundamentalgruppe der Figur Acht). Sei  $X$  die liegende Figur Acht  $\square\infty$  in der Zeichenebene. Seien  $U = \square\alpha$  und  $V = \square\varrho$  die graphisch angedeuteten offenen Teilmengen von  $X$ . Der Schnitt  $U \cap V = \square\times$  ist wegzusammenhängend. Somit liefert der Satz von Seifert-van Kampen 3.10.4 ein kokartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x) & \longrightarrow & \pi_1(V, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(U, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

in Grp, wobei  $x \in U \cap V$  der Kreuzungspunkt der Figur Acht ist. Weil  $U \cap V$  zusammenziehbar ist, ist  $\pi_1(U \cap V, x)$  die triviale Gruppe. Offensichtlich enthält  $U$  eine Teilmenge, die homöomorph zu  $\mathbb{S}^1$  ist,  $x$  enthält und ein Deformationsretrakt von  $U$  ist. Analoges gilt für  $V$ . Es folgen  $\pi_1(U, x) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  und  $\pi_1(V, x) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  (Lemma 3.5.4). Dies zeigt  $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(U, x) *_1 \pi_1(V, x) = \pi_1(U, x) * \pi_1(V, x)$ . Nach Satz 3.2.14 ist die Fundamentalgruppe von  $\mathbb{S}^1$  isomorph zu  $\mathbb{Z}$ , also zur freien Gruppe mit einem Erzeuger; es folgt  $\pi_1(X, x) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ . Die offensichtliche Schlaufe im Gegenuhrzeigersinn in  $U$  bzw.  $V$  bei  $x$  liefert somit einen Isomorphismus  $\langle a \rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(U, x)$  bzw.  $\langle b \rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(V, x)$  von der freien Gruppen mit Erzeuger  $a$  bzw.  $b$  in die jeweilige Fundamentalgruppe. Wir folgern aus Aufgabe 3.9.12 oder Aufgabe 3.9.15

$$\pi_1(X, x) \cong \langle a \rangle *_1 \langle b \rangle = \langle a, b \rangle,$$

wobei  $a$  und  $b$  den offensichtlichen Homotopieklassen von Schlaufen in der Figur Acht entsprechen.

Da man  $X$  als Deformationsretrakt von  $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{\pm 1\}$  auffassen kann, folgt

$$\pi_1(W, x) \cong \langle a, b \rangle.$$

Male Bild eines Weges, der  $aba^{-1}b^{-1}$  repräsentiert. Stellt man sich  $\mathbb{R}^2$  als Wand vor und seien an den Punkten  $\pm 1$  Nägel in diese Wand geschlagen, so fällt ein an diesem Weg alias Seil aufgehängtes Bild nicht herunter (sogar dann nicht, wenn sich das Seil selbst durchdringen darf), denn  $aba^{-1}b^{-1}$  ist gekürzt und somit nicht das triviale Element von  $\langle a, b \rangle$  (Aufgabe 3.8.13). Entfernt man einen Nagel, etwa den bei 1, so wird  $b$  trivial in  $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{-1\}, 0)$ , und das Bild fällt herunter.

**Beispiel 3.10.8** (Bouquet/Wedge von Kreislinie). Sei  $(X, x) = \coprod_{i=1}^n (\mathbb{S}^1, 1)$  das Koproduct in  $\text{Top}_*$  von  $n$  Kreislinien  $\mathbb{S}^1$  mit Basispunkt 1. Explizit ist  $X$  der Quotient der disjunkten Vereinigung von  $n$  Kopien von  $\mathbb{S}^1$  modulo der Äquivalenzrelation, die die  $n$  Basispunkte dieser Kreislinien zu einem Punkt identifiziert. Im Fall  $n = 2$  ist  $X$  (homöomorph zu) eine(r) Figur Acht mit dem Kreuzungspunkt als Basispunkt. Man nennt  $X$  ein *Bouquet* oder *Wedge* von Kreislinien. Das Argument aus Beispiel 3.10.7 plus Induktion liefert

$$\pi_1(X, x) \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$$

wobei  $a_i$  dem Bild eines Erzeugers der Fundamentalgruppe der  $i$ -ten Kreislinie entspricht.

**Beispiel 3.10.9.** Sei  $X$  die Verklebung von  $\mathbb{S}^1$  mit  $\mathbb{S}^n$ , für  $n \geq 2$ , in einem Punkt. Sei  $x \in X$  beliebig. Dann gilt  $\pi_1(X, x) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, x) \cong \mathbb{Z}$ . Dies folgt in nun offensichtlicher Weise aus dem Satz von Seifert-van Kampen 3.10.4 und Satz 3.1.25 (wobei letzterer ebenfalls leicht aus Seifert-van Kampen folgt).

**Aufgabe 3.10.10.** Sei  $X$  das Komplement zweier „nichtverschlungener“ Kreislinien  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^3$ . Dann ist  $\pi_1(X, x)$  isomorph zur freien Gruppe  $\langle a, b \rangle$  in zwei Erzeugern.

Hinweis: Eine geeignete Verklebung von zwei 2-Sphären und zwei 1-Sphären ist ein Deformationsretrakt dieses Komplements.

**Aufgabe 3.10.11.** Sei  $X$  das Komplement zweier „verschlungener“ Kreislinien  $\mathbb{S}^1$  in  $\mathbb{R}^3$ . Dann ist  $\pi_1(X, x)$  isomorph zu  $\mathbb{Z}^2$ .

Hinweis: Eine geeignete Verklebung eines Torus  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  mit einer 2-Sphäre  $\mathbb{S}^2$  ist (homöomorph zu) ein(em) Deformationsretrakt dieses Komplements.

**3.10.12.** Wir haben nun die Fundamentalgruppen aller Räume in Beispiel 3.5.6 ausgerechnet.

**Aufgabe 3.10.13.** Berechne die Fundamentalgruppe des Komplements der Borromäischen Ringe (siehe etwa Wikipedia) in  $\mathbb{R}^3$ .

**Aufgabe 3.10.14.** Der Beweis von Satz 3.10.4 beruht auf der allgemeinen Tatsache, dass in einer beliebigen Kategorie ein „Retrakt eines kokartesischen Diagramms ebenfalls kokartesisch ist“. Präzisiere und beweise diese Aussage.

**Definition 3.10.15.** Sei  $A$  eine endliche Menge (genannt *Alphabet*) mit  $r \in \mathbb{N}$  Elementen (genannt *Buchstaben*). Ein **Flächenwort** im Alphabet  $A$  ist eine Abbildung

$$w: \{1, 2, \dots, 2r\} \rightarrow A \times \{+1, -1\}, \quad i \mapsto w(i) = (a(i), \varepsilon(i)),$$

mit der Eigenschaft, dass jeder Buchstabe genau zweimal als  $a(i)$  vorkommt, es für jedes  $a \in A$  also genau zwei verschiedene Elemente  $i, j \in \{1, \dots, 2r\}$  mit  $a(i) = a = a(j)$  gibt. Wir schreiben ein solches Flächenwort als  $w = a(1)^{\varepsilon(1)} a(2)^{\varepsilon(2)} \dots a(2r)^{\varepsilon(2r)}$  (und lassen dabei die Exponenten  $+1$  meist weg) und nennen  $2r$  seine Länge.

**Beispiel 3.10.16.** Beispiele für Flächenworte im Alphabet  $A = \{a, b\}$  mit  $|A| = 2$  sind  $aabb$ ,  $abab$ ,  $abba$ ,  $baab$ ,  $baba$ ,  $bbaa$ ,  $aa^{-1}bb$ ,  $aba^{-1}b$ ,  $abba^{-1}$ ,  $baa^{-1}b$ ,  $baba^{-1}$ ,  $bbaa^{-1}$ ,  $\dots$ ,  $a^{-1}b^{-1}b^{-1}a$ ,  $\dots$

**Definition 3.10.17.** Sei  $w$  ein Flächenwort der Länge  $2r$  in einem Alphabet mit  $r$  Buchstaben. Der diesem Flächenwort zugeordnete topologische Raum

$$F(w)$$

ist wie folgt definiert. Im Fall  $r \geq 2$  betrachte man ein regelmäßiges  $2r$ -Eck in  $\mathbb{R}^2$  und schreibe den  $i$ -ten Buchstaben  $a(i)$  (ohne Exponenten) des Flächenworts  $w$  an seine  $i$ -te Kante, wobei die Kanten im Uhrzeigersinn durchnummeriert seien. Die  $i$ -te Kante wird mit einem Pfeil versehen, der im „Gegenuhrzeigersinn“ bzw. „Uhrzeigersinn“ orientiert ist, wenn der Exponent  $\varepsilon(i)$  positiv bzw. negativ ist (siehe 3.10.24 für ein Bild). Dann verkleben wir die beiden mit demselben Buchstaben beschrifteten Kanten des  $2r$ -Ecks so miteinander, dass die Spitzen der Pfeile identifiziert werden. Beispielsweise ist  $F(aba^{-1}b^{-1})$  homöomorph zu  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , und  $F(aba^{-1}b)$  ist homöomorph zur Kleinschen Flasche. Im Fall  $r = 1$  machen wir dasselbe, jedoch starten wir mit einem „2-Eck mit runden Kanten“ (eine Art Oval mit zwei Ecken), und erhalten beispielsweise  $F(aa) \cong \mathbb{P}^2\mathbb{R}$  oder  $F(aa^{-1}) \cong \mathbb{S}^2$ . Im Fall  $r = 0$ , also im Fall des leeren Flächenworts  $()$ , definieren wir  $F(()) = \mathbb{S}^2$ .

**Definition 3.10.18.** Sei  $d \in \mathbb{N}$ . Eine  $d$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit (ohne Rand) oder kurz  $d$ -Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Hausdorffraum  $X$  mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \subseteq X$  besitzt, die zu einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{R}^d$  homöomorph ist<sup>64</sup>.

**3.10.19.** Die Hausdorffeigenschaft wird verlangt, um etwa  $\mathbb{R}$  mit verdoppeltem Nullpunkt auszuschließen (Beispiel 2.8.45).

**3.10.20.** Eine kompakte  $d$ -Mannigfaltigkeit wird auch **geschlossene**  $d$ -Mannigfaltigkeit genannt. Eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit wird auch **Fläche** genannt.

**Lemma 3.10.21** (Fläche zu einem Flächenwort). *Ist  $w$  ein Flächenwort, so ist  $F(w)$  eine zusammenhängende geschlossene Fläche.*

*Beweis.* Ist  $x$  ein Punkt aus dem Inneren des regelmäßigen  $2r$ -Ecks, so ist klar, dass sein Bild in  $F(w)$  eine zu einem offenen Ball in  $\mathbb{R}^2$  homöomorphe Umgebung besitzt. Dieselbe Aussage ist auch recht offensichtlich für Punkte  $x$  auf dem Inneren von Kanten, indem man zwei Halbkreisscheiben zu einer (offenen) Kreisscheibe verklebt. Für Eckpunkte  $x$  des  $2r$ -Ecks verklebt man mehrere Winkel zu einer (offenen) Kreisscheibe. Man zeigt leicht, dass  $F(w)$  Hausdorff ist. Dies zeigt, dass  $F(w)$  eine 2-Mannigfaltigkeit ist. Als Bild eines zusammenhängenden, kompakten regelmäßigen  $2r$ -Ecks ist sie zusammenhängend und kompakt.  $\square$

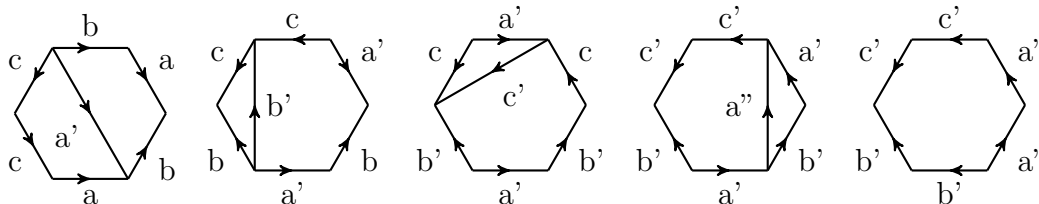
**Satz 3.10.22** (In der Vorlesung wird nur bewiesen, dass die angegebenen Flächenwörter paarweise nicht homöomorphe Flächen liefern). *Für jede zusammenhängende geschlossene Fläche  $X$  gibt es genau ein Flächenwort aus der folgenden Liste, so dass  $X$  zu  $F(w)$  homöomorph ist:*

- $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ , wobei  $g \geq 0$ ;
- $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$  mit  $g \geq 1$ .

**3.10.23.** Die im ersten Punkt aufgeführten Wörter liefern orientierbare Flächen, beispielsweise ist  $F(()) \cong \mathbb{S}^2$  eine 2-Sphäre,  $F(aba^{-1}b^{-1}) \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  ein Torus (= 2-Sphäre mit einem Henkel),  $F(aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1})$  ist homöomorph zum „Doppeltorus“ (= 2-Sphäre mit zwei Henkeln),  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1}$  ist homöomorph zur Oberfläche einer Brezel (= 2 Sphäre mit drei Henkeln), etc. Man nennt  $g$  (= die Anzahl der Henkel) das Geschlecht der entsprechenden Fläche.

Die im zweiten Punkt aufgeführten Wörter liefern nicht orientierbare Flächen, beispielsweise gilt  $F(aa) \cong \mathbb{P}^2 \mathbb{R}$ , und  $F(aabb) \cong F(aca^{-1}c)$  ist homöomorph zur Kleinschen Flasche.

**3.10.24.** Die folgenden Diagramme zeigen, dass  $F(ccb^{-1}a^{-1}ba)$  („Torus plus Kreuzhaube“) und  $F(b'^{-1}c'c'a''a''b'^{-1}) \cong F(aabbcc)$  homöomorph sind (man zerschneide das Sechseck jeweils entlang der inneren Kante und verklebe geeignet).



<sup>64</sup>Man kann den letzten Teil dieses Satzes äquivalent durch „die zu  $\mathbb{R}^d$  homöomorph ist“ ersetzen.

*Beweis.* Wir zeigen nur, dass die in unserer Liste angegebenen Flächenwörter paarweise nicht homöomorphe Flächen liefern.

Sei  $w$  ein Flächenwort aus unserer Liste, und sei  $2r$  seine Länge (also  $2r = 4g$  im ersten Fall und  $2r = 2g$  im zweiten Fall). Sei  $Z$  das regelmäßige  $2r$ -Eck aus der Definition von  $F(w)$  und sei  $p: Z \rightarrow F(w)$  die offensichtliche Abbildung. Man überlegt sich leicht, dass alle Eckpunkte von  $Z$  unter  $p$  auf denselben Punkt von  $F(w)$  gehen (man interpretiere diese Aussage geeignet, wenn  $w$  Länge 0 oder Länge 2 hat). Wir nennen diesen Punkt  $*$ . Wir bestimmen im Folgenden für ein beliebiges Flächenwort mit dieser Eigenschaft die Fundamentalgruppe von  $F(w)$ .

Genauer behaupten wir einen Isomorphismus

$$\pi_1(F(w), *) \cong \langle A \mid w \rangle$$

von Gruppen, wobei  $A$  das Alphabet ist, aus dem  $w$  gebildet ist, und  $w$  als Element der freien Gruppe  $F(A)$  aufgefasst wird.

Seien  $\partial Z$  der Rand und  $Z^\circ$  das Innere von  $Z$  in  $\mathbb{R}^2$ . Sei  $z \in Z$  der Mittelpunkt von  $Z$ . Dann ist  $p(\partial Z)$  homöomorph zu einem Bouquet von  $r$  Kreislinien, und  $Z^\circ$  geht unter  $p$  homöomorph auf eine offene Umgebung von  $p(z)$  in  $F(w)$ , die wir ebenfalls mit  $Z^\circ$  bezeichnen. Wir schreiben im Folgenden auch  $z$  statt  $p(z)$ .

Wir wenden den Satz von Seifert-van Kampen 3.10.4 auf die offene Überdeckung

$$F(w) = (F(w) \setminus z) \cup Z^\circ$$

an (die erste Menge ist sicherlich offen), was erlaubt ist, denn der Schnitt  $(F(w) - z) \cap Z^\circ = Z^\circ \setminus z$  ist offensichtlich wegzusammenhängend. Sei  $e \in F(w)$  das Bild eines Punktes, der auf dem offenen Geradensegment zwischen dem Mittelpunkt  $z$  von  $Z$  und der ersten Ecke von  $Z$  liegt. Wir erhalten ein kokartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z^\circ \setminus z, e) & \longrightarrow & \pi_1(Z^\circ, e) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(F(w) \setminus z, e) & \longrightarrow & \pi_1(F(w), e) \end{array}$$

in Grp. Die Gruppe rechts oben ist trivial, denn  $Z^\circ$  ist zusammenziehbar. Mit Hilfe des Weges, der von  $e$  radial zu  $*$  verläuft, identifizieren wir die beiden Fundamentalgruppen in der unteren Zeile unseres Diagramms mit den entsprechenden Fundamentalgruppen zum Basispunkt  $*$ . Somit erhalten wir das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z^\circ \setminus z, e) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(F(w) \setminus z, *) & \longrightarrow & \pi_1(F(w), *) \end{array}$$

in Grp. Das „Radial-nach-außen-Schieben“ von Punkten von  $Z - z$  zeigt, dass das Bouquet  $p(\partial Z)$  von Kreislinien ein Deformationsretrakt von  $F(w) \setminus z$  ist, die Einbettung  $p(\partial Z) \rightarrow F(w) \setminus z$  ist also eine Homotopieäquivalenz (Lemma 3.5.4), und wir erhalten mit Beispiel 3.10.8 Isomorphismen

$$\langle A \rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(p(\partial Z), *) \xrightarrow{\sim} \pi_1(F(w) \setminus z, *),$$

wobei der erste Isomorphismus den Buchstaben  $a$  auf die Homotopieklasse der Schleife bei  $*$  abbildet, die von der mit  $a$  beschrifteten orientierten Kante herkommt, und der zweite Isomorphismus von der Inklusion herrührt. Somit erhalten wir aus dem obigen kokartesischen Diagramm das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Z^\circ \setminus z, e) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle A \rangle & \longrightarrow & \pi_1(F(w), *) \end{array}$$

in Grp. Offensichtlich deformationsretrahiert  $Z^\circ \setminus z$  auf die „Mittelkreislinie“, so dass die Gruppe links oben isomorph zu  $\mathbb{Z}$  ist (Satz 3.2.14 und Lemma 3.5.4) und als Erzeuger die Homotopieklasse des offensichtlichen Wegs „Einmal- $z$ -im-Gegenuhrzeigersinn-Umrunden“ hat (welcher dem Erzeuger  $1 \in \mathbb{Z}$  entspricht). Dieser Erzeuger geht unter der linken vertikalen Abbildung offensichtlich auf das Element  $w \in \langle A \rangle$ . Die untere horizontale Abbildung bildet  $a \in A$  analog wie oben auf die Homotopieklasse der entsprechenden Schleife bei  $*$  ab. Wir erhalten so das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \langle A \rangle & \longrightarrow & \pi_1(F(w), *) \end{array}$$

in Grp mit derselben unteren Horizontalen und der linken Vertikalen gegeben durch  $1 \mapsto w$ . Nach Beispiel 3.7.5 und der Eindeutigkeit kokartesischer Diagramm faktorisiert die untere Vertikale zu einem Isomorphismus

$$\langle A \mid w \rangle \xrightarrow{\sim} \pi_1(F(w), *).$$

Dies ist der behauptete Isomorphismus.

Wir verwenden im Folgenden Ergebnisse und Notation aus Aufgabe 3.10.25. Da der Abelianisierungsfunktor Koprodukte erhält und freie Gruppen zu freien abelschen Gruppen macht, erhalten wir das kokartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}A & \longrightarrow & \pi_1(F(w), *)^{\text{ab}} \end{array}$$

in Ab und somit einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}A/(\mathbb{Z}w) \xrightarrow{\sim} \pi_1(F(w), *)^{\text{ab}},$$

wobei hier  $w$  additiv geschrieben als Element von  $\mathbb{Z}A$  aufgefasst wird.

Im Fall  $w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ , für  $g \geq 0$ , gilt

$$\pi_1(F(w), *)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}A/(\mathbb{Z}w) = \mathbb{Z}A/\mathbb{Z}(a_1 + b_1 - a_1 - b_1 + \dots + a_g + b_g - a_g - b_g) = \mathbb{Z}^{2g}/\mathbb{Z}0 = \mathbb{Z}^{2g}.$$

Im Fall  $w = a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$ , für  $g \geq 1$ , gilt

(3.10.4)

$$\pi_1(F(w), *)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}A/(\mathbb{Z}w) = \mathbb{Z}A/\mathbb{Z}(2a_1 + \dots + 2a_g) \cong \mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}(2, 2, \dots, 2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{g-1}.$$

Da diese abelianisierten Fundamentalgruppen paarweise nicht isomorph sind (warum?), sind die den Flächenwörtern in Satz 3.10.22 zugeordneten Flächen paarweise nicht homöomorph.  $\square$

Ende der 16. Vorlesung am 06.06.2019, obigen Beweis nur im Beispiel (und recht schnell) erklärt.

**Aufgabe 3.10.25** (Abelianisierung). Ist  $G$  eine Gruppe, so sei  $(G, G)$  die Menge aller (endlichen) Produkte von Kommutatoren  $(g, h) := ghg^{-1}h^{-1}$ , für Elemente  $g, h \in G$ .

- (a) Die Menge  $(G, G)$  ist der kleinste Normalteiler von  $G$ , der alle Kommutatoren  $(g, h)$ , für  $g, h \in G$  enthält, und die Quotientengruppe  $G^{\text{ab}} := G/(G, G)$  ist abelsch. Sie heißt **Abelianisierung von  $G$** .
- (b) Die kanonische Abbildung

$$G \rightarrow G^{\text{ab}}$$

ist eine universelle Gruppe-(abelsche Gruppe)-Abbildung. (Der Leser muss selbst herausfinden, was dies bedeutet.)

- (c) Die Zuordnung  $G \mapsto G^{\text{ab}}$  wird (in sinnvoller Weise) zu einem Funktor  $(-)^{\text{ab}}: \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$ , genannt **Abelianisierung(sfunktor)**.
- (d) Abelianisierung  $(-)^{\text{ab}}: \text{Grp} \rightarrow \text{Ab}$  erhält Koprodukte.

Sei  $X$  eine Menge.

- (e) Sei  $F(X)$  die freie Gruppe über  $X$ . Die Verknüpfung  $X \rightarrow F(X) \rightarrow F(X)^{\text{ab}}$  ist eine universelle Menge-(abelsche Gruppe)-Abbildung.
- (f) Sei  $\mathbb{Z}X$  die Menge aller Abbildungen  $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$ , deren Träger – also die Menge aller  $x \in X$ , für die  $f(x) \neq 0$  gilt – endlich ist. Wir schreiben Elemente  $f \in \mathbb{Z}X$  meist als  $\sum f(x)x$ . Beispielsweise ist  $3a - 7b$  ein Element von  $\mathbb{Z}\{a, b, c\}$ .  
Mit punktweiser Addition  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  wird  $\mathbb{Z}X$  eine abelsche Gruppe. Die kanonische Abbildung  $X \rightarrow \mathbb{Z}X$ ,  $x \mapsto x = 1x$ , ist eine universelle Menge-(abelsche Gruppe)-Abbildung. Man nennt deswegen  $\mathbb{Z}X$  eine/die **freie abelsche Gruppe über der Menge  $X$** .
- (g) Folgere einen kanonischen Isomorphismus  $F(X)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}X$  in Ab.
- (h) In (3.10.4) wird eine Isomorphie  $\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}(2, 2, \dots, 2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^{g-1}$  abelscher Gruppen behauptet. Finde einen solchen Isomorphismus oder zeige anderweitig, dass diese beiden Gruppen isomorph sind.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 3.10.10, Fundamentalgruppe des Komplements zweier nichtverschlungener Kreislinien im  $\mathbb{R}^3$
- (2) Aufgabe 3.10.11 Fundamentalgruppe des Komplements zweier verschlungener Kreislinien im  $\mathbb{R}^3$
- (3) (gibt 8 Punkte) Aufgabe 3.10.25, Abelianisierung etc. (die Teilaufgaben (f) und (h) sind unabhängig von den anderen Teilaufgaben)
- (4) Bonusaufgabe (habe ich mir selbst noch nicht überlegt): Aufgabe 3.10.13, Fundamentalgruppe des Komplements der Borromäischen Ringe in  $\mathbb{R}^3$
- (5) Bonusaufgabe: Aufgabe 3.10.14, Retrakt eines kokarteschen Diagramms



## 4. ÜBERLAGERUNGSTHEORIE

### 4.1. Überlagerungen.

**Definition 4.1.1.** Eine **triviale Überlagerung** ist eine stetige Abbildung  $p: \tilde{U} \rightarrow U$  mit der Eigenschaft, dass es einen diskreten Raum<sup>65</sup>  $F$  zusammen mit einem Homöomorphismus  $\tau: F \times U \xrightarrow{\sim} \tilde{U}$  gibt, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F \times U & \xrightarrow[\sim]{\tau} & \tilde{U} \\ \downarrow \text{pr}_U & & \downarrow p \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

kommutiert. Man nennt einen solchen Homöomorphismus  $\tau$  (oder sein Inverses) eine **Trivialisierung** von  $p$ .

**Definition 4.1.2.** Eine **Überlagerung** ist eine stetige Abbildung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  besitzt, so dass die induzierte Abbildung  $p^{-1}(U) \rightarrow U$  eine triviale Überlagerung ist. Man nennt dann  $U$  eine **trivial überlagerte Umgebung von  $x$** . Man nennt  $\tilde{X}$  den **Totalraum** der Überlagerung und  $X$  den **Basisraum** oder die **Basis** der Überlagerung  $p$ . Man sagt auch, dass  $\tilde{X}$  eine Überlagerung von  $X$  ist und meint damit eigentlich  $p$ .

**4.1.3.** Jede triviale Überlagerung ist eine Überlagerung.

**4.1.4.** In der Funktionentheorie ist der Begriff der Überlagerung oft etwas weiter gefasst. Die Überlagerungen in unserem Sinne sind dort die unverzweigten Überlagerungen.

### Beispiele 4.1.5.

- (a) Die Abbildung  $\emptyset \rightarrow X$  ist für jedes  $X \in \text{Top}$  eine Überlagerung.
- (b) Die Abbildungen  $\text{Exp}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  und  $\text{Exp}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  sind Überlagerungen (warum?).
- (c) Die Abbildung  $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1, z \mapsto z^n$ , ist für jedes  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  eine Überlagerung (warum?). (Dieselbe Aussage gilt auch für alle  $n \in \mathbb{Z} \setminus 0$ .) Male Bild für  $n = 2, 3$ . Diese Überlagerung ist genau dann trivial, wenn  $n = 1$  gilt (warum?).
- (d) Die offensichtliche Abbildung  $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R}$  ist eine Überlagerung.
- (e) Die offensichtliche Abbildung  $\mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{C}$  ist keine Überlagerung.
- (f) Ist  $F$  eine beliebige, mit der diskreten Topologie versehene Menge und ist  $X$  ein topologischer Raum, so ist  $\text{pr}_X: F \times X \rightarrow X$  eine triviale Überlagerung.
- (g) Seien  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  und  $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$  (triviale) Überlagerungen. Dann ist auch  $p \times q: \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$  eine (triviale) Überlagerung. Beispielsweise ist  $\text{Exp} \times \text{Exp}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  eine Überlagerung des 2-Torus.

Auch ist  $p \sqcup q: \tilde{X} \sqcup \tilde{Y} \rightarrow X \sqcup Y$  eine Überlagerung (sie ist aber im Allgemeinen nicht trivial, auch wenn  $p$  und  $q$  diese Eigenschaft haben). Beispielsweise ist  $\text{id} \sqcup \text{Exp}: \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \sqcup \mathbb{S}^1$  eine Überlagerung. Diese hat die Eigenschaft, dass nicht alle Fasern dieselbe Kardinalität haben.

<sup>65</sup>Ein **diskreter Raum** ist ein topologischer Raum mit der diskreten Topologie – alle Teilmengen sind also offen.

- (h) Eine Abbildung  $f: Y \rightarrow \{\text{pt}\}$  ist genau dann eine Überlagerung, wenn  $Y$  die diskrete Topologie trägt.
- (i) Überlagerungen der Figur Acht, Bilder in [Hat02, Seiten 58,59] und [Mun75, §81, Example 2, p. 490]. Erkläre, warum das erste Bild in Hatcher keine Überlagerung definiert, wenn man die Orientierung einer der mit  $b$  markierten Kanten ändert.

**4.1.6** (Kardinalität der Fasern einer Überlagerung). Ist  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung, so ist die Kardinalität  $|p^{-1}(x)|$  der Fasern konstant auf den Zusammenhangskomponenten von  $X$ . Genauer sind für jede Menge  $E$  die beiden Mengen

$$\{x \in X \mid |p^{-1}(x)| = |E|\} \quad \text{und} \quad \{x \in X \mid |p^{-1}(x)| \neq |E|\}$$

offen in  $X$ , da jede von ihnen mit jedem Punkt auch jede trivial überlagerte Umgebung dieses Punktes enthält. Ist  $Z$  eine Zusammenhangskomponente von  $X$ , so wähle man einen Punkt  $z \in Z$  und  $E = p^{-1}(z)$  und sieht, dass  $Z$  schon komplett in der ersten der beiden Mengen enthalten sein muss. Ist  $X$  zusammenhängend, so ist  $p$  genau dann surjektiv, wenn  $\tilde{X}$  nicht leer ist. Ist  $X$  zusammenhängend, so nennt man die Zahl der Elemente (= Kardinalität) einer und jeder Faser von  $p$  die **Blätterzahl** der Überlagerung. Für  $n \in \mathbb{N}$  nennt man eine Überlagerung  **$n$ -blättrig**, wenn jede Faser aus  $n$  Elementen besteht.

**Aufgabe 4.1.7** (Überlagerungen sind stabil unter Basiswechsel (diese Aussage wird im Beweis von Satz 4.4.16 benötigt)). Ist  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und ist  $f: Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so ist der Pullback  $p': Y \times_X \tilde{X} \rightarrow Y$  von  $p$  entlang  $f$  ebenfalls eine Überlagerung.

Hinweis: Betrachte zunächst den Fall einer trivialen Überlagerung  $F \times X \rightarrow X$ : In einer beliebigen Kategorie mit Produkten ist für beliebige Objekte  $X, Y, F$  und jeden Morphismus  $f: Y \rightarrow X$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F \times Y & \xrightarrow{\text{id}_F \times f} & F \times X \\ \downarrow \text{pr}_Y & & \downarrow \text{pr}_X \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

kartesisch. Für den allgemeinen Fall verwende man Transitivität von Pullbacks 3.7.8.

Bemerkung: Man nennt in diesem Kontext  $f$  eine **Basiswechselabbildung** oder kurz einen **Basiswechsel**; man sagt, dass  $p'$  durch **Basiswechsel** entlang  $f$  aus  $p$  entsteht ( $p$  hat ja  $X$  als Basis(raum), während  $Y$  die Basis/der Basisraum von  $p'$  ist).

**Aufgabe 4.1.8** (Komposition von Überlagerungen). Seien  $p: X \rightarrow Y$  und  $q: Y \rightarrow Z$  Überlagerungen. Sind die Fasern von  $q$  endlich, so ist auch  $q \circ p$  eine Überlagerung.

Bonus: Die Bedingung, dass die Fasern von  $q$  endlich sind, ist notwendig. Man betrachte etwa  $q: \mathbb{Z} \times H \rightarrow H$ , wobei  $H$  der hawaiianische Ohrring (siehe Wikipedia) ist, und wähle  $p$  geeignet.

**Definition 4.1.9.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **lokal zusammenhängend**, wenn jede Umgebung jedes Punktes eine zusammenhängende Umgebung desselben Punktes enthält: Für alle  $x \in X$  und alle Umgebungen  $U$  von  $x$  (in  $X$ ) gibt es eine zusammenhängende Umgebung  $V$  von  $x$  (in  $X$ ) mit  $V \subset U$ .

**Aufgabe 4.1.10** (Wird im Beweis von Satz 5.2.6 (Liftbarkeitskriterium) benötigt). Sei  $X$  ein lokal zusammenhängender (siehe Definition 4.1.9) topologischer Raum. Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$

eine Überlagerung und sei  $Z$  eine Zusammenhangskomponente von  $\tilde{X}$ . Dann ist auch die Komposition  $Z \hookrightarrow \tilde{X} \xrightarrow{p} X$  eine Überlagerung.

**Definition 4.1.11.** Eine *étale* Abbildung ist eine stetige Abbildung  $p: E \rightarrow X$  mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt  $e \in E$  eine offene Umgebung  $U \ni e$  besitzt, die von  $p$  homöomorph auf eine offene Teilmenge  $p(U) \ni p(e)$  abgebildet wird, d. h.  $p(U)$  ist offen in  $X$  und die induzierte Abbildung  $U \rightarrow p(U)$  ist ein Homöomorphismus.

**4.1.12.** Das Wort *étale* kommt aus dem Französischen und bedeutet *ausgebreitet* oder *gleichbleibend*.

**4.1.13.** Jede Überlagerung ist étale.

**4.1.14.** Man beachte, dass in der Definition einer Überlagerung jeder Punkt des Zielbereichs eine geeignete, ohne Einschränkung offene, Umgebung besitzen muss, in der Definition einer étalen Abbildung jedoch jeder Punkt des Startbereichs eine geeignete offene Umgebung besitzen muss.

**Beispiele 4.1.15.** (a) Jede Einbettung einer offenen Menge ist étale.

- (b) Die Verknüpfung étaler Abbildungen ist étale (siehe Aufgabe 4.1.16 für eine genauere Aussage).
- (c) Die offensichtliche Abbildung von der reellen Gerade mit verdoppeltem Nullpunkt nach  $\mathbb{R}$  ist étale (Beispiel 2.8.45), aber keine Überlagerung.
- (d) Eine Abbildung  $f: Y \rightarrow \{\text{pt}\}$  ist genau dann étale, wenn  $Y$  die diskrete Topologie trägt (was auch äquivalent ist zur Bedingung, dass  $f$  eine Überlagerung ist).

**Aufgabe 4.1.16** (Eigenschaften étaler Abbildungen). (a) Jede étale Abbildung ist offen; insbesondere gelten:

- Jede Überlagerung ist offen.
  - Ist  $f: X \rightarrow Y$  surjektiv und étale (etwa eine surjektive Überlagerung), so trägt  $Y$  die Quotiententopologie (Lemma 2.8.64)
- (b) Seien  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  stetige Abbildungen. Ist  $g$  étale, so ist  $f$  genau dann étale, wenn  $g \circ f$  étale ist.
  - (c) Der Pullback jeder étalen Abbildung ist étale (vgl. Aufgabe 4.1.7 für die Terminologie).

Hinweis: Pullbacks offener Einbettungen sind offene Einbettungen (Beispiel 3.7.6).

**Aufgabe 4.1.17.** Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine étale Abbildung von einem kompakten (automatisch Hausdorff-)Raum  $X$  in einen Hausdorffraum  $Y$ . Dann ist  $f$  eine Überlagerung. (Für Mutige: Eine eigentliche separierte (nicht definiert in diesem Skript) étale Abbildung ist dasselbe wie eine Überlagerung mit endlichen Fasern.)

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 4.1.7, Pullbacks von Überlagerungen sind Überlagerungen
- (2) Aufgabe 4.1.8, Komposition von Überlagerungen ist Überlagerung, falls die „untere/zweite“ Überlagerung endliche Fasern hat.
- (3) Aufgabe 4.1.10, Restriktion auf Zusammenhangskomponente einer Überlagerung ist wieder Überlagerung, falls Basis (oder äquivalent Totalraum) lokal zusammenhängend.
- (4) Aufgabe 4.1.16, Eigenschaften étaler Abbildungen

## 4.2. Quotienten nach topologisch freien Gruppenoperationen.

**Definition 4.2.1.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $X$  ein Objekt einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Eine **Operation von  $G$  auf  $X$**  ist ein Gruppenmorphismus  $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}_{\mathcal{C}}(X)$ . Ist eine solche Operation  $\varphi$  gegeben, so schreibt man den Automorphismus  $\varphi(g): X \rightarrow X$  oft abkürzend als  $g: X \rightarrow X$ , für  $g \in G$ .

Man nennt dann  $X$  ein  $G$ -Objekt von  $\mathcal{C}$ . Im Fall konkreter Kategorien paßt man die Terminologie oft an: Man spricht beispielsweise von  $G$ -Mengen statt von  $G$ -Objekten in Set oder von (topologischen)  $G$ -Räumen statt  $G$ -Objekten in Top.

**4.2.2.** Vermutlich kommen in dieser Vorlesung nur  $G$ -Objekte in Set und Top vor, also  $G$ -Mengen und  $G$ -Räume.

**4.2.3.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $X$  eine  $G$ -Menge. Dann definiert  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto g.x := g(x)$ , eine Abbildung, die  $e.x = x$  und  $g.(h.x) = (gh).x$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in X$  erfüllt. Man nennt diese Abbildung ebenfalls eine **Operation von  $G$  auf  $X$** . Ist umgekehrt  $G$  eine Gruppe,  $X$  eine Menge und  $a: G \times X \rightarrow X$  eine Abbildung mit  $a(e, x) = x$  und  $a(g, a(h, x)) = a(gh, x)$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in X$ , so wird  $X$  per  $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Set}}(X)$ ,  $g \mapsto a(g, -)$ , eine  $G$ -Menge. Es gibt also zwei äquivalente Möglichkeiten, eine  $G$ -Menge zu definieren.

**Beispiel 4.2.4.** Ist  $G$  eine Gruppe, so ist die Menge  $G$  mit der Linksmultiplikation von  $G$  (die Operation  $\lambda: G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Set}}(G)$  ist also durch  $(\lambda(g))(h) = gh$  definiert) ein  $G$ -Objekt von Set. Da  $\lambda(g)$  im Allgemeinen kein Gruppenautomorphismus von  $G$  ist, macht die Linksmultiplikation von  $G$  die Gruppe  $G$  nicht zu einem  $G$ -Objekt von Grp. Hingegen macht Konjugation  $G$  zu einem  $G$ -Objekt von Grp: Die Operation  $c: G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Grp}}(G)$  ist durch  $c(g)(h) = ghg^{-1}$  gegeben.

**4.2.5.** Seien  $G$  eine Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum (= ein  $G$ -Objekt in Top). Dann gelten:

- Für jedes  $g \in G$  ist  $g: X \rightarrow X$  ein Automorphismus in Top (mit Inversem  $g^{-1}$ ) und insbesondere ein Homöomorphismus. Wir schreiben oft  $g.x$  oder  $gx$  statt  $g(x)$ .
- Die Abbildung  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto g.x := g(x)$ , wird ebenfalls als **Operation von  $G$  auf  $X$**  bezeichnet. Sie ist stetig und offen, wenn man  $G$  mit der diskreten Topologie (und dann  $G \times X$  mit der Produkttopologie) versieht: Das Urbild einer offenen Menge  $U \subset X$  ist  $\bigcup_{g \in G} \{g\} \times g^{-1}U$ , was offen ist – also ist die Abbildung stetig. Jede offene Teilmenge von  $G \times X$  ist Vereinigung von Mengen der Form  $\{g\} \times V$ , für  $g \in G$  und  $V \subseteq X$  eine offene Teilmenge, und  $gV$  ist sicherlich offen in  $X$  – also ist die Abbildung offen.

Wie bei  $G$ -Mengen (siehe 4.2.3) gibt es zwei äquivalente Möglichkeiten,  $G$ -Räume zu definieren: Man muss einen topologischen Raum  $X$  angeben und entweder einen Gruppenmorphismus  $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Top}}(X)$  oder eine geeignete *stetige* Abbildung  $G \times X \rightarrow X$ .

*Warnung 4.2.6.* Eine topologische Gruppe ist eine Gruppe  $G$ , die eine Topologie trägt, so dass Multiplikationsabbildung  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto gh$ , und Inversenabbildung  $G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$ , stetig sind.

Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Mit einem  $G$ -Raum meint man in diesem Kontext meist einen topologischen Raum  $X$  zusammen mit einer stetigen Abbildung  $a: G \times X \rightarrow X$ , die  $a(e, x) = x$  und  $a(g, a(h, x)) = a(gh, x)$  für alle  $g, h \in G$  und  $x \in X$  erfüllt. Hieraus erhält

man einen Gruppenmorphismus  $G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Top}}(X)$ ,  $g \mapsto a(g, -)$ , also einen  $G$ -Raum im Sinne der Definition 4.2.1. Ist aber  $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}_{\text{Top}}(X)$  ein Gruppenmorphismus, wobei  $G$  als abstrakte Gruppe aufgefasst wird, so ist die Abbildung  $G \times X \rightarrow X$ ,  $(g, x) \mapsto \varphi(g)(x)$ , stetig für die diskrete Topologie auf  $G$ , aber im Allgemeinen nicht für die gegebene Topologie auf der topologischen Gruppe  $G$ .

**Definition 4.2.7.** Sei  $G$  eine Gruppe. Man nennt eine  $G$ -Menge  $X$  **frei** oder sagt, dass die Operation von  $G$  auf  $X$  **frei** ist, falls für alle  $g \in G$  und  $x \in X$  aus  $gx = x$  bereits  $g = e$  folgt. In Worten bedeutet dies, dass außer dem neutralen Element kein Gruppenelement irgendeinen Punkt von  $X$  festhält.

Wir nennen eine  $G$ -Menge  $X$  transitiv, falls  $X$  nicht leer ist und es für je zwei Punkte  $x, y \in X$  ein  $g \in G$  mit  $gx = y$  gibt. In anderen Worten besteht  $X$  also aus genau einer  $G$ -Bahn.

**4.2.8.** Eine  $G$ -Menge ist genau dann frei, wenn für ein/jedes  $x \in X$  die Bahnabbildung  $G \rightarrow X$ ,  $g \mapsto gx$ , injektiv ist (also eine Bijektion  $G \xrightarrow{\sim} Gx$  induziert). Sie ist genau dann transitiv, wenn  $X \neq \emptyset$  gilt und die Bahnabbildung für ein/jedes  $x \in X$  surjektiv ist.

**Beispiele 4.2.9.** Die Operation von  $G = \{\pm 1\}$  auf  $\mathbb{R}$  durch Multiplikation ist nicht frei. Die Operation von  $G = \{\pm 1\}$  auf  $\mathbb{R} \setminus 0$  durch Multiplikation ist frei. Die Operation jeder Gruppe  $G$  auf sich selbst durch Linksmultiplikation ist frei.

**Definition 4.2.10.** Sei  $G$  eine Gruppe. Man nennt einen  $G$ -Raum  $X$  **topologisch frei** oder sagt, dass die Operation von  $G$  auf  $X$  **topologisch frei** ist, falls jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  in  $X$  besitzt, so dass die Abbildung  $G \times U \rightarrow X$ ,  $(g, u) \mapsto g.u$ , injektiv ist. Dies bedeutet äquivalent, dass  $gU$  für alle  $g \in G \setminus e$  disjunkt von  $U$  ist.

**4.2.11.** In der Literatur wird statt des Begriffs *topologisch frei* meist der Begriff *eigentlich diskontinuierlich* (englisch *properly discontinuous*) verwendet.

**4.2.12.** Operiert eine Gruppe  $G$  topologisch frei auf einem topologischen Raum  $X$ , so operiert  $G$  frei auf der Menge  $X$ .

**Beispiele 4.2.13.** (a) Die Gruppe  $\mathbb{Z}$  operiert topologisch frei auf  $\mathbb{R}$ . Allgemeiner operiert  $\mathbb{Z}^n$  topologisch frei auf  $\mathbb{R}^n$ .

(b) Die Gruppe  $\{\pm 1\}$  operiert topologisch frei auf  $\mathbb{R}^n \setminus 0$  und auf  $\mathbb{S}^n$ .

(c) Die Gruppe  $\{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$  der  $n$ -ten Einheitswurzeln operiert topologisch frei auf  $\mathbb{C}^\times$ .

(d) Die Gruppe  $(\mathbb{Q}, +)$  operiert auf  $\mathbb{R}$  durch Addition. Diese Operation ist frei, aber nicht topologisch frei.

(e) Operiert  $G$  topologisch frei auf  $X$ , so operiert auch jede Untergruppe  $H$  von  $G$  topologisch frei auf  $X$ .

**4.2.14.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $X$  ein  $G$ -Raum. Dann ist die Surjektion  $p: X \rightarrow G \backslash X$  auf den Bahnenraum<sup>66</sup> (mit der Quotiententopologie) stetig und offen: Stetigkeit ist klar nach Definition der Topologie auf  $G \backslash X$ . Für eine beliebige Teilmenge  $V \subset X$  gilt  $p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{g \in G} gV$ . Ist  $V$  offen in  $X$ , so sind alle  $gV$  offen in  $X$ , damit auch deren Vereinigung, und somit ist  $p(V)$  offen in  $G \backslash X$ .

<sup>66</sup>Da  $G$  von links auf  $X$  operiert, schreibe ich den Quotient als  $G \backslash X$  und nicht als  $X/G$  wie sonst oft in der Literatur.

**Satz 4.2.15** (Quotient nach topologisch freier Gruppenoperation ist Überlagerung). *Sei  $G$  eine Gruppe und  $X$  ein topologisch freier  $G$ -Raum. Dann ist die Surjektion  $X \rightarrow G \backslash X$  auf den Bahnenraum eine Überlagerung.*

*Beweis.* Wir wissen bereits, dass unsere Surjektion  $p: X \rightarrow G \backslash X$  stetig und offen ist. Sei  $x \in X$  beliebig. Da  $G$  topologisch frei operiert, hat  $x$  eine offene Umgebung  $U$ , so dass  $\varphi: G \times U \rightarrow X, (g, u) \mapsto gu$ , injektiv ist. Diese Abbildung ist stetig und offen wegen  $G \times U \subseteq G \times X$  und 4.2.5. Also ist  $\varphi$  ein Homöomorphismus auf sein Bild

$$\varphi(G \times U) = \bigsqcup_{g \in G} gU = p^{-1}(p(U)) \subseteq X.$$

Die Verknüpfung  $U \hookrightarrow X \xrightarrow{p} G \backslash X$  offener stetiger Abbildungen (siehe 4.2.14) ist injektiv und damit ein Homöomorphismus auf sein Bild  $p(U) \subseteq G \backslash X$ . Wir erhalten das kommutative Diagramm

$$(4.2.1) \quad \begin{array}{ccc} G \times U & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & p^{-1}(p(U)) \subseteq X \\ \downarrow \text{pr}_U & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow[\sim]{p} & p(U) \subseteq G \backslash X, \end{array}$$

dessen horizontale Pfeile nach dem Obigen Homöomorphismen (= Isomorphismen in Top) sind. Da die linke vertikale Abbildung eine triviale Überlagerung ist, folgt dieselbe Aussage für die mittlere vertikale Abbildung. Da  $p(U)$  eine (offene) Umgebung von  $p(x)$  (in  $G \backslash X$ ) ist und  $p$  surjektiv ist, ist  $p$  eine Überlagerung.  $\square$

Ende der 17. Vorlesung am 18.06.2019.

**Beispiel 4.2.16.** Satz 4.2.15 zeigt, dass  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \backslash \mathbb{R}$  eine Überlagerung ist. Diese Überlagerung stimmt im Wesentlichen mit der bereits betrachteten Überlagerung  $\text{Exp}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  überein: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & = & \mathbb{R} \\ \downarrow p & & \downarrow \text{Exp} \\ \mathbb{Z} \backslash \mathbb{R} & \xrightarrow[\sim]{\overline{\text{Exp}}} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

kommutiert, wobei  $\overline{\text{Exp}}$  die eindeutige Abbildung mit  $\overline{\text{Exp}} \circ p = \text{Exp}$  ist; diese ist ein Homöomorphismus (warum? Hinweis: Aufgabe 4.1.16.(a) und Aufgabe 2.7.21).

**Beispiel 4.2.17.** Analog ist  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \backslash \mathbb{R}^2$  eine Überlagerung.

**Beispiel 4.2.18.** Kleinsche Flasche als Quotient (Bild bei Soergel, Seite 91). In der Vorlesung habe ich die Ebene mit „Quadraten der Form  $aba^{-1}b$ “ parkettiert.

**Aufgabe 4.2.19.** Jede freie Operation einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorffraum ist topologisch frei.

**Lösung 4.2.20.** Sei  $x \in X$ . Für jedes  $g \in G \setminus e$  gilt  $gx \neq x$  auf Grund der Freiheit der Operation, so dass es auf Grund der Hausdorff-eigenschaft offene disjunkte Umgebungen  $U_g$

von  $x$  und  $V_g$  von  $gx$  in  $X$  gibt. Dann ist  $W_g := U_g \cap g^{-1}V_g$  eine offene Umgebung von  $x$ . Da  $G$  endlich ist, ist  $T := \bigcap_{g \in G \setminus e} W_g$  eine offene Umgebung von  $x$ . Für alle  $h \in G \setminus e$  gilt

$$T \cap hT = \left( \bigcap_{g \in G \setminus e} W_g \right) \cap h \left( \bigcap_{g \in G \setminus e} W_g \right) \subset W_h \cap hW_h \subset U_h \cap hh^{-1}V_h = U_h \cap V_h = \emptyset.$$

Dies zeigt die topologische Freiheit.

**Aufgabe 4.2.21** (Verallgemeinert Satz 4.2.15). Sei  $X$  ein topologischer freier  $G$ -Raum, wobei  $G$  eine Gruppe ist. Sei  $H \subset G$  eine Untergruppe. Dann ist die Surjektion  $H \backslash X \rightarrow G \backslash X$  eine Überlagerung.

**Lösung 4.2.22.** In der Notation des Beweises von Satz 4.2.15 faktorisiert  $p: X \rightarrow G \backslash X$  als Verknüpfung  $X \xrightarrow{r} H \backslash X \xrightarrow{q} G \backslash X$  stetiger Abbildungen. Das kommutative Diagramm (4.2.1) kann man zu einem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} G \times U & \xrightarrow[\sim]{\varphi} & p^{-1}(p(U)) & \hookrightarrow & X \\ \downarrow \text{can} \times \text{id}_U & & \downarrow r' & & \downarrow r \\ (H \backslash G) \times U & \xrightarrow[\sim]{\varphi'} & q^{-1}(p(U)) & \hookrightarrow & H \backslash X \\ \downarrow \text{pr}_U & & \downarrow q' & & \downarrow q \\ U & \xrightarrow[\sim]{p} & p(U) & \hookrightarrow & G \backslash X, \end{array}$$

(a priori in Set) vergrößern, dessen vertikale Verknüpfungen die vertikalen Pfeile in (4.2.1) sind. Hierbei ist  $\varphi'$  durch  $(Hg, u) \mapsto Hgu$  gegeben. Man prüft leicht, dass  $\varphi'$  ein Homöomorphismus ist, denn  $\varphi$  ist ein  $G$ -äquivarianter Homöomorphismus, und beide Abbildungen  $\text{can} \times \text{id}_U$  und  $r'$  sind offen, stetig und surjektiv. Unser Diagramm ist also ein kommutatives Diagramm in Top. Da  $\text{pr}_U$  eine triviale Überlagerung ist, gilt dasselbe für  $q'$ ; also ist  $q$  eine Überlagerung.

**Definition 4.2.23** (Wegen Aufgabe 4.2.24 bereits hier). Sei  $G$  eine Gruppe und seien  $X$  und  $Y$   $G$ -Mengen. Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt  **$G$ -äquivariant**, falls das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ g \downarrow & & g \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

für alle  $g \in G$  kommutiert. Sei  $G\text{-Set}$  die Kategorie aller  $G$ -Mengen mit Morphismen die  $G$ -äquivarianten Abbildungen.

Indem man in dieser Definition  $G$ -Mengen durch  $G$ -Räume und Abbildungen durch stetige Abbildungen ersetzt, erhält man die Kategorie  $G\text{-Top}$ .

Noch allgemeiner definiert man für jede Kategorie  $\mathcal{C}$  und jede Gruppe die Kategorie  $G\text{-}\mathcal{C}$  der  $G$ -Objekte von  $\mathcal{C}$ .

**Aufgabe 4.2.24.** Seien  $X$  und  $Y$   $G$ -Räume, für eine Gruppe  $G$ , und sei  $f: X \rightarrow Y$  eine  $G$ -äquivariante stetige Abbildung (siehe Definition 4.2.23, also ein Morphismus in  $G\text{-Top}$ ). Dann ist mit  $Y$  auch  $X$  topologisch frei.

### 4.3. Lifts und Decktransformationen.

**Definition 4.3.1.** Seien  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  und  $f: Y \rightarrow X$  stetige Abbildungen (bzw. allgemeiner Morphismen in einer beliebigen Kategorie  $\mathcal{C}$ ). Eine stetige Abbildung (bzw. ein Morphismus)  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p \circ \tilde{f} = f$  heißt **Lift** oder **Liftung** oder **Hochhebung** von  $f$  (bezüglich  $p$ ):

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Dieser Begriff wird besonders dann verwendet, wenn  $p$  eine Überlagerung ist.

**Satz 4.3.2** (Eindeutigkeit von Lifts). *Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und sei  $f: Y \rightarrow X$  stetig. Sind  $\tilde{f}$  und  $\hat{f}$  Lifts von  $f$  und ist  $Y$  zusammenhängend und gibt es ein  $y_0 \in Y$  mit  $\tilde{f}(y_0) = \hat{f}(y_0)$ , so gilt  $\tilde{f} = \hat{f}$ .*

*Beweis.* Wir zeigen, dass die beiden Mengen

$$Y_{=} := \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) = \hat{f}(y)\} \quad \text{und} \quad Y_{\neq} := \{y \in Y \mid \tilde{f}(y) \neq \hat{f}(y)\}$$

offen sind. Aus  $y_0 \in Y_{=}$  und  $Y$  zusammenhängend folgt dann  $\tilde{f} = \hat{f}$ .

Sei  $y \in Y$ . Sei  $U$  eine trivial überlagerte Umgebung von  $f(y)$  und sei  $\tau: p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} T \times U$  (die Inverse) eine(r) Trivialisierung von  $p$  über  $U$ . Dann gibt es eindeutige  $\tilde{t}, \hat{t} \in T$  mit  $\tau(\tilde{f}(y)) \in \tilde{t} \times U$  und  $\tau(\hat{f}(y)) \in \hat{t} \times U$ . Dann ist

$$W := \tilde{f}^{-1}\tau^{-1}(\tilde{t} \times U) \cap \hat{f}^{-1}\tau^{-1}(\hat{t} \times U)$$

eine offene Umgebung von  $y$ . Dann gelten  $\tau(\tilde{f}(w)) = (\tilde{t}, f(w))$  und  $\tau(\hat{f}(w)) = (\hat{t}, f(w))$  für jedes  $w \in W$ . Im Fall  $y \in Y_{=}$  gilt  $\tilde{t} = \hat{t}$  und  $\tilde{f}$  und  $\hat{f}$  stimmen also auf ganz  $W$  überein. Im Fall  $y \in Y_{\neq}$  gilt  $\tilde{t} \neq \hat{t}$  und  $\tilde{f}$  und  $\hat{f}$  unterscheiden sich an jedem Punkt von  $W$ . Also sind  $Y_{=}$  und  $Y_{\neq}$  offen in  $Y$ .  $\square$

**Definition 4.3.3.** Sei  $X$  ein Objekt einer Kategorie  $\mathcal{C}$ . Die **Kategorie  $\mathcal{C}_{/X}$  der Objekte von  $\mathcal{C}$  über  $X$**  ist wie folgt definiert:

- Ihre Objekte sind die Morphismen  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  in  $\mathcal{C}$  mit Ziel  $X$ .
- Sind  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  und  $q: \hat{X} \rightarrow X$  Objekte von  $\mathcal{C}_{/X}$ , so besteht  $\mathcal{C}_{/X}(p, q) = \mathcal{C}_{/X}(\tilde{X}, \hat{X})$ <sup>67</sup> aus allen Morphismen  $f: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  mit  $q \circ f = p$ , d. h.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{f} & \hat{X} \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & & X \end{array}$$

kommutiert.

- Die Verknüpfung ist von  $\mathcal{C}$  induziert.

<sup>67</sup>Meist verwendet man die unpräzisere Notation  $\mathcal{C}_{/X}(\tilde{X}, \hat{X})$ .



**4.3.4.** Analog definiert man die **Kategorie  $\mathcal{C}_X/$  aller Objekte von  $\mathcal{C}$  unter  $X$** , deren Objekte die Morphismen  $X \rightarrow Y$  sind. Beispielsweise ist  $\text{Top}_* = \text{Top}_{\{\text{pt}\}}/$  die Kategorie aller Objekte unter dem einpunktigen Raum  $\{\text{pt}\}$ . Sei  $\text{CRing}$  die Kategorie der kommutativen Ringe und sei  $R \in \text{CRing}$ . Dann ist  $\text{CRing}_{R/}$  die Kategorie der kommutativen  $R$ -Algebren.

**Definition 4.3.5.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Eine **Unterkategorie von  $\mathcal{C}$ <sup>68</sup>** ist eine Kategorie  $\mathcal{U}$ , deren Objektmenge eine Teilmenge der Objektmenge von  $\mathcal{C}$  ist, die die Eigenschaft hat, dass für alle Objekte  $U, V$  in  $\mathcal{U}$  die Menge  $\mathcal{U}(U, V)$  eine Teilmenge von  $\mathcal{C}(U, V)$  ist, in Formeln  $\mathcal{U}(U, V) \subset \mathcal{C}(U, V)$ , und deren Verknüpfung mit der Verknüpfung von  $\mathcal{C}$  „übereinstimmt“. Eine Unterkategorie  $\mathcal{U}$  von  $\mathcal{C}$  heißt **voll**, wenn für alle Objekte  $U, V$  in  $\mathcal{U}$  Gleichheit  $\mathcal{U}(U, V) = \mathcal{C}(U, V)$  gilt.

**4.3.6.** Eine volle Unterkategorie ist eindeutig durch ihre Objekte bestimmt (genauer ist damit gemeint: durch die Menge ihrer Objekte als Teilmenge der Menge der Objekte der umgebenden Kategorie).

**Definition 4.3.7.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Die Kategorie  $\text{Cov}_X$  der Überlagerungen (englisch *coverings*) von  $X$  ist die volle Unterkategorie von  $\text{Top}/_X$ , deren Objekte Überlagerungen sind. Klassisch heißen Morphismen in  $\text{Cov}_X$  **Decktransformationen** und Automorphismen einer Überlagerung **Deckbewegungen**.

**4.3.8.** Explizit hat  $\text{Cov}_X$  als Objekte die Überlagerungen von  $X$  und als Morphismen von einer Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  in eine weitere Überlagerung  $q: \hat{X} \rightarrow X$  all die stetigen Abbildungen  $d: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$ , für die

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{d} & \hat{X} \\ & \searrow p & \swarrow q \\ & X & \end{array}$$

kommutiert. Für jedes  $x \in X$  induziert  $d$  also eine Abbildung  $p^{-1}(x) \rightarrow q^{-1}(x)$  zwischen den Fasern. Insbesondere operiert  $\text{Aut}_{\text{Cov}_X}(\tilde{X})$  (auf  $\tilde{X}$  und) auf  $p^{-1}(x)$ .

**Beispiel 4.3.9.** Die Deckbewegungen von  $\text{Exp}: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  sind genau die Abbildungen  $(+n): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x + n$ , für  $n \in \mathbb{Z}$ ; dies folgt aus Lemma 3.2.7 (oder der allgemeineren Aussage 4.3.10). Die Abbildung  $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\text{Cov}_X}(\mathbb{R}^1 \xrightarrow{\text{Exp}} \mathbb{S}^1)$ ,  $n \mapsto (+n)$ , ist ein Gruppenisomorphismus.

**Beispiel 4.3.10.** Seien  $G$  eine Gruppe und  $X$  ein topologisch freier  $G$ -Raum. Dann ist  $X \rightarrow G \backslash X$  nach Satz 4.2.15 eine Überlagerung, und der jedem  $g \in G$  zugeordnete Homöomorphismus  $g: X \rightarrow X$  ist ein Automorphismus dieser Überlagerung (= eine Deckbewegung), wir erhalten also einen Gruppenmorphismus

$$\begin{aligned} G &\rightarrow \text{Aut}_{\text{Cov}_{G \backslash X}}(X \rightarrow G \backslash X), \\ g &\mapsto g = g(-). \end{aligned}$$

<sup>68</sup>Es ist nur ein dummer Zufall, dass die beiden (sprachlich verwandt erscheinenden) Begriffe *Unterkategorie* und *Kategorie der Objekte unter einem gegebenen Objekt* hier direkt hintereinander definiert werden.

Ist  $X$  zusammenhängend, so ist diese Abbildung ein Isomorphismus von Gruppen, wie aus Satz 4.3.2 folgt. Jede Deckbewegung unserer Überlagerung ist also durch ein eindeutiges Gruppenelement  $g \in G$  gegeben.

**4.3.11.** Weil jede Überlagerung étale ist, ist nach Aufgabe 4.1.16.(b) jeder Morphismus von Überlagerungen étale und insbesondere offen.

**4.3.12.** Nicht jede Decktransformation ist eine Deckbewegung (ein Automorphismus). Gegenbeispiel skizziert in Soergel 4.3.9, Seite 119 (vgl. Aufgabe 5.3.31).

**Definition 4.3.13.** Eine Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  heißt **normal** oder **galoissch** oder **regulär**, falls  $\tilde{X}$  zusammenhängend ist und  $\text{Aut}_{\text{Cov}_X}(p)$  für jedes  $x \in X$  auf der Faser  $p^{-1}(x)$  transitiv operiert: Die Faser ist nicht leer, und für je zwei Punkte  $x_1, x_2 \in p^{-1}(x)$  wird die Existenz eines Automorphismus  $g \in \text{Aut}_{\text{Cov}_X}(p)$  mit  $g(x_1) = x_2$  gefordert.

**Aufgabe 4.3.14.** Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung mit  $\tilde{X}$  zusammenhängend. Sei  $G := \text{Aut}_{\text{Cov}_X}(\tilde{X})$  ihre Automorphismengruppe (= Gruppe der Deckbewegungen). Dann operiert  $G$  topologisch frei auf  $\tilde{X}$ .

**Aufgabe 4.3.15.** Betrachte die dreiblättrige Überlagerung der Figur Acht auf Seite 94 im Skript *Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie* von Soergel. Zeige, dass die Identität die einzige Decktransformation (= der einzige Endomorphismus) dieser Überlagerung ist.

Bemerkung: Diese Überlagerung ist also nicht normal im Sinne der Definition 4.3.13.

#### 4.4. Universelle Überlagerungen.

**Definition 4.4.1.** Sei  $(X, x) \in \text{Top}_*$  ein punktierter Raum. Eine **punktierte Überlagerung von  $(X, x)$**  ist ein Objekt  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  von  $(\text{Top}_*)_{/(X, x)}$ , also ein Morphismus in  $\text{Top}_*$ , für den  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung ist. Wir schreiben  $\text{Cov}_{(X, x)}$  für die volle Unterkategorie von  $(\text{Top}_*)_{/(X, x)}$ , deren Objekte die punktierten Überlagerungen sind.

**4.4.2** (Eindeutigkeit von Lifts). Satz 4.3.2 besagt in dieser Sprache: Ist  $q: (\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$  eine punktierte Überlagerung, ist  $p: (Y, y) \rightarrow (X, x)$  ein Morphismus in  $\text{Top}_*$  und ist  $Y$  zusammenhängend, so gibt es höchstens einen Lift von  $p$  in  $\text{Top}_*$ . Ist  $p$  eine punktierte Überlagerung, so gibt es also höchstens einen Morphismus  $(Y, y) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$  in  $\text{Cov}_{(X, x)}$ .

**Definition 4.4.3.** Sei  $(X, x) \in \text{Top}_*$  ein punktierter Raum. Eine punktierte Überlagerung  $u: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  von  $(X, x)$  heißt **punktiert-universell**, falls sie ein initiales Objekt von  $\text{Cov}_{(X, x)}$  ist, falls es also für jede punktierte Überlagerung  $q: (\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$  genau einen Morphismus  $f: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$  in  $\text{Cov}_{(X, x)}$  gibt.

**4.4.4.** Da initiale Objekte eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus sind, sprechen wir von *der* punktiert-universellen punktierten Überlagerung. Für einen beliebigen punktierten Raum  $(X, x)$  ist nicht klar, ob er eine punktiert-universelle punktierte Überlagerung besitzt.

**Definition 4.4.5.** Eine Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  heißt **universell**, falls

- (a)  $p$  surjektiv ist,
- (b)  $\tilde{X}$  und damit  $X$  nicht leer sind, und
- (c) für alle  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  die punktierte Überlagerung  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, p(\tilde{x}))$  punktiert-universell ist.

**4.4.6.** Universelle Überlagerungen sind nicht eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus, aber eindeutig bis auf Isomorphismus (trotzdem sprechen wir oft von **der** universellen Überlagerung): Seien  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  und  $q: \hat{X} \rightarrow X$  universelle Überlagerungen. Dann gibt es für jede Wahl von Punkten  $\tilde{x} \in \tilde{X}$   $\hat{x} \in \hat{X}$  mit  $p(\tilde{x}) = q(\hat{x})$ <sup>69</sup> nach 4.4.4 genau einen Isomorphismus  $d: (\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{\sim} (\hat{X}, \hat{x})$  in  $\text{Cov}_X(X, x)$ , wobei  $x := p(\tilde{x}) = q(\hat{x})$ . Insbesondere ist  $d: \tilde{X} \rightarrow \hat{X}$  ein Isomorphismus in  $\text{Cov}_X$ .

Ende der 18. Vorlesung am 25.06.2019.

**Aufgabe 4.4.7.** Sei  $u: \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung. Sei  $G := \text{Aut}_{\text{Cov}_X}(\tilde{X})$  ihre Automorphismengruppe (= Gruppe der Deckbewegungen). (Jeder Endomorphismus einer universellen Überlagerung ist automatisch ein Automorphismus.) Dann operiert  $G$  topologisch frei auf  $\tilde{X}$ , und die Abbildung  $G \backslash \tilde{X} \rightarrow X$ ,  $[x] = Gx \mapsto p(x)$ , ist ein Homöomorphismus.

Hinweis für den zweiten Teil: Aufgabe 4.1.16.(a) und Aufgabe 2.7.21).

**Lösung 4.4.8.** (des ersten Teils) Sei  $\tilde{x} \in \tilde{X}$ . Da Überlagerungen étale sind, gibt es eine offene Umgebung  $U \subseteq \tilde{X}$  von  $\tilde{x}$ , so dass  $p'| := p|_U: U \xrightarrow{\sim} p(U)$  ein Homöomorphismus auf  $p(U) \subseteq X$  ist. Sei  $g \in G$  mit  $U \cap gU \neq \emptyset$ . Also gibt es  $u, u' \in U$  mit  $u = gu'$ . Es folgt  $p'(u) = p(u) = p(gu') = p(u') = p'(u')$ . Da  $p'$  injektiv ist, folgt  $u = u'$ . Also gilt  $u = gu$ , d. h.  $g$  fixiert  $u$ . Da  $p$  universell ist, folgt  $g = \text{id}_{\tilde{X}}$ . Also operiert  $G$  topologisch frei auf  $\tilde{X}$ .

**Definition 4.4.9.** Ein topologischer Raum  $X$  heißt **überlagerungstrivial**<sup>70</sup>, wenn er nicht leer ist,  $X \neq \emptyset$ , und wenn jede Überlagerung von  $X$  trivial im Sinne der Definition 4.1.1 ist.

**4.4.10.** Jeder überlagerungstriviale Raum  $X$  ist zusammenhängend: Nach Definition ist er nicht leer, und würde  $X = U \sqcup V$  mit  $\emptyset \neq U, V \subseteq X$  gelten, so wäre  $(U \times \{1, 2\}) \sqcup V \rightarrow U \sqcup V = X$  ein Beispiel einer nichttrivialen Überlagerung.

**4.4.11.** Wir werden sehen (siehe Definition 5.2.2 für die Terminologie):

- (a) Jeder einfach zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Raum ist überlagerungstrivial (Korollar 5.2.9).
- (b) Für zusammenhängende, lokal zusammenziehbare Räume stimmen die Begriffe *einfach zusammenhängend* und *überlagerungstrivial* überein (siehe 5.2.14 bzw. das etwas allgemeinere Korollar 5.2.13).

**Lemma 4.4.12.** *Ein topologischer Raum  $X$  ist genau dann überlagerungstrivial, wenn die Identität  $\text{id}_X: X \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung ist.*

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : Sei  $X$  überlagerungstrivial. Dann gilt  $X \neq \emptyset$  und  $\text{id}_X$  ist surjektiv. Sei  $x \in X$  beliebig. Zu zeigen ist, dass die punktierte Überlagerung  $\text{id}_X: (X, x) \rightarrow (X, x)$  punktiert-universell ist. Sei  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  eine punktierte Überlagerung. Wegen der Eindeutigkeit von Lifts (Satz 4.3.2 oder 4.4.2) und da  $X$  zusammenhängend ist, gibt es höchstens einen Morphismus  $(X, x) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$  (damit ist genauer ein Morphismus  $\text{id}_X \rightarrow p$  gemeint) in

<sup>69</sup> Eine solche Wahl ist dasselbe wie ein Punkt im Faserprodukt  $\tilde{X} \times_X \hat{X}$ ; dieses ist nicht leer, denn die Abbildung von diesem Faserprodukt nach  $X \neq \emptyset$  ist surjektiv.

<sup>70</sup>Der Begriff *überlagerungstrivial* ist ein ad hoc Begriff, der in der Literatur nicht verwendet wird. (Soergel verwendet hierfür den Begriff *einfach zusammenhängend*; in der Literatur hat *einfach zusammenhängend* jedoch fast immer die in Definition 3.1.20 erklärte Bedeutung.)

$\text{Cov}_{(X,x)}$ . Da  $X$  überlagerungstrivial ist, können wir ohne Einschränkung  $\tilde{X} = F \times X$  und  $p = \text{pr}_X$  annehmen, also  $\tilde{x} = (f, x)$  für ein  $f \in F$ , und dann ist  $(X, x) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}), y \mapsto (f, y)$ , offensichtlich ein Morphismus in  $\text{Cov}_{(X,x)}$ .

$\Leftarrow$ : Sei  $\text{id}_X$  eine universelle Überlagerung. Dann gilt  $X \neq \emptyset$ . Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung. Zu zeigen ist, dass  $p$  trivial ist. Sei  $x \in X$  beliebig und setze  $F := p^{-1}(x)$ . Da  $\text{id}_X$  punktiert-universell ist, gibt es für jedes  $f \in F$  genau eine stetige Abbildung  $s_f: X \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p \circ s_f = \text{id}_X$  und  $s_f(x) = f$ . Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \tau: F \times X &\rightarrow \tilde{X}, \\ (f, y) &\mapsto s_f(y). \end{aligned}$$

Sicherlich ist  $\tau$  stetig und genauer ein Morphismus von Überlagerungen von der trivialen Überlagerung  $\text{pr}_X$  in die gegebene Überlagerung  $p$ . Also ist  $\tau$  offen nach 4.3.11, und es genügt zu zeigen, dass  $\tau$  bijektiv (und damit ein Homöomorphismus) ist.

$\tau$  ist injektiv: Gelte  $\tau(f, y) = \tau(f', y')$  für zwei Punkte  $(f, y), (f', y') \in F \times X$ . Es folgt  $y = \text{pr}_X(f, y) = p(\tau(f, y)) = p(\tau(f', y')) = \text{pr}_X(f', y') = y'$ . Setze  $\tilde{x} := s_f(y) = \tau(f, y) = \tau(f', y) = s_{f'}(y)$ . Dann sind  $s_f, s_{f'}: (X, y) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$  zwei Morphismen in  $\text{Cov}_{(X,y)}$ . Da aber nach Annahme  $(X, y)$  alias  $\text{id}_X: (X, y) \rightarrow (X, y)$  punktiert-universell ist, also initial in  $\text{Cov}_{(X,y)}$ , folgt  $s_f = s_{f'}$ . Auswerten bei  $x$  liefert  $f = s_f(x) = s_{f'}(x) = f'$ .

$\tau$  ist surjektiv: Sei  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  beliebig. Setze  $y := p(\tilde{x})$ . Da  $\text{id}_X$  punktiert-universell ist, existiert genau eine stetige Abbildung  $s: X \rightarrow \tilde{X}$  mit  $p \circ s = \text{id}_X$  und  $s(y) = \tilde{x}$ . Setze  $f = s(x) \in p^{-1}(x) = F$ . Dann gilt  $s(x) = f = s_f(x)$ . Nach Eindeutigkeit von  $s_f$  folgt  $s = s_f$ . Also gilt  $\tau(f, y) = s_f(y) = s(y) = \tilde{x}$ .  $\square$

**Lemma 4.4.13.** *Nichtleere reelle Intervalle sind überlagerungstrivial.*

*Beweis.* Wir zeigen dies zuerst für kompakte reelle Intervalle  $I = [a, b]$ , für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Nach Lemma 4.4.12 reicht es zu zeigen, dass  $\text{id}_I: I \rightarrow I$  ein universelle Überlagerung ist. Sei  $c \in I$ . Zu zeigen ist, dass  $\text{id}: (I, c) \rightarrow (I, c)$  punktiert-universell ist, also initial in  $\text{Cov}_{(I,c)}$ . Sei  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (I, c)$  eine punktierte Überlagerung. Aus Kompaktheitsgründen finden wir eine Unterteilung  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$  unseres Intervalls so, dass  $p^{-1}([a_{i-1}, a_i]) \rightarrow [a_{i-1}, a_i]$  für jedes  $i = 1, \dots, n$  eine triviale Überlagerung ist. Sei  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $c \in [a_{i-1}, a_i]$ . Weil  $[a_{i-1}, a_i]$  trivial überlagert ist, gibt es eine stetige Abbildung  $f_i: [a_{i-1}, a_i] \rightarrow \tilde{X}$  mit  $f_i(c) = \tilde{x}$ .

Im Fall  $i < n$  gibt es analog eine stetige Abbildung  $f_{i+1}: [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \tilde{X}$  mit  $f_{i+1}(a_i) = f_i(a_i)$ , da  $[a_i, a_{i+1}]$  trivial überlagert ist. Die beiden Abbildungen  $f_i$  und  $f_{i+1}$  nehmen auf  $a_i$  nach Konstruktion denselben Wert an und liefern deswegen nach Proposition 2.4.13.(b) eine stetige Abbildung  $[a_{i-1}, a_{i+1}] \rightarrow \tilde{X}$ , die  $f_i$  und  $f_{i+1}$  fortsetzt. Iteration dieses Verfahrens liefert eine stetige Abbildung  $[a_{i-1}, a] \rightarrow \tilde{X}$ , die  $c$  auf  $\tilde{x}$  abbildet. Im Fall  $i > 0$  dehnt man diese stetige Abbildung analog zu einer stetigen Abbildung  $[a, b] \rightarrow \tilde{X}$  aus, die  $c$  auf  $\tilde{x}$  abbildet. Da  $[a, b]$  zusammenhängend ist, gibt es höchstens eine solche stetige Abbildung (Satz 4.3.2). Also ist  $\text{id}_I$  universell.

Der Beweis für beliebige reelle Intervalle ist dem Leser überlassen (Aufgabe 4.4.14).  $\square$

**Aufgabe 4.4.14.** Vervollständige den Beweis von Lemma 4.4.13.

Hinweis: Überdecke beispielsweise  $(0, 1]$  durch kompakte Teilmengen der Form  $[1/n, 1]$ , für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  (wie im Beweis von Aufgabe 3.2.11).

**Aufgabe 4.4.15.** Für  $n > 0$  ist jedes endliche Produkt  $I_1 \times \cdots \times I_n$  nichtleerer reeller Intervalle überlagerungstrivial. Insbesondere sind  $\mathbb{R}^n$  und  $[0, 1]^n$  überlagerungstrivial.

Hinweis: Schachbrettargument wie im Beweis von Lemma 3.2.9, falls alle  $I_j$  kompakt sind.

**Satz 4.4.16.** Sei ein Diagramm (ohne den gestrichelten Pfeil)

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow \exists! \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

in  $\text{Top}_*$  gegeben. Sei  $p$  eine punktierte Überlagerung und sei  $Y$  überlagerungstrivial. Dann gibt es genau einen Morphismus  $\tilde{f}$  in  $\text{Top}_*$ , der das obige Diagramm kommutativ macht (also einen Lift von  $f$  in  $\text{Top}_*$ ).

**Beispiel 4.4.17.** Ist  $U \subset \mathbb{C}$  eine überlagerungstriviale Teilmenge (etwa ein Quadrat, vgl. Aufgabe 4.4.15) und ist  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  stetig ohne Nullstelle, so gibt es für jedes  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  eine stetige Abbildung  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(u)^n = f(u)$  für alle  $u \in U$ : Wende Satz 4.4.16 auf die Überlagerung  $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$ , an (siehe Beispiele 4.1.5; wer mag, kann sich auf den Fall  $n > 0$  zurückziehen). Man kann zusätzlich an einem Punkt  $u_0$  von  $U$  vorschreiben, welche  $n$ -te Wurzel aus  $f(u_0)$  die Funktion  $g$  dort annehmen soll.

Analog gibt es eine stetige Abbildung  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\exp(g(u)) = f(u)$  für alle  $u \in U$ .

*Beweis.* Da  $Y$  als überlagerungstrivialer Raum zusammenhängend ist (siehe 4.4.10), gibt es nach 4.4.2 höchstens einen solchen Morphismus  $\tilde{f}$ . Zu zeigen bleibt die Existenz von  $\tilde{f}$ . Betrachte das Pullback-Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X \tilde{X} & \xrightarrow{f'} & \tilde{X} \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

in  $\text{Top}$  (vgl. Aufgabe 3.7.9). Als Pullback einer Überlagerung ist  $p'$  eine Überlagerung (Aufgabe 4.1.7). Da  $Y$  überlagerungstrivial ist, ist  $p'$  eine triviale Überlagerung. Also existiert eine stetige Abbildung  $s: Y \rightarrow Y \times_X \tilde{X}$  mit  $s(y) = (y, \tilde{x})$  und  $p' \circ s = \text{id}_Y$ . Die stetige Abbildung  $\tilde{f} := f' \circ s$  erfüllt dann wie gewünscht  $p \circ \tilde{f} = p \circ f' \circ s = f \circ p' \circ s = f \circ \text{id}_Y = f$  und  $\tilde{f}(y) = f'(s(y)) = f'(y, \tilde{x}) = \tilde{x}$ .  $\square$

**Korollar 4.4.18.** Jede surjektive Überlagerung durch einen überlagerungstrivialen Raum ist universell: Ist  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine surjektive Überlagerung und ist  $\tilde{X}$  überlagerungstrivial, so ist  $p$  universell.

**Beispiele 4.4.19.** Die folgenden Aussagen verwenden Lemma 4.4.13 und Korollar 4.4.18.

- Die Überlagerung  $\text{Exp}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  ist universell.
- Die Überlagerung  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{S}^1)^n$  ist universell (Aufgabe 4.4.15).
- Kleinsche Flasche als Quotient von  $\mathbb{R}^2$ . Bild bei Soergel.

*Beweis.* Laut Annahme gilt  $\tilde{X} \neq \emptyset$ , und  $p$  ist surjektiv. Zu zeigen bleibt, dass für jeden Punkt  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  die punktierte Überlagerung  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, p(\tilde{x}))$  punktiert-universell ist,

also ein initiales Objekt in  $\text{Cov}_{(X,x)}$ . Da  $\tilde{X}$  zusammenhängend ist (siehe 4.4.10), gibt es in jede punktierte Überlagerung von  $(X, x)$  höchstens einen Morphismus von  $(\tilde{X}, \tilde{x})$  (siehe 4.4.2). Dass es einen solchen Morphismus gibt, ist gerade die Aussage von Satz 4.4.16.  $\square$

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 4.2.19, freie Operation einer endlichen Gruppe auf einem Hausdorff-Raum ist topologisch frei
- (2) Aufgabe 4.2.24, Raum ist topologisch frei, falls er äquivariant in einen topologisch freien Raum abbildet
- (3) Aufgabe 4.4.7, Automorphismengruppe einer universellen Überlagerung operiert topologisch frei, Bahnenraum ist kanonisch homöomorph zur Basis der Überlagerung
- (4) Aufgabe 4.4.15 (für kompakte Intervalle und  $n = 2$ , der Rest ist Bonusaufgabe), Produkte nichtleerer reeller Intervalle sind überlagerungstrivial

## 5. ÜBERLAGERUNGEN UND FUNDAMENTALGRUPPE

### 5.1. Transport durch Wegliften.

**Definition 5.1.1.** Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und sei  $\gamma \in \Omega(X, x, y)$  ein Weg zwischen zwei Punkten  $x, y \in X$  des Basisraums. Der **Transport entlang  $\gamma$**  ist die wie folgt definierte Abbildung

$$\langle \gamma \rangle: p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$$

von der Faser über  $x$  in die Faser über  $y$ . Da das Intervall  $[0, 1]$  überlagerungstrivial ist (Lemma 4.4.13), gibt es für jedes  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$  genau einen Lift  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$  von  $\gamma$  mit  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$  (Satz 4.4.16); das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow \tilde{\gamma} & \downarrow p \\ ([0, 1], 0) & \xrightarrow{\gamma} & (X, x) \end{array}$$

in  $\text{Top}_*$  kommutiert. Definiere  $\langle \gamma \rangle(\tilde{x}) := \tilde{\gamma}(1)$ .

**Lemma 5.1.2** (Eigenschaften des Transports entlang von Wegen). *Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung. Dann gelten:*

- (a) Sind  $\gamma, \beta \in \Omega(X, x, y)$  homotope Wege, so gilt  $\langle \gamma \rangle = \langle \beta \rangle$ . Insbesondere können wir für jede Homotopieklasse  $\delta \in \pi_1(X, x, y)$  von Wegen den **Transport entlang  $\delta$**

$$\langle \delta \rangle: p^{-1}(x) \rightarrow p^{-1}(y)$$

durch  $\delta \rangle := \langle \delta' \rangle$  definieren, wobei  $\delta' \in \Omega(X, x, y)$  ein beliebiger Repräsentant von  $\delta$  ist.

- (b)  $\langle \varepsilon_x \rangle = \text{id}_{p^{-1}(x)}$  für alle  $x \in X$ ;  
(c)  $\langle \beta \rangle \circ \langle \gamma \rangle = \langle \beta * \gamma \rangle$  für alle verknüpfbaren (Homotopieklassen von) Wege(n)  $\beta, \gamma$ ;  
(d) Ist  $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$  eine weitere Überlagerung und ist

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{Y} \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm und ist  $\gamma$  ein(e Homotopieklasse von) Weg(en) in  $X$ , so gilt  $\tilde{f} \circ \langle \gamma \rangle = \langle f \circ \gamma \rangle \circ \tilde{f}$  bzw. als kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(x) & \xrightarrow{\tilde{f}} & q^{-1}(f(x)) \\ \downarrow \langle \gamma \rangle & & \downarrow \langle f \circ \gamma \rangle \\ p^{-1}(y) & \xrightarrow{\tilde{f}} & q^{-1}(f(y)). \end{array}$$

**5.1.3.** Die ersten drei Punkte (a), (b), (c) von Lemma 5.1.2 bedeuten, dass für jede Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$

$$\begin{aligned} [\tilde{X}]: \Pi_1(X) &\rightarrow \text{Set}, \\ x &\mapsto p^{-1}(x), \\ \delta &\mapsto \langle \delta \rangle, \end{aligned}$$

einen Funktor definiert. (Der letzte Punkt (d) liefert eine Transformation (nicht definiert)  $\tau: [\tilde{X}] \Rightarrow [\tilde{Y}] \circ \Pi_1(f)$  von Funktoren, die durch  $\tau_x := \tilde{f}: p^{-1}(x) \rightarrow q^{-1}(f(x))$  definiert ist.)

*Beweis.* Wir zeigen nur den ersten Punkt (a), die anderen Punkte sind offensichtlich und dem Leser überlassen. Sei  $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Homotopie von Wegen von  $\gamma$  nach  $\beta$ , wobei  $\gamma$  und  $\beta$  Wege von  $x$  nach  $y$  seien. Es gelten also  $h(-, 0) = \gamma$ ,  $h(-, 1) = \beta$ ,  $h(0, -) = \varepsilon_x$ ,  $h(1, -) = \varepsilon_y$ . Nach Aufgabe 4.4.15 ist  $[0, 1]^2$  überlagerungstrivial. Sei  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ . Nach Satz 4.4.16 existiert genau ein Morphismus  $\tilde{h}$ , so dass

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow \tilde{h} & \downarrow p \\ ([0, 1]^2, 0) & \xrightarrow{h} & (X, x) \end{array}$$

in  $\text{Top}_*$  kommutiert. Wir verwenden die Eindeutigkeitsaussage dieses Satzes im Folgenden mehrfach: Zunächst gelten  $\tilde{h}(-, 0) = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$  (mit  $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$  wie in Definition 5.1.1) und  $\tilde{h}(0, -) = \varepsilon_{\tilde{x}}$ . Insbesondere gilt  $\tilde{h}(0, 1) = \tilde{x}$ . Es folgt  $\tilde{h}(-, 1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}}$  (mit  $\tilde{\beta}_{\tilde{x}}$  wie in Definition 5.1.1). Da  $\tilde{h}(1, -)$  konstant sein muss, haben also  $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$  und  $\tilde{\beta}_{\tilde{x}}$  denselben Endpunkt. Dies zeigt  $\langle \gamma \rangle(\tilde{x}) = \langle \beta \rangle(\tilde{x})$ .  $\square$

**5.1.4.** Der Beweis von Punkt (a) von Lemma 5.1.2 zeigt genauer: Sind  $\gamma$  und  $\beta$  homotope Wege, so sind ihre Lifts  $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$  und  $\tilde{\beta}_{\tilde{x}}$  mit Startpunkt  $\tilde{x}$  ebenfalls homotop.

Ende der 19. Vorlesung am 27.06.2019.

**5.1.5.** Erinnere an Definition 4.2.23.

**Satz 5.1.6** (Faserfunktor). Seien  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $x \in X$ .

(a) Dann ist

$$\begin{aligned} \langle - \rangle: \pi_1(X, x) &\rightarrow \text{Aut}_{\text{Set}}(p^{-1}(x)), \\ \gamma &\mapsto \langle \gamma \rangle, \end{aligned}$$

ein Gruppenmorphismus, also eine Operation von  $\pi_1(X, x)$  auf der Faser  $p^{-1}(x)$ , genannt **Monodromie(operation)**. Mit anderen Worten ist die Faser  $p^{-1}(x)$  eine  $\pi_1(X, x)$ -Menge.

- (b) Ist  $q: \widehat{X} \rightarrow X$  eine weitere Überlagerung und  $d: \widetilde{X} \rightarrow \widehat{X}$  ein Morphismus in  $\text{Cov}_X (=$  eine Decktransformation), so ist die von  $d$  induzierte Abbildung  $d: p^{-1}(x) \rightarrow q^{-1}(x)$  eine  $\pi_1(X, x)$ -äquivariante Abbildung.

Insbesondere definiert

$$(5.1.1) \quad F = F_x: \text{Cov}_X \rightarrow \pi_1(X, x)\text{-Set}, \\ p \mapsto p^{-1}(x),$$

einen Funktor, genannt **Faserfunktor**.

*Beweis.* Dies folgt alles aus Lemma 5.1.2. □

**5.1.7.** Wir schreiben im Folgenden oft  $\gamma\tilde{x}$  oder  $\gamma.\tilde{x}$  statt  $\langle\gamma\rangle(\tilde{x})$ , wie dies ja allgemein bei Operationen üblich ist.

**Satz 5.1.8.** Seien  $p: \widetilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung und  $x \in X$ .

- (a) (Fundamentalgruppe einer Überlagerung als Stabilisator) Sei  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ . Dann ist der induzierte Gruppenmorphismus

$$\pi_1(p): \pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}) \hookrightarrow \pi_1(X, x)$$

injektiv und hat als Bild den Stabilisator (= die Standgruppe) von  $\tilde{x}$  unter der Monodromieoperation, in Formeln

$$\text{Im } \pi_1(p) = \{\gamma \in \pi_1(X, x) \mid \gamma.\tilde{x} = \tilde{x}\}.$$

- (b) Ist zusätzlich  $\widetilde{X}$  wegzusammenhängend, so operiert  $\pi_1(X, x)$  transitiv auf der Faser  $p^{-1}(x)$ , falls diese nicht leer ist.

**5.1.9.** Die Fundamentalgruppe des Totalraums ist also (isomorph zu) eine(r) Untergruppe der Fundamentalgruppe der Basis. Ist  $X$  einfach zusammenhängend, so hat insbesondere jede Überlagerung von  $X$  triviale Fundamentalgruppe. Man mag dies als Indiz dafür sehen, dass Überlagerungen einfach zusammenhängender Räume oft wenig kompliziert sind (siehe etwa Korollar 5.2.9).

**5.1.10.** Ist  $p: (\widetilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  eine zusammenhängende punktierte Überlagerung, so ist

$$\pi_1(X, x)/\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x), \\ \gamma \mapsto \gamma.\tilde{x},$$

ein Isomorphismus in  $\pi_1(X, x)$ -Set, wenn wir die Gruppe  $\pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x})$  mit ihrem homomorphen Bild in  $\pi_1(X, x)$  identifizieren. Dies folgt sofort aus Satz 5.1.8 und der Trivialität, dass für jede Gruppe  $G$  und jede  $G$ -Menge  $M$  und jeden Punkt  $m \in M$  die Abbildung  $G/G_m \xrightarrow{\sim} Gm$ ,  $gG_m \mapsto gm$ , eine  $G$ -äquivariante Bijektion ist, wobei  $G_m$  der Stabilisator von  $m$  ist.

*Beweis.* Sei  $\tilde{y} \in \widetilde{X}$  und setze  $y := p(\tilde{y})$ . Wir erhalten eine Bijektion

$$\Omega(\widetilde{X}, \tilde{x}, \tilde{y}) \xrightarrow{\sim} \{\gamma \in \Omega(X, x, y) \mid \langle\gamma\rangle(\tilde{x}) = \tilde{y}\}, \\ \beta \mapsto p \circ \beta,$$



nach der Definition des Transports entlang von Wegen 5.1.1 (die Umkehrabbildung bildet  $\gamma$  auf  $\tilde{\gamma}_{\tilde{x}}$  ab). Diese Bijektion induziert eine Bijektion

$$(5.1.2) \quad \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}, \tilde{y}) \xrightarrow{\sim} \{\gamma \in \pi_1(X, x, y) \mid \gamma.\tilde{x} = \tilde{y}\}$$

auf Homotopieklassen von Wegen nach 5.1.4. Für  $\tilde{y} = \tilde{x}$  (und somit  $y = x$ ) ergibt sich Teil (a) des Satzes. Für Teil (b) wähle  $\tilde{y} \in p^{-1}(x)$  beliebig. Dann gilt  $y = x$ . Ist  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend, so ist die linke Seite von (5.1.2) nicht leer. Also ist die rechte Seite nicht leer, es gibt also ein  $\gamma \in \pi_1(X, x)$  mit  $\gamma.\tilde{x} = \tilde{y}$ . Daraus folgt sofort die Transitivität der Operation.  $\square$

**Aufgabe 5.1.11.** Betrachte die dreiblättrige Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  der Figur Acht  $X$  auf Seite 94 im Skript *Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie* von Soergel. Sei  $x$  der Kreuzungspunkt der Figur Acht. Wie operieren die beiden üblichen Erzeuger  $a, b$  von  $\pi_1(X, x)$  auf der Faser  $p^{-1}(x)$ ?

**Satz 5.1.12.** Sei  $X$  ein topologisch freier  $G$ -Raum, für eine Gruppe  $G$ . Sei  $x \in X$  und sei  $\bar{x} \in G \backslash X$  sein Bild im Bahnenraum. Dann gelten

(a) Es gibt genau einen Gruppenmorphismus

$$c_x: \pi_1(G \backslash X, \bar{x}) \rightarrow G$$

mit  $c_x(\gamma)^{-1}.x = \gamma.x$  für alle  $\gamma \in \pi_1(G \backslash X, \bar{x})$ .<sup>71</sup>

(b) Der Kern von  $c_x$  ist genau das Bild von  $\pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(G \backslash X, \bar{x})$  (welches somit ein Normalteiler ist). (In anderen Worten ist

$$1 \rightarrow \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(G \backslash X, \bar{x}) \xrightarrow{c_x} G$$

eine „linksexakte“ Sequenz von Gruppen.)

(c) Ist  $X$  wegzusammenhängend<sup>72</sup>, so ist  $c_x$  surjektiv. (Die obige linksexakte Sequenz kann man also rechts durch  $\rightarrow 1$  zu einer exakten Sequenz ergänzen.)

(d) Ist  $X$  einfach zusammenhängend, so ist  $c_x$  ein Isomorphismus, in Worten ist also die Fundamentalgruppe des Bahnenraums isomorph zu  $G$ .

(e) Ist  $G$  abelsch, so hängt  $c_x$  nur von  $\bar{x}$  ab (es gilt also  $c_x = c_{x'}$  für alle  $x, x'$  in derselben  $G$ -Bahn).

*Beweis.* (a) Die Abbildung  $p: X \rightarrow G \backslash X$  ist nach Satz 4.2.15 eine Überlagerung. Auf  $F := p^{-1}(\bar{x}) = p^{-1}(p(x)) = Gx$  operieren die beiden Gruppen  $\pi_1(G \backslash X, \bar{x})$  (durch Monodromie) und  $G$ . Weil jedes  $g \in G$  auf  $X$  durch eine Deckbewegung operiert, kommutieren diese beiden Operationen nach dem Satz über den Faserfunktorkomplex 5.1.6 in dem Sinne miteinander, dass  $\gamma.(g.f) = g.(\gamma.f)$  für alle  $f \in F$ ,  $\gamma \in \pi_1(G \backslash X, \bar{x})$  und  $g \in G$  gilt.

Da  $X$  topologisch frei als  $G$ -Raum und insbesondere frei als  $G$ -Menge ist, ist die Bahn  $F = Gx$  ein freier transitiver  $G$ -Raum.

Wir machen  $F$  per  $f.g := g^{-1}.f$  zu einer freien transitiven Menge- $G$  (Menge- $G = G$ -Rechtsmenge = Menge zusammen mit einem Gruppenmorphismus  $G^{\text{op}} \rightarrow \text{Aut}_{\text{Set}}(X)$ ). Die erste Behauptung folgt nun aus dem folgenden rein algebraischen Lemma 5.1.13, angewandt auf  $H = \pi_1(G \backslash X, \bar{x})$  und  $f = x$ .

<sup>71</sup>Soergel nennt diesen Gruppenmorphismus *Faserwirkungsvergleich*, denn er vergleicht die Wirkung=Operation der beiden Gruppen  $\pi_1(G \backslash X, \bar{x})$  und  $G$  auf der Faser.

<sup>72</sup>Es reicht anzunehmen, dass  $Gx$  in einer Wegzusammenhangskomponente von  $X$  liegt.

(b) Ein Element  $\gamma \in \pi_1(G \setminus X, \bar{x})$  ist genau dann im Kern von  $c_x$ , wenn  $\gamma.x = x$  gilt. Nun verwende den ersten Teil von Satz 5.1.8.

(c) Dies folgt sofort aus dem zweiten Teil von Satz 5.1.8. (Ist  $Gx$  in einer Zusammenhangskomponente von  $X$ , so gibt es für jedes  $g \in G$  einen Weg  $\tilde{\gamma}$  in  $X$  von  $x$  nach  $g.x$ . Für  $\gamma$  sein Bild in  $G \setminus X$  gilt dann  $g.x = \gamma.x = c_x(\gamma)^{-1}.x$ , also  $c_x(\gamma) = g^{-1}$ .)

(d) Dies folgt sofort aus (b) und (c).

(e) Dies folgt aus 5.1.14. □

**Lemma 5.1.13.** *Sei  $F$  eine Menge mit einer freien transitiven Rechts-Operation einer Gruppe  $G$  (mit anderen Worten ist  $F$  ein  $G$ -(Rechts-)Torsor) und einer (Links-)Operation einer Gruppe  $H$ , die in dem Sinne miteinander kommutieren, dass  $(h.x).g = h.(x.g)$  für alle  $x \in F$ ,  $h \in H$  und  $g \in G$  gilt. Dann liefert jede Wahl eines Elements  $f \in F$  einen Gruppenmorphismus*

$$c_f: H \rightarrow G,$$

der eindeutig durch  $h.f = f.c_f(h)$  für alle  $h \in H$  bestimmt ist. Ist die Operation von  $H$  frei, so ist  $c_f$  injektiv. Ist die Operation von  $H$  transitiv, so ist  $c_f$  surjektiv.

**5.1.14.** Sind  $f, f' \in F$  zwei Elemente, so gibt es genau ein  $g \in G$  mit  $f' = f.g$ , und es gilt

$$c_{f'}(-) = g c_f(-) g^{-1},$$

denn aus  $h.f' = f'.c_{f'}(h)$  folgt

$$h.f = h.(f'.g^{-1}) = (h.f').g^{-1} = f'.(c_{f'}(h)g^{-1}) = (f'.g^{-1}).(g c_f(h) g^{-1}) = f.(g c_f(h) g^{-1}).$$

Ist  $G$  abelsch, so gilt insbesondere  $c_f = c_{f'}$  und  $c_f$  ist unabhängig von der Wahl von  $f \in F$ .

*Beweis.* Kurzversion: Freiheit und Transitivität der  $G$ -Rechtsoperation bedeutet, dass  $G \xrightarrow{\sim} F$ ,  $g \mapsto f.g$ , bijektiv ist. Diese Abbildung ist rechts- $G$ -äquivariant, wenn wir  $G$  per Rechtsmultiplikation auf  $G$  operieren lassen. Identifizieren wir  $G = F$ , wobei  $e$  dem Element  $f$  entspricht, so operiert also  $H$  von links auf  $G$ , und diese Operation vertauscht mit der Rechtsmultiplikation von  $G$  auf  $G$ . Für jedes Element  $h \in H$  setze  $c_f(h) := h.e$  (alias  $h.f$  unter unserer Identifikation). Dann gilt  $h.g = h.(e.g) = (h.e).g = c_f(h).g$  für alle  $g \in G$ , also  $h. = c_f(h).$  für alle  $h \in H$ . Wegen  $c_f(hh'). = (hh'). = h. \circ h'. = (c_f(h).) \circ (c_f(h').) = (c_f(h).c_f(h').)$  folgt per Auswerten bei  $e \in G$ , dass  $c_f$  ein Gruppenmorphismus ist. Die Bedingung  $h.f = f.c_f(h)$  entspricht unter unserer Identifikation der Bedingung  $h.e = e.c_f(h) = c_f(h)$ , so dass die Eindeutigkeit von  $c_f$  klar ist. (Für die Aussagen bezüglich Injektivität und Bijektivität siehe Ende der Langversion.)

Langversion: Es ist klar, dass  $c_f$  eindeutig durch  $h.f = f.c_f(h)$  bestimmt ist, denn  $G$  operiert frei und transitiv auf  $F$ .

Die Operation von  $H$  auf  $F$  ist durch einen Gruppenmorphismus

$$\varphi: H \rightarrow \text{Aut}_{\text{Set}}(F)$$

gegeben. Da die Operation von  $H$  mit der Operation von  $G$  kommutiert, landet dieser sogar in  $\text{Aut}_{\text{Set-}G}(F)$ , wobei  $\text{Set-}G$  die Kategorie der Mengen- $G$  bezeichnet, wir haben also einen Gruppenmorphismus

$$\varphi: H \rightarrow \text{Aut}_{\text{Set-}G}(F).$$

Sei nun  $f \in F$ . Weil  $F$  eine freie transitive Menge- $G$  ist, definiert

$$\begin{aligned}\beta: G &\xrightarrow{\sim} F, \\ g &\mapsto f \cdot g,\end{aligned}$$

eine Bijektion, ja sogar einen Isomorphismus von Mengen- $G$  wenn wir  $G$  per Rechtsmultiplikation als Menge- $G$  auffassen. Dies liefert einen Isomorphismus

$$\begin{aligned}\gamma: \text{Aut}_{\text{Set-}G}(F) &\xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\text{Set-}G}(G), \\ \alpha &\mapsto \beta^{-1} \circ \alpha \circ \beta.\end{aligned}$$

von Gruppen. Eine einfache Rechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned}\lambda: G &\xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\text{Set-}G}(G), \\ g &\mapsto g \cdot,\end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Gruppen ist. Die Verknüpfung

$$H \xrightarrow{\varphi} \text{Aut}_{\text{Set-}G}(F) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\text{Set-}G}(G) \xrightarrow[\sim]{\lambda^{-1}} G.$$

ist der gesuchte Gruppenmorphismus  $c_f$ , denn  $c_f(h)$  entspricht dem Automorphismus  $g \mapsto c_f(h)g$  von  $G \in \text{Set-}G$  und dem Automorphismus  $f \cdot g \mapsto f \cdot c_f(h)g$  von  $F \in \text{Set-}G$ .

Ist die Operation von  $H$  frei, so folgt aus  $c_f(h) = e = e_G$  die Gleichung  $h \cdot f = f \cdot c_f(h) = f \cdot e = f$  und somit  $h = e$ .

Ist die Operation von  $H$  transitiv, so gibt es für jedes Element  $g \in G$  ein Element  $h \in H$  mit  $h \cdot f = f \cdot g$ , und aus  $h \cdot f = f \cdot c_f(h)$  und Freiheit der  $G$ -Operation folgt  $c_f(h) = g$ .  $\square$

**Beispiele 5.1.15.** Aus Satz 5.1.12 erhalten wir:

- (a) Sei  $n \geq 2$ , so dass  $\mathbb{S}^n$  einfach zusammenhängend ist (Satz 3.1.25). Unter der Identifikation  $\mathbb{P}^n \mathbb{R} = \{\pm 1\} \setminus \mathbb{S}^n$  ist für jedes  $x \in \mathbb{S}^n$  mit zugehörigem  $\bar{x} \in \mathbb{P}^n \mathbb{R}$  die Abbildung  $c_x$  ein Isomorphismus

$$\pi_1(\mathbb{P}^n \mathbb{R}, \bar{x}) = \pi_1(\{\pm 1\} \setminus \mathbb{S}^n, \bar{x}) \xrightarrow{\sim} \{\pm 1\}$$

von Gruppen. Da  $\{\pm 1\}$  abelsch ist, hängt dieser Isomorphismus nur von  $\bar{x}$  ab. In Worten gibt es also in  $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$  an jedem Basispunkt bis auf Homotopie genau eine nicht-triviale Schleife, deren Quadrat aber zusammenziehbar ist.

- (b) Mit dem Homöomorphismus  $\mathbb{S}^1 \xrightarrow[\sim]{\text{Exp}} \mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}$  erhalten wir die bereits bekannte Aussage

$$\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \pi_1(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{R}, \bar{0}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$

## 5.2. Klassifikation von Überlagerungen.

### 5.2.1. Ziel ist der Klassifikationssatz 5.2.20.

**Definition 5.2.2.** Sei (E) eine Eigenschaft topologischer Räume, die unter Homöomorphismen invariant<sup>73</sup> ist, etwa *zusammenziehbar* oder *wegzusammenhängend*. Ein topologischer Raum  $X$  heißt **lokal (E)**, wenn jede Umgebung jedes Punktes eine Umgebung desselben Punktes enthält, die Eigenschaft (E) hat: Für alle  $x \in X$  und alle Umgebungen  $U$  von  $x$  (in  $X$ ) gibt es eine Umgebung  $V$  von  $x$  (in  $X$ <sup>74</sup>) mit  $V \subset U$ , so dass  $V$  die Eigenschaft (E) hat.

<sup>73</sup> Invarianz unter Homöomorphismen bedeutet: Ist  $h: X \rightarrow Y$  ein Homöomorphismus, so hat  $X$  genau dann die Eigenschaft (E), wenn  $Y$  die Eigenschaft (E) hat.

<sup>74</sup>oder äquivalent in  $U$

**5.2.3.** Der bereits definierte Begriff *lokal zusammenhängend* (siehe Definition 4.1.9) ist ein Spezialfall dieser Definition.

Der Begriff *lokal abgeschlossen in* (siehe Aufgabe 2.5.21) ist streng gesehen kein Spezialfall, da *abgeschlossen in* keine Eigenschaft eines topologischen Raums ist, aber eine Eigenschaft eines Paares  $(A, X)$ , wobei  $X$  ein topologischer Raum ist und  $A$  eine Teilmenge von  $X$ .

Der Begriff *lokalsternförmig* (siehe Aufgabe 3.1.27) ist wohl leider kein Spezialfall.

**5.2.4.** Ist  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine étale Abbildung und ist  $X$  lokal (E), so ist auch  $\tilde{X}$  lokal (E).

Ende der 20. Vorlesung am 02.07.2019 (Beweis von Lemma 5.1.13 nur mündlich, Studierende lesen ihn selbst).

- 5.2.5.**
- (a) Ist ein topologischer Raum lokal wegzusammenhängend, so sind seine Wegzusammenhangskomponenten offen und abgeschlossen und stimmen mit den Zusammenhangskomponenten überein (siehe Lemma 2.6.17). Insbesondere ist ein solcher Raum genau dann zusammenhängend, wenn er wegzusammenhängend ist.
  - (b) Jede offene Teilmenge eines lokal wegzusammenhängenden Raumes ist wieder lokal wegzusammenhängend.
  - (c) Insbesondere gilt: Ist  $X$  lokal wegzusammenhängend und  $U$  eine Umgebung eines Punktes  $x \in X$ , so existiert eine offene wegzusammenhängende Umgebung  $V \subseteq U$  von  $x$  mit  $V \subset U$ : Ohne Einschränkung können wir  $U$  als offen in  $X$  voraussetzen, und dann wähle man  $V$  als die Wegzusammenhangskomponente von  $x$  in  $U$ . Diese ist auch offen in  $X$ . Mit anderen Worten bilden die offenen wegzusammenhängenden Teilmengen von  $X$  eine Basis der Topologie von  $X$ .

**Satz 5.2.6** (Liftbarkeitskriterium). *Sei ein Diagramm (ohne den gestrichelten Pfeil)*

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow \exists? \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x) \end{array}$$

in  $\text{Top}_*$  gegeben, wobei  $p$  eine punktierte Überlagerung ist. Sei  $Y$  zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Dann sind äquivalent:

- (a)  $f$  hat einen Lift  $\tilde{f}$  wie im Diagramm angedeutet (welcher eindeutig ist, da  $Y$  zusammenhängend ist, siehe 4.4.2);
- (b) es gilt  $\text{Im } \pi_1(f) \subset \text{Im } \pi_1(p)$ .

**5.2.7.** Nach Satz 5.1.8.(a) ist  $\pi_1(p)$  injektiv. Also bedeutet Bedingung (b) äquivalent, dass  $\pi_1(f)$  in  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  landet, also einen Lift hat:

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow & \downarrow \pi_1(p) \\ \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(X, x). \end{array}$$

*Beweis.* Hat  $f$  einen Lift, so folgt aus  $f = p \circ \tilde{f}$  sofort  $\pi_1(f) = \pi_1(p) \circ \pi_1(\tilde{f})$ , also  $\text{Im } \pi_1(f) \subset \text{Im } \pi_1(p)$ .

Gelte umgekehrt  $\text{Im } \pi_1(f) \subset \text{Im } \pi_1(p)$ . Bilde das kartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y} & \xrightarrow{g} & \tilde{X} \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

in  $\text{Top}$  (vgl. Aufgabe 3.7.9). Als Pullback einer Überlagerung ist  $q$  eine Überlagerung (Aufgabe 4.1.7).

Sei  $\tilde{y} \in \tilde{Y}$  der eindeutige Punkt mit  $q(\tilde{y}) = y$  und  $g(\tilde{y}) = \tilde{x}$ . Wir erhalten die beiden kommutativen Diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{Y}, \tilde{y}) & \xrightarrow{g} & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ \downarrow q & & \downarrow p \\ (Y, y) & \xrightarrow{f} & (X, x), \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}) & \xrightarrow{\pi_1(g)} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \\ \downarrow \pi_1(q) & & \downarrow \pi_1(p) \\ \pi_1(Y, y) & \xrightarrow{\pi_1(f)} & \pi_1(X, x) \end{array}$$

in  $\text{Top}_*$  und  $\text{Grp}$ .<sup>75</sup> Da die Vertikalen des linken Diagramms punktierte Überlagerungen sind, sind die Vertikalen des rechten Diagramms injektiv (Satz 5.1.8.(a)).

Wir behaupten, dass  $\pi_1(q)$  sogar bijektiv ist. Sei  $\gamma \in \pi_1(Y, y)$ . Nach Satz 5.1.8.(a) genügt es zu zeigen, dass  $\gamma \cdot \tilde{y} = \tilde{y}$  gilt. Die von  $g$  induzierte Abbildung ist eine Bijektion

$$(5.2.1) \quad g: q^{-1}(y) \xrightarrow{\sim} p^{-1}(x)$$

und es gilt  $g(\gamma \cdot \tilde{y}) = (f \circ \gamma) \cdot g(\tilde{y}) = (\pi_1(f)(\gamma)) \cdot \tilde{x}$  (Lemma 5.1.2.(d)). Die Annahme  $\text{Im } \pi_1(f) \subset \text{Im } \pi_1(p)$  und Satz 5.1.8.(a) zeigen  $(\pi_1(f)(\gamma)) \cdot \tilde{x} = \tilde{x} = g(\tilde{y})$ . Injektivität von (5.2.1) liefert  $\gamma \cdot \tilde{y} = \tilde{y}$  wie gewünscht. Also ist  $\pi_1(q)$  bijektiv.

Mit  $Y$  ist auch  $\tilde{Y}$  lokal wegzusammenhängend (nach 4.1.13 und 5.2.4). Sei  $Z \subset \tilde{Y}$  die Zusammenhangskomponente (= Wegzusammenhangskomponente, siehe 5.2.5.(a)) von  $\tilde{y}$ . Beachte, dass  $\pi_1(Z, \tilde{y}) \rightarrow \pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y})$  bijektiv ist. Da  $Y$  lokal wegzusammenhängend und insbesondere lokal zusammenhängend ist, ist die Komposition  $q': Z \hookrightarrow \tilde{Y} \rightarrow Y$  nach Aufgabe 4.1.10 eine Überlagerung. Da  $Z$  wegzusammenhängend ist, operiert  $\pi_1(Y, y)$  transitiv auf der Faser  $q'^{-1}(y)$  Satz 5.1.8.(b). Da wir aber schon wissen, dass  $\pi_1(q')$  bijektiv ist, operieren nach Satz 5.1.8.(a) alle Elemente von  $\pi_1(Y, y)$  trivial auf der Faser  $q'^{-1}(y)$ . Es folgt  $q'^{-1}(y) = \{\tilde{y}\}$ .

Weil  $Y$  zusammenhängend ist, ist  $q'$  nach 4.1.6 eine einblättrige Überlagerung, also als bijektive, stetige, offene (siehe Aufgabe 4.1.16) Abbildung ein Homöomorphismus. Dann ist  $\tilde{f} := g \circ q'^{-1}$  der gesuchte Lift.  $\square$

**Aufgabe 5.2.8.** Sei  $Y$  die Quasi-Kreislinie (*quasi-circle*), auch Warschauer Kreislinie (*Warsaw circle* genannt (siehe [Hat02, Exercise 7, section 1.3, page 79] oder Wikipedia): Sie entsteht aus der Sinuskurve  $C$  des Topologen (siehe Aufgabe 2.6.18), indem man den Ursprung mit einem genügend großen Bogen mit dem Punkt  $(1/\pi, 0)$  verbindet. Sei  $f: Y \rightarrow \mathbb{S}^1$  die stetige Abbildung, die „die Sinuskurve auf die  $x$ -Achse projiziert“, den Bogen unverändert läßt, und dann alle Punkte radial auf eine geeignet liegende Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  (mit Mittelpunkt in der Mitte des Warschauer Kreises) projiziert. Dann hat  $f$  keinen (stetigen) Lift in die Überlagerung  $\text{Exp}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ , obwohl  $\pi_1(Y, y) = 1$  für jeden Punkt  $y \in Y$  gilt.

<sup>75</sup>Das linke Diagramm ist ebenfalls kartesisch. Der Vergiss-Funktor  $\text{Top}_* \rightarrow \text{Top}$  ist kompatibel mit Pullbacks.

Hinweis: Eine plausible Begründung, dass  $f$  keinen Lift hat, genügt. Um die Trivialität der Fundamentalgruppe zu zeigen, mag man die Kompaktheit von  $[0, 1]$  und die bereits bekannte Aussage, dass  $C$  nicht wegzusammenhängend ist, nutzen.

Bemerkung: Dies zeigt, dass im Liftbarkeitskriterium in Satz 5.2.6 nicht auf die Voraussetzung, dass  $Y$  lokal wegzusammenhängend ist, verzichtet werden kann. Dass  $Y$  nicht lokal wegzusammenhängend ist, ist offensichtlich oder folgt alternativ auch aus dem Obigen und Satz 5.2.6.

**Korollar 5.2.9.** *Jeder einfach zusammenhängende, lokal wegzusammenhängende Raum ist überlagerungstrivial.*

*Beweis.* Sei  $X$  ein einfach zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum. Nach Lemma 4.4.12 ist zu zeigen, dass  $\text{id}_X$  eine universelle Überlagerung ist. Sicherlich ist  $X$  nicht leer. Zu zeigen ist also, dass es für jede punktierte Überlagerung  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  genau einen Morphismus  $s: (X, x) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$  mit  $p \circ s = \text{id}$  gibt. Dies ist aber klar nach dem Liftbarkeitskriterium in Satz 5.2.6, denn  $X$  ist zusammenhängend (da wegzusammenhängend) und die dortige Bedingung (b) ist wegen unserer Annahme  $\pi_1(X, x) = 1$  trivialerweise erfüllt.  $\square$

**Korollar 5.2.10.** *Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung eines zusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden Raums  $X$ , und sei  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend. Dann ist  $p$  universell.*

*Beweis.* Mit  $X$  ist auch  $\tilde{X}$  lokal wegzusammenhängend (nach 4.1.13 und 5.2.4). Also ist  $\tilde{X}$  nach Korollar 5.2.9 überlagerungstrivial. Wegen  $\tilde{X} \neq \emptyset$  ist  $p$  surjektiv (siehe 4.1.6). Nach Korollar 4.4.18 ist  $p$  universell.  $\square$

**Satz 5.2.11** (Existenz universeller Überlagerungen). *Jeder zusammenhängende, lokal zusammenziehbare topologische Raum  $X$  besitzt eine Überlagerung  $u: \tilde{X} \rightarrow X$  mit  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend, und jede solche Überlagerung ist universell.*

*Insbesondere hat jeder zusammenhängende, lokal zusammenziehbare topologische Raum eine universelle Überlagerung.*

**5.2.12.** Satz 5.2.11 und alle folgenden Resultate bis zum Ende von Abschnitt 5.3 bleiben gültig, wenn man die Bedingung *lokal zusammenziehbar* durch die schwächere Forderung *lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend* ersetzt<sup>76</sup>.

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **semilokal einfach zusammenhängend**<sup>77</sup>, falls jeder Punkt  $x \in X$  eine Umgebung  $U$  hat, so dass die von  $U \hookrightarrow X$  induzierte Abbildung  $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$  trivial ist: Jede Schleife bei  $x$  in  $U$  ist also in  $X$  zusammenziehbar.

Die Beweise bleiben bis auf eine kleine Modifikation im Beweis von Satz 5.2.11 allesamt gültig: Um in der Definition der Abbildung  $\Phi$  (siehe (5.2.2)) die Unabhängigkeit von der Wahl von  $\delta$  zu zeigen, muss man die Umgebung  $W'$  von  $y$  so wählen, dass  $\pi_1(W', y) \rightarrow \pi_1(X, y)$  trivial ist, und dann den Beweis in naheliegender Weise anpassen.<sup>78</sup>

<sup>76</sup>Satz 5.2.11 in dieser Allgemeinheit ist im Wesentlichen [Mun75, Thm. 82.1].

<sup>77</sup>Siehe [Mun75, §82]; dort werden Umgebungen stets als offen angenommen, was in dieser Definition jedoch keinen Unterschied macht.

<sup>78</sup>Der Beweis wird dadurch sogar einfacher: Nach 5.2.5.(c) kann man durch Verkleinern ohne Einschränkung annehmen, dass  $W' \subset X$  gilt, und dann mit  $W := W'$  arbeiten.

*Beweis.* Als lokal zusammenziehbarer Raum ist  $X$  lokal wegzusammenhängend. Nach Korollar 5.2.10 genügt es also, eine Überlagerung  $u: \tilde{X} \rightarrow X$  mit  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend zu konstruieren.

Sei  $x \in X \neq \emptyset$  fest gewählt. Betrachte die Menge

$$\begin{aligned}\tilde{X} &:= \{\gamma: [0, 1] \rightarrow X \mid \gamma \text{ ist stetig, } \gamma(0) = x\} / \cong \\ &= \bigsqcup_{y \in X} \pi_1(X, x, y)\end{aligned}$$

aller Wege mit Startpunkt  $x$  bis auf Homotopie (mit fixierten Randpunkten) von Wegen. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}u: \tilde{X} &\rightarrow X, \\ [\gamma] &\mapsto \gamma(1),\end{aligned}$$

von Mengen (alle Elemente der Teilmenge  $\pi_1(X, x, y) \subset \tilde{X}$  werden also auf  $y$  abgebildet). Da  $X$  als zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender Raum wegzusammenhängend ist (5.2.5.(a)), ist  $u$  surjektiv.

Wir machen  $\tilde{X}$  wie folgt zu einem topologischen Raum. Für jeden Weg  $\alpha$  mit Anfangspunkt  $\alpha(0) = x$  und jede offene Umgebung  $V$  seines Endpunktes  $\alpha(1)$  definiere

$$U(\alpha, V) := \{[\beta * \alpha] \mid \beta: [0, 1] \rightarrow V \text{ stetig mit } \beta(0) = \alpha(1)\}.$$

Betrachte die von all diesen Mengen  $U(\alpha, V)$  erzeugte Topologie auf  $\tilde{X}$  (Definition 2.8.5). Die offenen Mengen von  $\tilde{X}$  sind also genau die Vereinigungen endlicher Schnitte von Mengen der Form  $U(\alpha, V)$ , und die Mengen der Form  $U(\alpha, V)$  bilden eine Subbasis der Topologie von  $\tilde{X}$  (Definition 2.8.7).

Wir behaupten, dass  $u$  eine Überlagerung ist.

(a)  $u$  ist stetig: Sei  $V \subseteq X$  eine offene Teilmenge. Wegen der offensichtlichen Gleichheit

$$u^{-1}(V) = \bigcup_{v \in V, \alpha \in \Omega(X, x, v)} U(\alpha, V)$$

gilt  $u^{-1}(V) \subseteq \tilde{X}$ . Also ist  $u: \tilde{X} \rightarrow X$  stetig.

(b) Jeder Punkt von  $X$  hat eine trivial überlagerte offene Umgebung: Sei  $y \in X$  beliebig. Da  $X$  lokal zusammenziehbar ist, existiert eine zusammenziehbare Umgebung  $W'$  von  $y$  in  $X$  (wir wissen aber nicht, ob  $W'$  offen in  $X$  ist). Sei  $W \subseteq X$  eine offene wegzusammenhängende Umgebung von  $y$  in  $X$  mit  $W \subset W'$ ; eine solche existiert nach 5.2.5.(c), da  $X$  lokal wegzusammenhängend ist. Betrachte die Abbildung

$$(5.2.2) \quad \begin{aligned}\Phi: u^{-1}(y) \times W &= \pi_1(X, x, y) \times W \rightarrow \tilde{X}, \\ ([\gamma], w) &\mapsto [\delta * \gamma],\end{aligned}$$

wobei  $\delta: [0, 1] \rightarrow W$  ein beliebiger (stetiger) Weg in  $W$  von  $y$  nach  $w$  ist: Ist  $\delta'$  ein anderer solcher Weg, so sind  $\delta$  und  $\delta'$  als Wege in  $W'$  homotop, da  $W'$  zusammenziehbar ist (etwa nach Korollar 3.5.2 und Kürzen von Wegen, Aufgabe 3.1.13), und dann erst recht als Wege in  $X$ , d.h.  $[\delta * \gamma] = [\delta' * \gamma]$  – unsere Abbildung ist also

wohldefiniert. Da  $w$  der Endpunkt von  $\delta$  ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} u^{-1}(y) \times W & \xrightarrow{\Phi} & \tilde{X} \\ \downarrow \text{pr}_W & & \downarrow u \\ W & \longrightarrow & X \end{array}$$

in Set.

- (i)  $\Phi$  ist injektiv: Gelte  $\Phi([\gamma], w) = \Phi([\gamma'], w')$  für  $([\gamma], w), ([\gamma'], w') \in u^{-1}(y) \times W$ , also  $[\delta * \gamma] = [\delta' * \gamma']$ , wobei  $\delta$  bzw.  $\delta'$  Wege in  $W$  von  $y$  nach  $w$  bzw.  $w'$  sind. Kommutativität des obigen Diagramms zeigt  $w = w'$ , und es folgt  $[\delta] = [\delta']$  in  $\pi_1(X, y, w)$  wie oben erklärt. Kürzen von Wegen (Aufgabe 3.1.13) liefert  $[\gamma] = [\gamma']$ . Also ist  $\Phi$  injektiv.
- (ii) Das Bild von  $\Phi$  ist  $u^{-1}(W)$ : Die Inklusion  $\text{Im } \Phi \subset u^{-1}(W)$  ist trivial. Sei  $[\gamma] \in u^{-1}(W)$ , für einen Weg  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  mit Anfangspunkt  $\gamma(0) = x$ . Sei  $w := \gamma(1) = u([\gamma]) \in W$  sein Endpunkt. Da  $W$  wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $\delta$  in  $W$  von  $w$  nach  $y$ . Es folgt  $\Phi([\delta * \gamma], w) = [\bar{\delta} * \delta * \gamma] = [\gamma]$ .

Wir versehen  $u^{-1}(y) = \pi_1(X, x, y)$  im Folgenden mit der diskreten Topologie.<sup>79</sup>

- (iii)  $\Phi$  ist stetig. Es genügt zu zeigen, dass  $\Phi^{-1}(U(\alpha, V))$  offen ist (siehe 2.8.11), für jeden Weg  $\alpha$  mit Anfangspunkt  $\alpha(0) = x$  und jede offene Umgebung  $V$  seines Endpunktes  $\alpha(1)$ . Sei  $([\gamma], w) \in \Phi^{-1}(U(\alpha, V))$  für  $([\gamma], w) \in u^{-1}(y) \times W$ , also  $[\delta * \gamma] = [\beta * \alpha]$  für Wege  $\delta: [0, 1] \rightarrow W$  von  $y$  nach  $w$  und  $\beta: [0, 1] \rightarrow V$  von  $\alpha(1)$  nach  $w$ . Dann gilt  $w \in W \cap V \circledast X$ . Sei  $W'' \circledast X$  eine offene wegzusammenhängende Umgebung von  $w$  in  $X$  mit  $W'' \subset W \cap V$ ; eine solche existiert nach 5.2.5.(c). Dann gilt  $\Phi([\gamma] \times W'') \subset U(\alpha, V)$ , denn für jedes  $w'' \in W''$  existiert ein Weg  $\delta': [0, 1] \rightarrow W''$  von  $w$  nach  $w''$  und es gilt  $\Phi([\gamma], w'') = [\delta' * \delta * \gamma] = [\delta' * \beta * \alpha] \in U(\alpha, V)$ . Da  $[\gamma] \times W''$  eine offene Umgebung von  $([\gamma], w)$  in  $u^{-1}(y) \times W$  ist, gilt  $\Phi^{-1}(U(\alpha, V)) \circledast u^{-1}(y) \times W$  wie gewünscht.
- (iv)  $\Phi$  ist offen. Da  $X$  und damit  $W$  lokal wegzusammenhängend ist, bilden die wegzusammenhängenden offenen Teilmengen von  $W$  eine Basis der Topologie von  $W$  (nach 5.2.5.(c)). Sei  $W''' \circledast W$  eine solche wegzusammenhängende offene Teilmenge und sei  $[\gamma] \in u^{-1}(y) = \pi_1(X, x, y)$ . Dann gilt  $\Phi([\gamma] \times W''') = U(\beta * \gamma, W''')$  für jeden Weg  $\beta: [0, 1] \rightarrow W$  mit  $\beta(0) = y$  und  $\beta(1) \in W'''$ . Da die Mengen der Form  $[\gamma] \times W'''$  eine Basis der Topologie von  $u^{-1}(y) \times W$  bilden, ist  $\Phi$  offen.

Also ist  $\Phi$  ein Homöomorphismus auf sein Bild  $u^{-1}(W) \circledast \tilde{X}$ . Dies zeigt, dass  $u$  eine Überlagerung ist.

Ende der 21. Vorlesung am 04.07.2019.

Zu zeigen bleibt, dass  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist. Sei  $\tilde{x} := [\varepsilon_x] \in \tilde{X}$  die Homotopieklasse des konstanten Weges. Es gilt  $u(\tilde{x}) = x$ . Sei  $\omega: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg mit Anfangspunkt  $x$ . Definiere  $\omega_s: [0, 1] \rightarrow X$  durch  $\omega_s(t) = \omega(st)$  für  $s \in [0, 1]$ . Definiere

$$(5.2.3) \quad \begin{aligned} \tilde{\omega}: [0, 1] &\rightarrow \tilde{X}, \\ s &\mapsto [\omega_s]. \end{aligned}$$

<sup>79</sup>A posteriori wird klar, dass dies auch die von  $\tilde{X}$  auf  $u^{-1}(y)$  induzierte Topologie ist.



Diese Abbildung ist stetig (Aufgabe 5.2.15) und ein Weg von  $\tilde{\omega}(0) = [\omega_0] = [\varepsilon_x] = \tilde{x}$  nach  $\tilde{\omega}(1) = [\omega_1] = [\omega]$ . Insbesondere ist  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend.

Wegen  $u([\tilde{\omega}(s)]) = [\omega_s](1) = \omega_s(1) = \omega(s)$  kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \tilde{x}) \\ & \nearrow \tilde{\omega} & \downarrow u \\ ([0, 1], 0) & \xrightarrow{\omega} & (X, x) \end{array}$$

Top<sub>\*</sub>. Mit anderen Worten ist  $\tilde{\omega}$  der eindeutige (stetige) Lift von  $\omega$  mit Anfangspunkt  $\tilde{x}$ . Es gilt also  $\omega \cdot \tilde{x} = [\omega]$  für den Transport entlang  $\omega$ . Aus  $\omega \cdot \tilde{x} = \tilde{x}$  (für  $\omega$  notwendig eine Schleife bei  $x$ ) folgt also  $[\omega] = [\varepsilon_x]$  in  $\tilde{X}$  und damit in  $\pi_1(X, x)$ , der Stabilisator von  $\tilde{x}$  in  $\pi_1(X, x)$  ist also trivial. Nach Satz 5.1.8.(a) folgt  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = 1$ . Somit ist  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend.  $\square$

**Korollar 5.2.13.** *Ein lokal zusammenziehbarer Raum ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn er zusammenhängend und überlagerungstrivial ist.*

**5.2.14.** Insbesondere stimmen für zusammenhängende, lokal zusammenziehbare Räume die Begriffe *einfach zusammenhängend* und *überlagerungstrivial* überein.

*Beweis.* Lokal zusammenziehbare Räume sind lokal wegzusammenhängend. Somit liefert Korollar 5.2.9 die Implikation  $\Rightarrow$ .

Sei umgekehrt  $X$  ein lokal zusammenziehbarer, zusammenhängender und überlagerungstrivialer Raum. Nach Satz 5.2.11 existiert eine Überlagerung  $\tilde{X} \rightarrow X$  mit  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend. Da  $X$  überlagerungstrivial ist, folgt  $\tilde{X} \cong X \times F$  als Überlagerungen von  $X$ , wobei  $F$  ein diskreter Raum ist. Da  $\tilde{X}$  zusammenhängend ist, besteht  $F$  aus genau einem Punkt. Also ist  $\tilde{X} \rightarrow X$  ein Homöomorphismus, und  $X$  ist ebenfalls einfach zusammenhängend.  $\square$

**Aufgabe 5.2.15.** Die Abbildung  $\tilde{\omega}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ , siehe (5.2.3) im Beweis von Satz 5.2.11, ist stetig.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 4.3.15, Decktransformationen am Beispiel einer Überlagerung der Acht
- (2) Aufgabe 5.1.11, Monodromieoperation am Beispiel einer Überlagerung der Acht
- (3) Aufgabe 5.2.8, im Liftbarkeitskriterium in Satz 5.2.6 kann nicht auf die Voraussetzung, dass  $Y$  lokal wegzusammenhängend ist, verzichtet werden, Gegenbeispiel Warschauer Kreislinie
- (4) Aufgabe 5.2.15,  $\tilde{\omega}$  ist stetig (falls wir soweit kommen, sonst gibt es die Punkte gratis)

**Korollar 5.2.16.** *Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerung eines zusammenhängenden, lokal zusammenziehbaren Raums  $X$ . Dann sind äquivalent:*

- (a)  $\tilde{X}$  ist einfach zusammenhängend;
- (b)  $p$  ist universell.

*Beweis.* (a)  $\Rightarrow$  (b): Da jeder lokal zusammenziehbare Raum lokal wegzusammenhängend ist, folgt dies aus Korollar 5.2.10.

(b)  $\Rightarrow$  (a): Nach Satz 5.2.11 gibt es eine universelle Überlagerung  $u: \hat{X} \rightarrow X$  mit  $\hat{X}$  ist einfach zusammenhängend. Sei  $p$  universell. Dann sind  $\hat{X}$  und  $\tilde{X}$  als Überlagerungen

von  $X$  isomorph (siehe 4.4.6). Insbesondere sind  $\widehat{X}$  und  $\widetilde{X}$  homöomorph, und  $\widetilde{X}$  ist einfach zusammenhängend.  $\square$

**Satz 5.2.17.** *Sei  $X$  ein zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer Raum, und sei  $u: \widetilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung (eine solche existiert nach Satz 5.2.11).*

- (a) *(Fundamentalgruppe als Deckbewegungsgruppe der/einer universellen Überlagerung) Dann ist die Fundamentalgruppe von  $X$  isomorph zur Gruppe der Deckbewegungen von  $\widetilde{X}$ . Genauer gibt es für jeden Punkt  $x \in X$  und jede Wahl  $\tilde{x} \in u^{-1}(x)$  genau einen Gruppenisomorphismus*

$$c = c_{\tilde{x}}: \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\text{Cov}_X}(\widetilde{X}),$$

mit  $c(\gamma)^{-1}.\tilde{x} = \gamma.\tilde{x}$  für alle  $\gamma \in \pi_1(X, x)$ .

- (b) *(Konstruktion von Überlagerungen) Weggelassen, da es eh aus der punktierten Faserfunktorkäquivalenz folgt, siehe 5.3.30. Seien  $x \in X$  und  $\tilde{x} \in u^{-1}(x)$  und  $c = c_{\tilde{x}}$  wie in Teil (a). Sei  $H \subset \pi_1(X, x)$  eine Untergruppe. Dann ist*

$$q: \widehat{X} := c(H)\backslash\widetilde{X} \rightarrow X, \\ [\tilde{y}] = H.\tilde{y} \mapsto u(\tilde{y}),$$

eine zusammenhängende (surjektive) Überlagerung, und der induzierte (injektive) Gruppenmorphismus  $\pi_1(q): \pi_1(\widehat{X}, \hat{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$  hat als Bild die Untergruppe  $H$ , wobei  $\hat{x} := [\tilde{x}] = c(H).\tilde{x} \in \widehat{X}$ .

*Beweis. (a):* Nach Aufgabe 4.4.7 operiert  $G := \text{Aut}_{\text{Cov}_X}(\widetilde{X})$  topologisch frei auf  $\widetilde{X}$ , und die Abbildung  $\bar{u}: G\backslash\widetilde{X} \rightarrow X$ ,  $[x] = Gx \mapsto u(x)$ , ist ein Homöomorphismus. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & = & \widetilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow u \\ G\backslash\widetilde{X} & \xrightarrow{\bar{u}} & X. \end{array}$$

Da  $\widetilde{X}$  einfach zusammenhängend ist (Korollar 5.2.16), folgt die Aussage aus den Punkten (a) und (d) von Satz 5.1.12.

(b) Mit  $G$  operiert auch die Untergruppe  $c(H) \subset G$  topologisch frei auf  $\widetilde{X}$ . Nach Aufgabe 4.2.21 (Lösung steht dort) ist  $c(H)\backslash\widetilde{X} \rightarrow G\backslash\widetilde{X}$  eine Überlagerung, also auch die Verknüpfung

$$q: c(H)\backslash\widetilde{X} \rightarrow G\backslash\widetilde{X} \xrightarrow{\bar{u}} X.$$

Nach Definition kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{r} & \widehat{X} \\ \searrow u & & \swarrow q \\ & X, & \end{array}$$

also ist  $r$  ein Morphismus in  $\text{Cov}_X$ . Da  $r$  stetig und surjektiv ist, ist mit  $\widetilde{X}$  auch  $\widehat{X}$  zusammenhängend (Proposition 2.6.6). Für  $\gamma \in \pi_1(X, x)$  sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- $\gamma \in \text{Im } \pi_1(q)$ ;
- $\gamma.\hat{x} = \hat{x}$  (nach Satz 5.1.8.(a));
- $\gamma.\tilde{x} \in r^{-1}(\hat{x})$  (nach Lemma 5.1.2.(d));
- $c(\gamma) \in c(H)$  (wegen  $r^{-1}(\hat{x}) = c(H).\tilde{x}$  und  $c(\gamma)^{-1}.\tilde{x} = \gamma.\tilde{x}$  und Freiheit der  $G$ -Operation;
- $\gamma \in H$  (weil  $c$  Isomorphismus).

Dies zeigt  $H = \text{Im } \pi_1(q)$ . □

**5.2.18.** Ist zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 5.2.17 noch  $\tilde{X}$  zusammenhängend, so operiert  $\pi_1(X, x)$  nach Satz 5.1.8.(b) transitiv auf  $u^{-1}(x)$ , für jedes  $x \in X$  (die Faser ist nicht leer, da  $u$  surjektiv ist). Nach Satz 5.2.17.(a) operiert also auch  $\text{Aut}_{\text{Cov}_X}(\tilde{X})$  transitiv auf  $u^{-1}(x)$ . Dies bedeutet, dass  $u: \tilde{X} \rightarrow X$  eine normale Überlagerung ist (Definition 4.3.13).

**5.2.19.** Zwei Untergruppen  $H, H'$  einer Gruppe  $G$  heißen konjugiert, wenn es ein Element  $g \in G$  mit  $gHg^{-1} = H'$  gibt. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Untergruppen von  $G$ .

**Satz 5.2.20** (Klassifikation von Überlagerungen). *Wir beweisen diesen Satz nicht hier, denn er folgt leicht aus der Faserfunktors-Äquivalenz (die für meinen Geschmack eh das Hauptresultat der Überlagerungstheorie darstellt), siehe 5.3.24 und 5.3.30.*

Sei  $X$  ein zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer topologischer Raum, und sei  $x \in X$ . Dann gelten:

(a) Die folgende Abbildung ist eine Bijektion

$$\frac{\{\text{Zusammenhängende punktierte Überlagerungen von } (X, x)\}}{\text{Isomorphie in } \text{Cov}_{(X, x)}} \xrightarrow{\sim} \{\text{Untergruppen von } \pi_1(X, x)\},$$

$$\left[ p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x) \right] \mapsto \text{Im}(\pi_1(p)).$$

(b) Die folgende Abbildung ist eine Bijektion

$$\frac{\{\text{Zusammenhängende Überlagerungen von } X\}}{\text{Isomorphie in } \text{Cov}_X} \xrightarrow{\sim} \frac{\{\text{Untergruppen von } \pi_1(X, x)\}}{\text{Konjugation}},$$

$$\left[ p: \tilde{X} \rightarrow X \right] \mapsto \left[ \text{Im}(\pi_1(p)) \right],$$

wobei für die Berechnung des Bildes von  $\pi_1(p): \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \pi_1(X, x)$  ein beliebiger Punkt  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$  der Faser über  $x$  gewählt werde.

80

*Beweis.* Wir erinnern daran, dass jede zusammenhängende Überlagerung von  $X$  lokal zusammenziehbar – insbesondere lokal wegzusammenhängend – und wegzusammenhängend ist (4.1.13 und 5.2.4).

<sup>80</sup>In Büchern findet man oft für eine Galois-Überlagerung eine „Galoisverbindung“ zwischen Zwischenüberlagerungen (bis auf Äquivalenz) und Untergruppen der Deckbewegungsgruppe der gegebenen Galois-Überlagerung (wie in der klassischen Galois-Theorie für Körpererweiterungen). Dies kann man leicht aus der Faserfunktors-Äquivalenz aus Satz 5.3.22 folgern, siehe Aufgaben 5.3.32 und 5.3.33. Ist man an punktierten Überlagerungen interessiert, verwende man die Punktierte-Faserfunktors-Äquivalenz aus Satz 5.3.28.

(a) Wohldefiniertheit: Seien  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  und  $q: (\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$  isomorphe (zusammenhängende) punktierte Überlagerungen. Dann gibt es einen Isomorphismus  $f: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$  in  $\text{Cov}_{(X,x)}$ , und es folgt  $\pi_1(p) = \pi_1(q) \circ \pi_1(f)$ , wobei  $\pi_1(f)$  ein Isomorphismus ist. Also haben  $\pi_1(p)$  und  $\pi_1(q)$  dasselbe Bild.

Injektivität (es genügt hierfür,  $X$  als zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend anzunehmen): Seien  $p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (X, x)$  und  $q: (\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (X, x)$  zusammenhängende punktierte Überlagerungen mit  $\text{Im}(\pi_1(p)) = \text{Im}(\pi_1(q))$ . Nach dem Liftbarkeitskriterium in Satz 5.2.6 gibt es eindeutige Morphismen  $f: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (\hat{X}, \hat{x})$  und  $g: (\hat{X}, \hat{x}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x})$  punktierter Überlagerungen, deren Verknüpfungen  $g \circ f$  und  $f \circ g$  notwendig die jeweiligen Identitäten sind. Also sind diese beiden gegebenen punktierten Überlagerungen isomorph.

Surjektivität: Dies folgt direkt aus Satz 5.2.17.(b).

(b) Wohldefiniertheit: Da wir nach (a) bereits wissen, dass isomorphe zusammenhängende punktierte Überlagerungen dieselbe Untergruppe in  $\pi_1(X, x)$  liefern, genügt es zu zeigen, dass für jede zusammenhängende Überlagerung  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  und beliebige  $y, z \in p^{-1}(x)$  die Bilder von  $\pi_1(p): \pi_1(\tilde{X}, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$  und  $\pi_1(p): \pi_1(\tilde{X}, z) \rightarrow \pi_1(X, x)$  konjugiert sind. Da  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg  $\tilde{\gamma} \in \Omega(\tilde{X}, y, z)$ . Dann ist  $p \circ \tilde{\gamma}$  eine Schleife bei  $x$ . Setze  $g := [p \circ \tilde{\gamma}] \in \pi_1(X, x)$ . Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, y) & \xrightarrow[\sim]{[\alpha] \mapsto [\tilde{\gamma} * \alpha * \tilde{\gamma}]} & \pi_1(\tilde{X}, z) \\ \downarrow \pi_1(p) & & \downarrow \pi_1(p) \\ \pi_1(X, x) & \xrightarrow[\sim]{h \mapsto ghg^{-1}} & \pi_1(X, x) \end{array}$$

in Grp. Es ist offensichtlich kommutativ, und seine obere Horizontale ist der Basispunktwechselisomorphismus aus Proposition 3.1.19. Es folgt, dass die beiden Bilder der (injektiven) Vertikalen konjugiert sind.

Surjektivität: Klar nach (a).

Injektivität: Sei  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  eine zusammenhängende Überlagerung. Seien  $y \in p^{-1}(x)$  ein Punkt und sei  $H$  das Bild von  $\pi_1(p): \pi_1(\tilde{X}, y) \rightarrow \pi_1(X, x)$ . Sei  $g \in \pi_1(X, x)$  beliebig. Sei  $\gamma$  eine Schleife bei  $x$  mit  $g = [\gamma]$ . Sei  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_y$  der eindeutige Lift von  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $y$  (Existenz nach Lemma 4.4.13 und Satz 4.4.16 bzw. nach dem Liftbarkeitskriterium in Satz 5.2.6). Sei  $z := \tilde{\gamma}(1)$ . Wir sind nun in derselben Situation wie in Beweis der Wohldefiniertheit, und das dortige kommutative Diagramm zeigt, dass  $gHg^{-1}$  das Bild der dortigen rechten Vertikalen ist.

Ist  $q: \hat{X} \rightarrow X$  eine weitere zusammenhängende Überlagerung von  $X$ , ist  $\hat{x} \in \hat{X}$  ein Punkt, und ist das Bild von  $\pi_1(q)$  konjugiert zu  $H$ , so können wir nach dem Obigen durch geeignete Wahl des Basispunkts  $y$  in  $\tilde{X}$  erreichen, dass  $\pi_1(q) = H$  gilt. Injektivität in (a) liefert dann  $\tilde{X} \cong \hat{X}$  als Überlagerungen von  $X$ .  $\square$

### 5.3. Der Faserfunktork als Äquivalenz von Kategorien.

**5.3.1.** Ziel ist der Satz über den Faserfunktork 5.3.22. Dieser ist für meinen Geschmack der Hauptsatz der Überlagerungstheorie.

**Lemma 5.3.2.** Sei

$$(5.3.1) \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ S & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in  $\text{Top}$ . Für jede Teilmenge  $U \subset T$  betrachte das induzierte kommutative Diagramm

$$(5.3.2) \quad \begin{array}{ccc} f^{-1}(p^{-1}(U)) & \xrightarrow{f'} & p^{-1}(U) \\ q' \downarrow & & \downarrow p' \\ g^{-1}(U) & \xrightarrow{g'} & U \end{array}$$

in  $\text{Top}$  (beachte  $f^{-1}(p^{-1}(U)) = q^{-1}(g^{-1}(U))$ ). Dann gelten:

- (a) Ist (5.3.1) kartesisch, so auch (5.3.2).
- (b) Ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ , so dass (5.3.2) für alle  $U \in \mathcal{U}$  kartesisch ist, so ist auch (5.3.1) kartesisch.

*Beweis.* (a) Man kann dies einfach direkt beweisen. Ein abstrakter Beweis geht wie folgt: Betrachte den Würfel mit kommutativen Seitenflächen, der die beiden angegebenen Diagramme als Vorder- und Rückseite hat. Die vier anderen Seiten des Würfels sind kartesisch (Beispiel 3.7.6). Nun verwende Transitivität von Kartesianität 3.7.8.

(b) Ist  $Z$  ein topologischer Raum mit stetigen Abbildungen  $\sigma: Z \rightarrow S$  und  $\chi: Z \rightarrow X$  mit  $g \circ \sigma = p \circ \chi$ . Für jedes  $U \in \mathcal{U}$  kommen die induzierten stetigen Abbildungen von  $\sigma^{-1}(g^{-1}(U)) = \chi^{-1}(p^{-1}(U))$  in die rechte und untere Ecke von (5.3.2) von einer eindeutigen stetigen Abbildung  $h_U: \sigma^{-1}(g^{-1}(U)) = \chi^{-1}(p^{-1}(U)) \rightarrow f^{-1}(p^{-1}(U))$ . Für alle  $U, V \in \mathcal{U}$  stimmen  $h_U$  und  $h_V$  auf dem gemeinsamen Definitionsbereich nach (a), angewendet auf  $U \cap V$ , überein. Also sind die Abbildungen  $(h_U)_{U \in \mathcal{U}}$  von genau einer stetigen Abbildung  $h: Z \rightarrow Y$  induziert (Proposition 2.4.13.(a)). Diese erfüllt  $q \circ h = \sigma$  und  $f \circ h = \chi$  wie gewünscht. Die Eindeutigkeit ist leicht zu sehen.  $\square$

**Proposition 5.3.3.** Sei  $f: Y \rightarrow X$  ein Morphismus in  $G\text{-Top}$ , wobei  $G$  eine Gruppe ist. Ist  $X$  ein topologisch freier  $G$ -Raum, so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ q \downarrow & & \downarrow p \\ G \backslash Y & \xrightarrow{\bar{f}} & G \backslash X \end{array}$$

in  $\text{Top}$  kartesisch, dessen Vertikalen die Morphismen in die jeweiligen Bahnenräume sind und dessen untere Horizontale die von  $f$  induzierte Abbildung auf den Bahnenräumen ist.

(Bereits bekannt ist, dass  $G$  dann auch topologisch frei auf  $Y$  operiert und die Vertikalen Überlagerungen sind (Aufgabe 4.2.24, Satz 4.2.15).)

*Beweis.* Sei  $x \in X$  beliebig. Sei  $U \subset X$  eine offene Umgebung von  $x$  mit  $G \times U \hookrightarrow X$  injektiv (äquivalent:  $U \cap gU \neq \emptyset$  impliziert  $g = e$ ).

Für jedes  $y \in f^{-1}(U)$  ist dann  $f^{-1}(U)$  eine offene Umgebung mit  $G \times f^{-1}(U) \hookrightarrow X$  injektiv (äquivalent:  $f^{-1}(U) \cap gf^{-1}(U) \neq \emptyset$  impliziert  $g = e$ ); dies rechnet man sofort unter

Verwendung der  $G$ -Äquivarianz von  $f$  nach (dies löst Aufgabe 4.2.24). Insbesondere operiert  $G$  topologisch frei auf  $Y$ .

Wir können also die Erkenntnisse aus dem Beweis von Satz 4.2.15 sowohl auf  $U$  als auch auf  $f^{-1}(U)$  anwenden (der Fall  $f^{-1}(U) = \emptyset$  kann hier auftreten, verursacht aber keine Probleme).

Da die Mengen der Form  $p(U)$  eine offene Überdeckung von  $G \backslash X$  bilden, genügt es nach Lemma 5.3.2.(b), Kartesianität des Diagramms

$$(5.3.3) \quad \begin{array}{ccc} q^{-1}(q(f^{-1}(U))) & \xrightarrow{f} & p^{-1}(p(U)) \\ q \downarrow & & p \downarrow \\ q(f^{-1}(U)) & \xrightarrow{\bar{f}} & p(U) \end{array}$$

zu zeigen, wobei  $\bar{f}^{-1}(p(U)) = q(f^{-1}(U))$  verwendet wurde.

Die horizontalen Homöomorphismen in (4.2.1) zeigen, dass (5.3.3) genau dann kartesisch ist, wenn

$$\begin{array}{ccc} G \times f^{-1}(U) & \xrightarrow{\text{id} \times f} & G \times U \\ \text{pr} \downarrow & & \text{pr} \downarrow \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow{f} & U \end{array}$$

kartesisch ist. Diese letzte Bedingung ist offensichtlich erfüllt.  $\square$

**Lemma 5.3.4.** *Sei*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ q \downarrow & & p \downarrow \\ S & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

ein kartesisches Diagramm in Top, so dass  $p$  im folgenden Sinne lokale Schnitte hat: Jeder Punkt  $t \in T$  hat eine Umgebung  $U$  in  $T$ , so dass es eine stetige Abbildung  $s: U \rightarrow X$  mit  $p \circ s = \text{id}_U$  gibt<sup>81</sup>. Dann gilt: Ist  $f$  eine Überlagerung, so auch  $g$ .<sup>82</sup>

*Beweis.* Seien  $t, U$  und  $s$  wie oben. Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} g^{-1}(U) & \xrightarrow{g|} & U \\ \vdots \downarrow & & s \downarrow \\ Y & \xrightarrow{f} & X \\ q \downarrow & & p \downarrow \\ S & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

dessen gestrichelter Morphismus in den Pullback  $Y$  der eindeutige Morphismus ist, so dass die Verknüpfung der linken vertikalen Pfeile die Inklusion  $g^{-1}(U) \subset S$  ist und das obere Quadrat kommutiert. Da das äußere Rechteck offensichtlich kartesisch ist (Beispiel 3.7.6), liefert Transitivität von Kartesianität 3.7.8, dass auch das obere Quadrat kartesisch ist. Ist

<sup>81</sup>genauer ist hier  $p$  die Restriktion  $p^{-1}(U) \rightarrow U$

<sup>82</sup>Die Umkehrung ist bereits bekannt, siehe Aufgabe 4.1.7).

$f$  eine Überlagerung, so ist also auch sein Pullback  $g|$  eine Überlagerung (Aufgabe 4.1.7). Da  $t \in T$  beliebig war, zeigt dies, dass  $g$  eine Überlagerung ist.  $\square$

**Satz 5.3.5.** *Sei  $X$  ein zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer Raum und sei  $u: \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung. Seien  $x \in X$  und  $\tilde{x} \in u^{-1}(x)$ . Sei*

$$(5.3.4) \quad c = c_{\tilde{x}}: \pi_1(X, x) \xrightarrow{\sim} \text{Aut}_{\text{Cov}_X}(\tilde{X}),$$

der eindeutige Gruppenisomorphismus mit  $c(\gamma)^{-1}.\tilde{x} = \gamma.\tilde{x}$  für alle  $\gamma \in \pi_1(X, x)$  (Existenz nach Satz 5.2.17.(a)).

(a) Sei  $M \in \pi_1(X, x)$ -Set. Versieh  $M$  mit der diskreten Topologie und betrachte  $\tilde{X} \times M$  als  $\pi_1(X, x)$ -Raum per

$$\gamma.(\tilde{y}, m) := (c(\gamma).\tilde{y}, \gamma.m)$$

für  $\gamma \in \pi_1(X, x)$ ,  $\tilde{y} \in \tilde{X}$ ,  $m \in M$ . Dann ist

$$(5.3.5) \quad q = q_M: Q(M) := \pi_1(X, x) \backslash (\tilde{X} \times M) = \frac{\tilde{X} \times M}{\pi_1(X, x)} \rightarrow X,$$

$$(5.3.6) \quad [\tilde{y}, m] \mapsto p(\tilde{y}),$$

eine Überlagerung, deren Faser über  $x$  als  $\pi_1(X, x)$ -Menge zu  $M$  isomorph ist: Genauer ist die Abbildung

$$(5.3.7) \quad \eta_M: M \xrightarrow{\sim} q^{-1}(x) = F(Q(M)),$$

$$m \mapsto [\tilde{x}, m],$$

ein Isomorphismus in  $\pi_1(X, x)$ -Set, wobei  $F = F_x$  der Faserfunktors (5.1.1) ist.

(b) Ist  $f: M \rightarrow N$  ein Morphismus in  $\pi_1(X, x)$ -Set. Dann ist

$$Q(M) \rightarrow Q(N),$$

$$[\tilde{y}, m] \mapsto [\tilde{y}, f(m)],$$

ein Morphismus in  $\text{Cov}_X$ .

Insbesondere ist

$$(5.3.8) \quad Q: \pi_1(X, x)\text{-Set} \rightarrow \text{Cov}_X$$

$$M \mapsto Q(M) = \pi_1(X, x) \backslash (\tilde{X} \times M),$$

ein Funktor (er hängt von  $u: \tilde{X} \rightarrow X$ ,  $x \in X$  und  $\tilde{x} \in u^{-1}(x)$  ab).

*Beweis.* Nach Aufgabe 4.4.7 operiert  $G := \text{Aut}_{\text{Cov}_X}(\tilde{X})$  topologisch frei auf  $\tilde{X}$  – dasselbe gilt dann auch für die Operation von  $\pi_1(X, x)$  auf  $\tilde{X}$  per  $\gamma.\tilde{y} := c(\gamma).\tilde{y}$  – und die Abbildung  $\bar{p}: G \backslash \tilde{X} \rightarrow X$ ,  $[x] = Gx \mapsto p(x)$ , ist ein Homöomorphismus. Für  $M \in \pi_1(X, x)$ -Set erhalten wir das kommutative Diagramm

$$(5.3.9) \quad \begin{array}{ccccc} \tilde{X} \times M & \xrightarrow{\text{pr}} & \tilde{X} & = & \tilde{X} \\ \downarrow r & & \downarrow & & \downarrow u \\ Q(M) & \xrightarrow{\bar{\text{pr}}} & G \backslash \tilde{X} & \xrightarrow{\bar{p}} & X. \\ & \searrow q=q_M & & & \end{array}$$

Beachte, dass  $\text{pr}$  eine  $\pi_1(X, x)$ -äquivariante Abbildung ist. Nach Proposition 5.3.3 (und wegen  $\pi_1(X, x) \backslash \tilde{X} = G \backslash \tilde{X}$ ) ist das linke Quadrat kartesisch. Da  $\text{pr}$  eine (triviale) Überlagerung ist und  $u$  als Überlagerung lokale Schnitte hat, ist nach Lemma 5.3.4 auch  $\overline{\text{pr}}$  eine Überlagerung, und dasselbe gilt dann für  $q = q_M$ .

Da  $\text{pr}$  eine triviale Überlagerung ist, ist auch  $u \circ \text{pr}$  eine Überlagerung (vgl. aber Aufgabe 4.1.8). Auch  $r$  ist eine Überlagerung (als Pullback von  $u$  oder als Quotient nach einer topologisch freien Gruppenoperation). Also sind

$$Q(M) \xleftarrow{r} \tilde{X} \times M \xrightarrow{\text{pr}} \tilde{X}$$

Morphismen in  $\text{Cov}_X$ . Anwenden des Faserfunktors  $F = F_x$  liefert Morphismen

$$q^{-1}(x) \xleftarrow{r} u^{-1}(x) \times M_{\text{triv}} \xrightarrow{\text{pr}} u^{-1}(x)$$

in  $\pi_1(X, x)$ -Set, wobei  $\pi_1(X, x)$  auf dem rechten Faktor  $M = M_{\text{triv}}$  der mittleren Menge trivial operiert: Sind  $\gamma \in \Omega(X, x)$  und  $(\tilde{y}, m) \in \tilde{X} \times M$  gegeben und ist  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{\tilde{y}}$  der eindeutige Lift von  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $\tilde{y}$  (bezüglich  $u$ ), so ist  $t \mapsto (\tilde{\gamma}(t), m)$  der eindeutige Lift von  $\gamma$  mit Anfangspunkt  $(\tilde{y}, m)$ , sein Endpunkt hat also ebenfalls  $m$  als zweite Komponente.

Da das äußere Rechteck in (5.3.9) kartesisch ist, geht die Faser  $\tilde{x} \times M$  der oberen Horizontalen über  $\tilde{x}$  isomorph auf die Faser der unteren Horizontalen über  $x$ . Also ist (5.3.7) eine Bijektion von Mengen (man kann dies auch einfach direkt nachrechnen). Sie ist äquivariant, denn es gilt (die erste Gleichung gilt, da  $r$   $\pi_1(X, x)$  äquivariant ist, die zweite nach Definition von  $c = c_{\tilde{x}}$ , und die dritte nach Definition der Operation von  $\pi_1(X, x)$  auf  $\tilde{X} \times M$ )

$$\gamma.[\tilde{x}, m] = [\gamma.\tilde{x}, m] = [c(\gamma^{-1}).\tilde{x}, m] = [\tilde{x}, \gamma.m].$$

für  $m \in M$  und  $\gamma \in \pi_1(X, x)$ . Dies zeigt den ersten Teil des Satzes. Die restlichen Aussagen sind dann offensichtlich.  $\square$

**Satz 5.3.6.** *Seien die Annahmen wie in Satz 5.3.5. Sei  $p: Y \rightarrow X$  eine Überlagerung. Da  $u: \tilde{X} \rightarrow X$  universell ist, gibt es für jedes  $y \in p^{-1}(x)$  genau einen Morphismus  $\ell_y = \ell_y^p: (\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow (Y, y)$  in  $\text{Cov}_{(X, x)}$ . Dann ist*

$$\begin{aligned} \lambda: \tilde{X} \times p^{-1}(x) &\rightarrow Y, \\ (a, y) &\mapsto \ell_y(a), \end{aligned}$$

stetig und konstant auf  $\pi_1(X, x)$ -Bahnen und induziert einen Isomorphismus

$$(5.3.10) \quad \begin{aligned} \varepsilon_Y: Q(F(Y)) = \pi_1(X, x) \backslash (\tilde{X} \times p^{-1}(x)) &\xrightarrow{\sim} Y, \\ [a, y] &\mapsto \ell_y(a), \end{aligned}$$

in  $\text{Cov}_X$ .

*Beweis.* Für  $\gamma \in \pi_1(X, x)$  und  $y \in p^{-1}(x)$  gilt

$$\ell_{\gamma.y}(\tilde{x}) = \gamma.y = \gamma.\ell_y(\tilde{x}) = \ell_y(\gamma.\tilde{x}) = \ell_y(c(\gamma)^{-1}(\tilde{x})).$$

Es folgt

$$\ell_{\gamma.y} = \ell_y \circ c(\gamma)^{-1}$$

da  $\tilde{X}$  universell ist und beide Seiten Morphismen in  $\text{Cov}_X$  sind, die bei  $\tilde{x}$  übereinstimmen. Für  $(a, y) \in \tilde{X} \times p^{-1}(x)$  und  $\gamma \in \pi_1(X, x)$  folgt

$$\lambda(a, y) = \ell_y(a) = \ell_{\gamma.y}(c(\gamma)(a)) = \lambda(c(\gamma)(a), \gamma.y) = \lambda(\gamma.(a, y)).$$



Also ist  $\lambda$  konstant auf  $\pi_1(X, x)$ -Bahnen. Da  $p^{-1}(x)$  die diskrete Topologie trägt und alle  $\ell_y$  stetig sind, ist  $\lambda$  stetig. Also ist die induzierte Abbildung  $\varepsilon_Y$  stetig. Da jedes  $\ell_y$  ein Morphismus von Überlagerungen von  $X$  ist und wir bereits wissen, dass  $Q(F(Y))$  eine Überlagerung ist (Satz 5.3.5), ist  $\varepsilon_Y$  ebenfalls ein Morphismus von Überlagerungen. Als solcher ist  $\varepsilon_Y$  offen 4.3.11. Es genügt also zu zeigen, dass  $\varepsilon_Y$  bijektiv ist. Dafür reicht es zu zeigen, dass  $\lambda$  surjektiv ist und als Fasern genau die  $\pi_1(X, x)$ -Bahnen hat.

Ende der 22. Vorlesung am 09.07.2019, Proposition 5.3.3 flott bewiesen, dabei auch  $f$  Überlagerung  $\Rightarrow \bar{f}$  Überlagerung mitbewiesen.

$\lambda$  ist surjektiv: Sei  $y \in Y$ . Da  $u: \tilde{X} \rightarrow X$  surjektiv ist, gibt es ein  $a \in \tilde{X}$  mit  $u(a) = p(y)$ . Sei  $f: (\tilde{X}, a) \rightarrow (Y, y)$  der eindeutige Morphismus in  $\text{Cov}_{(X, p(y))}$ . Es folgt  $f(\tilde{x}) \in p^{-1}(x)$  und  $f = \ell_{f(\tilde{x})}$ . Dies liefert wie gewünscht

$$\lambda(a, f(\tilde{x})) = \ell_{f(\tilde{x})}(a) = f(a) = y.$$

**Die Fasern von  $\lambda$  sind die  $\pi_1(X, x)$ -Bahnen:** Seien  $a, a' \in \tilde{X}$  und  $y, y' \in p^{-1}(x)$  mit  $\lambda(a, y) = \lambda(a', y')$ , also  $\ell_y(a) = \ell_{y'}(a')$ . Es folgt  $u(a) = p(\ell_y(a)) = p(\ell_{y'}(a')) = u(a')$ . Also gibt es genau einen Morphismus  $(\tilde{X}, a) \rightarrow (\tilde{X}, a')$  in  $\text{Cov}_{(X, u(a))}$ , der ein Isomorphismus sein muss (vgl. Aufgabe 4.4.7). Sei  $\gamma \in \pi_1(X, x)$  sein Urbild unter dem Isomorphismus  $c$ , siehe (5.3.4). Es gilt

$$c(\gamma)(a) = a'.$$

Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{X}, a) & \xrightarrow{\ell_y} & (Y, \ell_y(a)) \\ c(\gamma) \downarrow & \searrow \ell_{y'} & \\ (\tilde{X}, a') & \xrightarrow{\ell_{y'}} & \end{array}$$

in  $\text{Cov}_{(X, u(a))}$ . Es ist kommutativ, da  $\tilde{X}$  universell ist. Es gilt also

$$y = \ell_y(\tilde{x}) = \ell_{y'}(c(\gamma)(\tilde{x})) = \ell_{y'}(\gamma^{-1}.\tilde{x}) = \gamma^{-1}.\ell_{y'}(\tilde{x}) = \gamma^{-1}.y'.$$

Wie gewünscht folgt

$$\gamma.(a, y) = (c(\gamma)(a), \gamma.y) = (a', y').$$

□

**Definition 5.3.7.** Seien  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren. Eine **natürliche Transformation**  $\tau: F \rightarrow G$  ist eine Familie  $(\tau_C)_{C \in \text{Obj } \mathcal{C}}$  von Morphismen  $\tau_C: F(C) \rightarrow G(C)$  in  $\mathcal{D}$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{\tau_C} & G(C) \\ F(f) \downarrow & & G(f) \downarrow \\ F(C') & \xrightarrow{\tau_{C'}} & G(C') \end{array}$$

in  $\mathcal{D}$  für alle Morphismen  $f: C \rightarrow C'$  in  $\mathcal{C}$  kommutiert.

Die Kategorie  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  der Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$  wird mit den natürlichen Transformationen als Morphismen in offensichtlicher Weise eine Kategorie. Ein **Morphismus von Funktoren** ist ein Morphismus in dieser Kategorie, also eine natürliche Transformation. Die Isomorphismen in dieser Kategorie werden **Isotransformationen** genannt.

**5.3.8.** Eine natürliche Transformation  $\tau = (\tau_C)_{C \in \mathcal{C}}$  ist genau dann eine Isotransformation, wenn alle Morphismen  $\tau_C$  Isomorphismen sind.

**Lemma 5.3.9.** Seien die Annahmen wie in Satz 5.3.5. Dann definieren die Isomorphismen (5.3.7), für  $M \in \pi_1(X, x)$ -Set, eine Isotransformation

$$\eta: \text{id} = \text{id}_{\pi_1(X, x)\text{-Set}} \xrightarrow{\sim} F \circ Q$$

von Endofunktoren von  $\pi_1(X, x)$ -Set<sup>83</sup>; die Isomorphismen (5.3.10), für  $Y \in \text{Cov}_X$ , definieren eine Isotransformation

$$\varepsilon: Q \circ F \xrightarrow{\sim} \text{id} = \text{id}_{\text{Cov}_X}$$

von Endofunktoren von  $\text{Cov}_X$ <sup>84</sup>.

*Beweis.* Ist  $f: M \rightarrow N$  ein Morphismus in  $\pi_1(X, x)$ -Set, so ist das linke Diagramm kommutativ, wie die rechts angedeutete Rechnung zeigt.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow[\sim]{\eta_M} & F(Q(M)) \\ f \downarrow & & \downarrow F(Q(f)) \\ N & \xrightarrow[\sim]{\eta_N} & F(Q(N)) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} m & \xrightarrow{\eta_M} & [\tilde{x}, m] \\ f \downarrow & & \downarrow F(Q(f)) \\ f(m) & \xrightarrow{\eta_N} & [\tilde{x}, f(m)] \end{array}$$

Dies zeigt, dass  $\eta$  eine natürliche Transformation ist. Weil alle Morphismen  $\eta_M$  Isomorphismen sind ((5.3.7) in Satz 5.3.5), ist  $\eta$  nach 5.3.8 eine Isotransformation.

Ist  $f: Y \rightarrow Z$  ein Morphismus von Überlagerungen  $p: Y \rightarrow X$  und  $q: Z \rightarrow X$ , so gilt

$$f \circ \ell_y^p = \ell_{f(y)}^q$$

für alle  $y \in p^{-1}(x)$  (siehe Satz 5.3.6 für die Definition von  $\ell_y^p$  und  $\ell_{f(y)}^q$ ). Das Diagramm samt Rechnung

$$\begin{array}{ccc} Q(F(Y)) & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_Y} & Y \\ Q(F(f)) \downarrow & & \downarrow f \\ Q(F(Z)) & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_Z} & Z \end{array} \quad \begin{array}{ccc} [a, y] & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & \ell_y^p(a) \\ Q(F(f)) \downarrow & & \downarrow f \\ [a, f(y)] & \xrightarrow{\varepsilon_Z} & \ell_{f(y)}^q(a) = f(\ell_y^p(a)) \end{array}$$

zeigt, dass  $\varepsilon$  eine natürliche Transformation ist. Wie oben ist  $\varepsilon$  wegen des Isomorphismus (5.3.10) in Satz 5.3.6 eine Isotransformation.  $\square$

**Lemma 5.3.10.** Seien die Annahmen wie in Satz 5.3.5. Dann kommutieren für jedes  $M \in \pi_1(X, x)$ -Set und jedes  $Y \in \text{Cov}_X$  die Diagramme (wobei wir einige Klammern weglassen)

$$\begin{array}{ccc} QM & \xrightarrow{Q\eta_M} & QFQM \\ \text{id}_{QM} \searrow & & \downarrow \varepsilon_{QM} \\ & & QM \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} FY & \xrightarrow{\eta_{FY}} & FQFY \\ \text{id}_{FY} \searrow & & \downarrow F\varepsilon_Y \\ & & FY \end{array}$$

in  $\text{Cov}_X$  bzw.  $\pi_1(X, x)$ -Set.

<sup>83</sup>also einen Isomorphismus in  $\text{Fun}(\pi_1(X, x)\text{-Set}, \pi_1(X, x)\text{-Set})$

<sup>84</sup>also einen Isomorphismus in  $\text{Fun}(\text{Cov}_X, \text{Cov}_X)$

*Beweis.* Für  $m \in M$  muss der Morphismus

$$(\tilde{X}, \tilde{x}) \xrightarrow{b \mapsto (b, m)} (\tilde{X} \times M, (\tilde{x}, m)) \xrightarrow{r} (QM, [\tilde{x}, m])$$

in  $\text{Cov}_{(X, x)}$  mit  $\ell_{[\tilde{x}, m]}$  übereinstimmen (wir haben in der Diskussion des Diagramms (5.3.9) gesehen, dass diese drei Räume Überlagerungen von  $X$  sind). Die Verfolgung eines Elements  $[a, m] \in QM$  durch das linke Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [a, m] & \xrightarrow{Q\eta_M} & [a, [\tilde{x}, m]] \\ & & \downarrow \varepsilon_{QM} \\ & & \ell_{[\tilde{x}, m]}(a) = [a, m], \end{array}$$

zeigt die Kommutativität dieses Diagramms.

Die Verfolgung eines Elements  $y \in p^{-1}(x) = FY$  durch das rechte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{\eta_{FY}} & [\tilde{x}, y] \\ & & \downarrow F\varepsilon_Y \\ & & \ell_y(\tilde{x}) = y, \end{array}$$

zeigt die Kommutativität dieses Diagramms. □

**5.3.11.** Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien. Eine **Adjunktion (von Funktoren zwischen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$ )** ist ein Quadrupel  $(Q, F, \eta, \varepsilon)$  bestehend aus

- einem Funktor  $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ,
- einem Funktor  $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ ,
- einer natürlichen Transformation  $\eta: \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow F \circ Q$ , genannt **Eins**,
- einer natürlichen Transformation  $\varepsilon: Q \circ F \rightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ , genannt **Koeins**,

so dass die beiden Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} QM & \xrightarrow{Q\eta_M} & QFQM \\ & \searrow \text{id}_{QM} & \downarrow \varepsilon_{QM} \\ & & QM \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} FY & \xrightarrow{\eta_{FY}} & FQFY \\ & \searrow \text{id}_{FY} & \downarrow F\varepsilon_Y \\ & & FY \end{array}$$

für alle  $M \in \mathcal{C}$  und alle  $Y \in \mathcal{D}$  kommutieren (man nennt diese Kommutativitätsbedingungen oft **Dreiecksidentitäten**). Man sagt dann auch, dass  $Q$  **linksadjungiert** zu  $F$  ist, oder dass  $F$  **rechtsadjungiert** zu  $Q$  ist, oder dass  $(Q, F)$  ein Paar adjungierte Funktionen ist. Sind die Funktoren  $Q: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , und  $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  gegeben, so nennt man ein Paar  $(\eta, \varepsilon)$  mit den obigen Eigenschaften eine **Adjunktion zwischen  $Q$  und  $F$** .

**5.3.12.** Es gibt verschieden äquivalente Möglichkeiten, Adjunktionen zu definieren, siehe etwa [ML98] oder [HS97]. Oft wird die in 5.3.13 angedeutete Definition verwendet.

**5.3.13.** Ist  $(Q, F, \eta, \varepsilon)$  eine Adjunktion von Funktoren, so ist

$$\begin{aligned} \nu_{M, Y}: \mathcal{D}(QM, Y) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(M, FY), \\ f &\mapsto F(f) \circ \eta_M, \\ \varepsilon_Y \circ Q(g) &\leftarrow g, \end{aligned}$$

für alle  $M \in \mathcal{C}$  und  $Y \in \mathcal{D}$  bijektiv. Genauer definieren die Morphismen  $\nu_{M,Y}$  eine Isotransformation

$$\tau: \mathcal{D}(Q-,?) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(-, F?)$$

zwischen Funktoren  $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ . Eine solche Isotransformation ist (in kanonischer Weise) dasselbe wie eine Adjunktion zwischen  $Q$  und  $F$ .

**Beispiel 5.3.14.** Der Freie-Gruppe-Funktor  $F: \text{Set} \rightarrow \text{Grp}$  ist linksadjungiert zum Vergiss-Funktor  $V: \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$  vermöge der folgenden Eins und Koeins: Die Eins  $\text{id}_{\text{Set}} \rightarrow VF$  ist die Familie der universelle Menge-Gruppe-Abbildungen  $X \rightarrow VF X$ , für  $X \in \text{Set}$  (siehe Satz 3.8.10). Die Koeins  $FV \rightarrow \text{id}_{\text{Grp}}$  ist die Familie der Gruppenmorphisamen  $FVG \rightarrow G$ , für  $G \in \text{Grp}$  (siehe (3.9.1)). Die dieser Adjunktion nach 5.3.13 zugeordnete Bijektion zwischen Morphismenräumen ist gerade die Bijektion (3.8.4).

**5.3.15.** Seien die Annahmen wie in Satz 5.3.5. Dann ist der Funktor

$$Q: \pi_1(X, x)\text{-Set} \rightarrow \text{Cov}_X$$

linksadjungiert zum Faserfunktor  $F: \text{Cov}_X \rightarrow \pi_1(X, x)\text{-Set}$  vermöge der natürlichen Transformationen  $\eta$  und  $\varepsilon$  aus Lemma 5.3.9, denn diese erfüllen nach Lemma 5.3.10 die Dreiecksidentitäten.

In diesem (glücklichen) Fall sind Eins und Koeins sogar invertierbar, also Isotransformationen. Im Allgemeinen ist dies für Adjunktionen nicht richtig, wie man etwa am Beispiel 5.3.14 sieht.

**Definition 5.3.16.** Ein Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  heißt **treu/voll/volltreu**, falls für alle Objecte  $C, C' \in \mathcal{C}$  die Abbildung

$$\begin{aligned} F_{C,C'}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(C), F(C')), \\ f &\mapsto F(f), \end{aligned}$$

injektiv/surjektiv/bijektiv ist.

**Definition 5.3.17.** Sei  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor zwischen Kategorien.

- Das **essentielle Bild von  $F$**  ist die volle Unterkategorie aller Objekte von  $\mathcal{D}$ , die zu einem Objekt  $F(C)$ , für ein geeignetes Objekt  $C \in \mathcal{C}$ , isomorph sind.

Der Funktor  $F$  heißt

- **essentiell surjektiv** (oder **dicht**), wenn das essentielle Bild von  $F$  ganz  $\mathcal{D}$  ist, wenn es also für jedes Objekt  $D \in \mathcal{D}$  ein Objekt  $C \in \mathcal{C}$  gibt, so dass  $D$  und  $F(C)$  isomorph sind;
- **Äquivalenz (von Kategorien)**, wenn er volltreu und essentiell surjektiv ist; notiert wird eine Äquivalenz von Kategorien oft als  $F: \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}$ . Da es sich aber um keinen Isomorphismus von Funktoren handelt, verwenden wir in diesem Skript die Notation  $F: \mathcal{C} \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}$ .

**5.3.18.** Kurz gesagt ist eine Äquivalenz also ein Funktor, der auf allen Morphismenmengen bijektiv ist und alle Isomorphieklassen von Objekten trifft.

**5.3.19.** Jede Äquivalenz  $F: \mathcal{C} \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}$  von Kategorien induziert eine Bijektion

$$\begin{aligned} \text{Obj } \mathcal{C} / \cong &\xrightarrow{\cong} \text{Obj } \mathcal{D} / \cong, \\ [C] &\mapsto [F(C)], \end{aligned}$$

zwischen den Mengen der Isomorphieklassen von Objekten.

**Beispiel 5.3.20.** Sei  $\mathcal{C}$  die Kategorie, deren Objekte die natürlichen Zahlen sind, deren Morphismenmeng  $\mathcal{C}(m, n)$  gerade die Menge der  $(n \times m)$ -Matrizen mit reellen Einträgen sind, für Objekte  $m, n \in \mathcal{C}$ , und deren Verknüpfung Matrizenmultiplikation ist. Sei  $\text{vect}(\mathbb{R})$  die volle Unterkategorie der Kategorie  $\text{Vect}(\mathbb{R})$  der reellen Vektorräume, deren Objekte die endlichdimensionalen reellen Vektorräume sind. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\xrightarrow{\cong} \text{vect}(\mathbb{R}), \\ n &\mapsto \mathbb{R}^n, \\ A &\mapsto (\text{die durch } A \text{ beschriebene lineare Abbildung}), \end{aligned}$$

einen Äquivalenz von Kategorien, wie der Leser hoffentlich – wenn auch in anderer Sprache – in der Linearen Algebra gelernt hat.

**Lemma 5.3.21.** *Sei  $(Q, F, \eta, \varepsilon)$  eine Adjunktion von Funktoren. Sind  $\eta$  und  $\varepsilon$  Isotransformationen, so sind  $Q$  und  $F$  Äquivalenzen von Kategorien (in Vorlesung wohl nur: dann ist  $F$  eine Äquivalenz von Kategorien). Genauer gilt:*

- (a) *Ist  $\eta$  eine Isotransformation, so ist  $F$  essentiell surjektiv.*
- (b) *Genau dann ist  $\varepsilon$  eine Isotransformation, wenn  $F$  volltreu ist.<sup>85</sup>*

Analog gilt:

- (a) *Ist  $\varepsilon$  eine Isotransformation, so ist  $Q$  essentiell surjektiv.*
- (b) *Genau dann ist  $\eta$  eine Isotransformation, wenn  $Q$  volltreu ist.<sup>86</sup>*

*Beweis.* Wir zeigen nur, dass  $F$  eine Äquivalenz von Kategorien ist, falls  $\eta$  und  $\varepsilon$  Isotransformationen sind (und überlassen den Beweis der restlichen (hoffentlich korrekten) Aussagen dem Leser).

Sei  $\eta$  eine Isotransformation. Dann ist  $\eta_C: C \rightarrow FQC$  für jedes Objekt  $C \in \mathcal{C}$  ein Isomorphismus. Also trifft  $F$  jede Isomorphieklasse von Objekten.

Sei  $\varepsilon$  eine Isotransformation. Wir zeigen, dass

$$F = F_{D, D'}: \mathcal{D}(D, D') \rightarrow \mathcal{C}(FD, FD')$$

für alle  $D, D' \in \mathcal{D}$  bijektiv ist.

Injektiv: Sei  $a: D \rightarrow D'$  ein Morphismus in  $\mathcal{D}$ . Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Q(F(D)) & \xrightarrow[\cong]{\varepsilon_D} & D \\ Q(F(a)) \downarrow & & a \downarrow \\ Q(F(D')) & \xrightarrow[\cong]{\varepsilon_{D'}} & D', \end{array}$$

da  $\varepsilon$  eine natürliche Transformation ist. Da die Horizontalen Isomorphismen sind, kann  $a = \varepsilon_{D'} \circ Q(Fa) \circ \varepsilon_D^{-1}$  aus  $F(a)$  berechnet werden. Also ist  $F_{D, D'}$  injektiv.

<sup>85</sup>Genau dann sind alle  $\varepsilon_D$ , für  $D \in \mathcal{D}$  Epimorphismen, wenn  $F$  treu ist.

<sup>86</sup>Genau dann sind alle  $\eta_C$ , für  $C \in \mathcal{C}$  Monomorphismen, wenn  $Q$  treu ist.

Surjektiv: Sei  $b: FD \rightarrow FD'$  ein Morphismus in  $\mathcal{C}$ . Sei  $a: D \rightarrow D'$  der eindeutige Morphismus, der

$$\begin{array}{ccc} QFD & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_D} & D \\ Qb \downarrow & & a \downarrow \\ QFD' & \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_{D'}} & D' \end{array}$$

kommutativ macht. Wende  $F$  auf dieses Diagramm an und ergänze links durch ein kommutatives Quadrat:

$$\begin{array}{ccccc} FD & \xrightarrow{\eta_{FD}} & FQFD & \xrightarrow[\sim]{F\varepsilon_D} & FD \\ b \downarrow & & FQb \downarrow & & Fa \downarrow \\ FD' & \xrightarrow{\eta_{FD'}} & FQFD' & \xrightarrow[\sim]{F\varepsilon_{D'}} & FD' \end{array}$$

Da die horizontalen Verknüpfungen die jeweiligen Identitäten sind, folgt  $b = Fa$ . Also ist  $F_{D,D'}$  surjektiv.  $\square$

**Satz 5.3.22** (Faserfunktoren sind Äquivalenzen von Kategorien). *Seien  $X$  ein zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer topologischer Raum und  $x \in X$ . Dann ist der Faserfunktoren eine Äquivalenz*

$$\begin{aligned} F = F_x: \text{Cov}_X &\xrightarrow{\sim} \pi_1(X, x)\text{-Set}, \\ p &\mapsto p^{-1}(x), \end{aligned}$$

von Kategorien. Unter dieser Äquivalenz entsprechen die zusammenhängenden Überlagerungen den transitiven  $\pi_1(X, x)$ -Mengen.

*Beweis.* Sei  $u: \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung (Existenz nach Satz 5.2.11). Sei  $\tilde{x} \in \tilde{X} \neq \emptyset$ . Nun sind die Annahmen von Satz 5.3.5 erfüllt. Nach 5.3.15 ist der Faserfunktoren  $F$  der rechtsadjungierte Funktoren einer Adjunktion, deren Eins und Koeins Isotransformationen sind, und somit nach Lemma 5.3.21 eine Äquivalenz von Kategorien. (Und auch  $Q$  ist eine Äquivalenz von Kategorien.)

Ist  $p: Y \rightarrow X$  eine zusammenhängende Überlagerung, so ist  $Y$  wegzusammenhängend (nach 4.1.13 und 5.2.4) und die Faser  $F(Y) = p^{-1}(x)$  ist nicht leer und nach Satz 5.1.8.(b) transitiv.

Ist  $M$  eine transitive  $\pi_1(X, x)$ -Menge, so ist für jedes  $m \in M$  die Verknüpfung

$$\tilde{X} \xrightarrow{a \mapsto (a, m)} \tilde{X} \times M \rightarrow Q(M)$$

stetiger Abbildung stetig und surjektiv. Als Bild der zusammenhängenden Menge  $\tilde{X}$  ist  $Q(M)$  zusammenhängend. Ist also für eine Überlagerung  $p: Y \rightarrow X$  die Faser  $F(Y)$  eine transitive  $\pi_1(X, x)$ -Menge, so ist Quelle und damit Ziel des Isomorphismus  $Q(F(Y)) \xrightarrow[\sim]{\varepsilon_Y} Y$  eine zusammenhängende Überlagerung.  $\square$

**5.3.23.** Sei  $G$  eine Gruppe. Für eine  $G$ -Menge  $M$  und ein Element  $m \in M$  sei  $G_m$  der Stabilisator von  $m$  in  $G$ . Es gilt  $G_{gm} = gG_mg^{-1}$  für alle  $g \in G$  und  $m \in M$ . Ist  $M$  transitiv, so bilden die Stabilisatoren von Elementen von  $M$  also eine Konjugationsklasse von

Untergruppen von  $G$ . Zwei transitive  $G$ -Mengen sind genau dann isomorph, wenn ihnen dieselbe Konjugationsklasse von Stabilisatoren zugeordnet ist. Bezeichnet  $G\text{-Set}_{\text{transitiv}}$  die volle Unterkategorie von  $G\text{-Set}$ , die aus allen transitiven  $G$ -Mengen besteht, so ist also

$$(5.3.11) \quad G\text{-Set}_{\text{transitiv}} / \cong \xrightarrow{\sim} \frac{\{\text{Untergruppen von } G\}}{\text{Konjugation}},$$

$$M \mapsto [G_m],$$

eine Bijektion, wobei  $m \in M$  beliebig gewählt ist. In Worten sind transitive  $G$ -Mengen bis auf Isomorphismus durch Konjugationsklassen von Untergruppen von  $G$  klassifiziert.

**5.3.24.** Seien  $X$  zusammenhängend und lokal zusammenziehbar und  $x \in X$ . Die Faserfunktorkonjugationsäquivalenz aus Satz 5.3.22 induziert wie jede Äquivalenz von Kategorien eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von Objekten (siehe 5.3.19). Die Isomorphieklassen zusammenhängender Überlagerungen von  $X$  entsprechen also bijektiv den Isomorphieklassen transitiver  $G$ -Mengen. Mit der Bijektion (5.3.11) und Satz 5.1.8.(a) liefert dies einen Alternativbeweis von Satz 5.2.20.(b).

**Beispiel 5.3.25.** Wir dürfen 5.3.24 auf  $X = \mathbb{S}^1$  und  $x = 1$  anwenden. Weil  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \cong \mathbb{Z}$  abelsch ist, sind Untergruppen genau dann konjugiert, wenn sie gleich sind. Also gibt es für jede Untergruppe von  $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  bis auf Isomorphie genau eine Überlagerung von  $\mathbb{S}^1$ . Eine vollständige Liste aller zusammenhängenden Überlagerungen ist also durch  $(-)^n: \mathbb{S}^1 \xrightarrow{z \mapsto z^n} \mathbb{S}^1$ , für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ , und  $\text{Exp}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  gegeben. Mit der Faserfunktorkonjugationsäquivalenz kann man alle Morphismen zwischen diesen Überlagerungen ausrechnen. Beispielsweise gilt

$$\text{Cov}_{\mathbb{S}^1}((-)^4, (-)^2) \xrightarrow{F=F_1} (\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)\text{-Set})(\{\pm 1, \pm i\}, \{\pm 1\},)$$

Die Morphismenmenge rechts kann man leicht berechnen: Sei  $a \in \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$  der Erzeuger mit Umlaufzahl 1. Dann operiert  $a$  auf  $\{\pm 1, \pm i\}$  durch

$$1 \mapsto i \mapsto -1 \mapsto -i \mapsto 1$$

und auf  $\{\pm 1\}$  durch

$$1 \mapsto -1 \mapsto 1$$

(und dadurch ist die Operation aller anderen Elemente eindeutig festgelegt). Es folgt leicht, dass die Morphismenmenge rechts aus genau zwei Elementen besteht. Also gibt es genau zwei Morphismen  $(-)^4 \rightarrow (-)^2$  von Überlagerungen, nämlich  $z \mapsto z^2$  und  $z \mapsto -z^2$ . In die andere Richtung gibt es keinen Morphismus von Überlagerungen.

Ende der 23. Vorlesung am 11.07.2019 (letzte Vorlesung).

**Aufgabe 5.3.26.** In der Notation von Beispiel 5.3.25 berechne man die folgenden Morphismenmengen:

- $\text{Cov}_{\mathbb{S}^1}((-)^m, (-)^n)$ , für  $m, n \in \mathbb{N}_{>1}$ ;
- $\text{Cov}_{\mathbb{S}^1}((-)^m, \text{Exp})$ , für  $m \in \mathbb{N}_{>1}$ ;
- $\text{Cov}_{\mathbb{S}^1}(\text{Exp}, (-)^m)$ , für  $m \in \mathbb{N}_{>1}$ ;
- $\text{Cov}_{\mathbb{S}^1}(\text{Exp}, \text{Exp})$ .

Danach berechne man alle Verknüpfungen. Damit ist die Kategorie aller zusammenhängenden Überlagerungen von  $\mathbb{S}^1$  komplett bestimmt.

Bemerkung: Damit ist im Wesentlichen auch  $\text{Cov}_{\mathbb{S}^1}$  bestimmt, denn man kann jede Überlagerung von  $\mathbb{S}^1$  in ihre (Weg-)Zusammenhangskomponenten zerlegen und so als disjunkte Vereinigung (= Koproduct) von zusammenhängenden Überlagerungen schreiben (vgl. Aufgabe 4.1.10). Jeder Morphismus zwischen zwei so zerlegten Überlagerungen bildet jede Zusammenhangskomponente der Quelle in genau eine Zusammenhangskomponente des Ziels ab und kann so durch Morphismen zwischen zusammenhängenden Überlagerungen beschrieben werden. Diese Aussagen stimmen allgemeiner für lokal zusammenhängende Räume als Basis; falls die Basis  $X$  zusammenhängend und lokal zusammenziehbar ist, entspricht die Zerlegung einer Überlagerung in (Weg-)Zusammenhangskomponenten unter der Faserfunktoren-Äquivalenz (Satz 5.3.22) der Zerlegung einer  $\pi_1(X, x)$ -Menge in Bahnen.

**Definition 5.3.27.** Für eine Gruppe  $G$  sei  $G\text{-Set}_*$  die Kategorie der  $G$ -Mengen mit ausgezeichnetem Basispunkt: Ihre Objekte sind Paare  $(M, m_0)$  bestehend aus einer  $G$ -Menge  $M$  zusammen mit einem Punkt  $m_0 \in M$ , und die Morphismen  $f: (M, m_0) \rightarrow (N, n_0)$  sind die  $G$ -äquivarianten Abbildungen  $f: M \rightarrow N$  mit  $f(m_0) = n_0$ .<sup>87</sup> Wir nennen Objekte dieser Kategorie **punktierte  $G$ -Mengen**.

**Satz 5.3.28** (Punktierter Faserfunktoren ist Äquivalenz von Kategorien). *Seien  $X$  ein zusammenhängender, lokal zusammenziehbarer topologischer Raum und  $x \in X$ . Dann ist der **punktierte Faserfunktoren eine Äquivalenz***

$$F_* = (F_x)_*: \text{Cov}_{(X,x)} \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x)\text{-Set}_*,$$

$$(p: (Y, y) \rightarrow (X, x)) \mapsto (p^{-1}(x), y)$$

von Kategorien. Unter dieser Äquivalenz entsprechen die zusammenhängenden punktierten Überlagerungen den transitiven punktierten  $\pi_1(X, x)$ -Mengen.

*Beweis.* Der Beweis ist eine punktierte Variante des Beweises von Satz 5.3.22.

Seien  $u: \tilde{X} \rightarrow X$  eine universelle Überlagerung (Existenz nach Satz 5.2.11) und  $\tilde{x} \in u^{-1}(x)$ . Dann sind die Annahmen von Satz 5.3.5 erfüllt; insbesondere steht der Gruppenisomorphismus (5.3.4) zur Verfügung. Der dortige Funktoren  $Q$  (siehe (5.3.8)) hat die punktierte Variante

$$Q_*: \pi_1(X, x)\text{-Set}_* \rightarrow \text{Cov}_{(X,x)}$$

$$(M, m_0) \mapsto (Q(M) = \pi_1(X, x) \backslash (\tilde{X} \times M), [\tilde{x}, m_0]).$$

Die Morphismen  $\eta_M$  (siehe (5.3.7)) und  $\varepsilon_Y$  (siehe (5.3.10)) sind mit ausgezeichneten Basispunkten kompatibel: Für jedes  $(M, m_0) \in \pi_1(X, x)\text{-Set}_*$  ist

$$\eta_{(M, m_0)}: (M, m_0) \xrightarrow{\cong} q^{-1}(x) = F_*(Q_*(M, m_0)),$$

$$m \mapsto [\tilde{x}, m],$$

ein Isomorphismus in  $\pi_1(X, x)\text{-Set}_*$ , und für jedes  $(Y, y_0) \in \text{Cov}_{(X,x)}$  ist

$$\varepsilon_{(Y, y_0)}: Q_*(F_*(Y, y_0)) \xrightarrow{\cong} (Y, y_0),$$

$$[a, y] \mapsto \ell_y(a),$$

<sup>87</sup>Wir verlangen nicht, dass der Basispunkt ein  $G$ -Fixpunkt ist. Unsere Kategorie ist also nicht die Kategorie der Objekte unter der einpunktigen  $G$ -Menge. Mit Hilfe des Vergiss-Funktors  $G\text{-Set} \rightarrow \text{Set}$  kann man sie aber als „Komma-Kategorie“ schreiben.



ein Isomorphismus in  $\text{Cov}_{(X,x)}$ . Diese Isomorphismen liefern eine Adjunktion  $(Q_*, F_*, \eta, \varepsilon)$ , deren Eins und Koeins sogar Isotransformationen sind. Also sind  $F_*$  und  $Q_*$  nach Lemma 5.3.21 Äquivalenzen von Kategorien.

Die letzte Behauptung wird wie im Beweis von Satz 5.3.22 bewiesen.  $\square$

**5.3.29.** Sei  $G$  eine Gruppe. Zwei transitive punktierte  $G$ -Mengen  $(M, m_0)$  und  $(N, n_0) \in G\text{-Set}_*$  sind genau dann isomorph, wenn die Stabilisatoren  $G_{m_0}$  und  $G_{n_0}$  gleich sind. Dies liefert eine Bijektion

$$(5.3.12) \quad \begin{aligned} (G\text{-Set}_*)_{\text{transitiv}} / &\cong \xrightarrow{\sim} \{\text{Untergruppen von } G\}, \\ (M, m_0) &\mapsto G_{m_0}. \end{aligned}$$

**5.3.30.** Seien  $X$  zusammenhängend und lokal zusammenziehbar und  $x \in X$ . Die Punktierter-Faserfunktorklassenzusammenhangs-Äquivalenz aus Satz 5.3.28 induziert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen zusammenhängender punktierter Überlagerungen und den Isomorphieklassen transitiver punktierter  $G$ -Mengen. Mit der Bijektion (5.3.12) und Satz 5.1.8.(a) liefert dies einen Alternativbeweis von Satz 5.2.20.(b). Auch Satz 5.2.17.(b) folgt leicht.

**Aufgabe 5.3.31.** Sei  $H$  eine Untergruppe einer Gruppe  $G$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma: H \setminus \{a \in G \mid aHa^{-1} \subset H\} &\xrightarrow{\sim} (G\text{-Set})(G/H, G/H), \\ Ha &\mapsto \left( \sigma(Ha): gH \mapsto ga^{-1}H \right), \end{aligned}$$

eine (wohldefinierte) Bijektion und genauer ein Isomorphismus von Monoiden, wobei die Multiplikation links die offensichtliche (wohldefinierte) ist. Indem man die linke Seite per Inversenbildung  $Ha \mapsto a^{-1}H$  umschreibt, ist alternativ

$$\begin{aligned} \rho: \left( \{b \in G \mid Hb \subset bH\} / H \right)^{\text{op}} &\xrightarrow{\sim} (G\text{-Set})(G/H, G/H), \\ bH &\mapsto \left( \rho(bH): gH \mapsto gbH \right), \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Monoiden.

Ein Element  $bH$  der linken Seite ist genau dann invertierbar, wenn  $Hb = bH$  gilt. Es folgt ein Isomorphismus

$$\begin{aligned} \rho: \left( N_G(H) / H \right)^{\text{op}} &\xrightarrow{\sim} (G\text{-Set})^\times(G/H, G/H), \\ bH &\mapsto \left( \rho(bH): gH \mapsto gbH \right), \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Gruppen, wobei  $N_G(H) := \{b \in G \mid bHb^{-1} = H\}$  der Normalisator von  $H$  in  $G$  ist (dies ist die größte Untergruppe von  $G$ , die  $H$  als Normalteiler enthält). Alternativ ist

$$\begin{aligned} \sigma: N_G(H) / H = H \setminus N_G(H) &\xrightarrow{\sim} (G\text{-Set})^\times(G/H, G/H), \\ Ha = aH &\mapsto \left( \sigma(aH): gH \mapsto ga^{-1}H = gHa^{-1} \right), \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

**Aufgabe 5.3.32.** Sei  $X$  ein zusammenhängender und lokal zusammenziehbarer topologischer Raum und sei  $(Y, y) \rightarrow (X, x)$  eine zusammenhängende Überlagerung. Dann gelten

- (a) Die Automorphismengruppe  $\text{Aut}_{\text{Cov}_X}(Y)$  ist isomorph zu  $N/\pi_1(Y, Y)$ , wobei  $N \subset \pi_1(X, x)$  der Normalisator von  $\pi_1(Y, y)$  ist.
- (b) Die Überlagerung  $Y$  ist genau dann normal (siehe Definition 4.3.13), wenn  $\pi_1(Y, y)$  ein Normalteiler in  $\pi_1(X, x)$  ist, und in diesem Fall sind die beiden Gruppen  $\text{Aut}_{\text{Cov}_X}(Y)$  und  $\pi_1(X, x)/\pi_1(Y, Y)$  isomorph.

Hinweis: Bemerkung 5.1.10 und Aufgabe 5.3.31.

**Aufgabe 5.3.33.** Zu ergänzen: Galoisverbindung zwischen Zwischenüberlagerungen einer Galoisüberlagerung (bis auf Äquivalenz) und Untergruppen der Automorphismengruppe.

**5.3.34.** Seien die Annahmen wie in Satz 5.3.5. Betrachte den **abstrakten Faserfunkt**

$$(5.3.13) \quad \text{Cov}_X(\tilde{X}, -): \text{Cov}_X \rightarrow \text{Set-Aut}_{\text{Cov}_X}(\tilde{X})$$

(Wie operiert  $\text{Aut}_{\text{Cov}_X}(\tilde{X})$  von rechts auf  $\text{Cov}_X(\tilde{X}, Y)$ , für  $Y \in \text{Cov}_X$ ? Wie ist der Funktor auf Morphismen definiert?) und den Funktor

$$E: \text{Set-Aut}_{\text{Cov}_X}(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X, x)\text{-Set}, \\ M \mapsto E(M) = M,$$

wobei die  $\pi_1(X, x)$ -Operation auf  $E(M) = M$  durch  $\gamma.m := m \circ c_{\tilde{x}}(\gamma)^{-1}$  gegeben ist. Da  $c = c_{\tilde{x}}$  ein Gruppenisomorphismus ist, ist  $E$  ein Isomorphismus von Funktoren. Für eine Überlagerung  $p: Y \rightarrow X$  betrachte die Auswertungsabbildung bei  $\tilde{x}$

$$\text{ev} = \text{ev}_{\tilde{x}} = (\text{ev}_{\tilde{x}})_Y: E(\text{Cov}_X(\tilde{X}, Y)) \rightarrow F_x(Y) = p^{-1}(x), \\ f \mapsto f(x),$$

Da  $\tilde{X}$  universell ist, ist diese Abbildung bijektiv. Sie ist sogar ein Isomorphismus von  $\pi_1(X, x)$ -Mengen, denn es gilt

$$\text{ev}(\gamma.f) = (\gamma.f)(\tilde{x}) = (f \circ c(\gamma)^{-1})(\tilde{x}) = f(\gamma.\tilde{x}) = \gamma.f(\tilde{x}) = \gamma.\text{ev}(f).$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Familie von Abbildungen  $((\text{ev}_{\tilde{x}})_Y)_{Y \in \text{Cov}_X}$  eine Isotransformation

$$E \circ \text{Cov}_X(\tilde{X}, -) \xrightarrow{\sim} F_x$$

definiert. Da der Faserfunkt  $F_x$  nach Satz 5.3.22 eine Äquivalenz ist und da  $E$  ein Isomorphismus von Funktoren ist, ist auch der abstrakte Faserfunkt 5.3.13 eine Äquivalenz von Kategorien. Man kann auch in Abwandlung der obigen Argumente direkt zeigen, dass der abstrakte Faserfunkt eine Äquivalenz von Kategorien ist. Dafür reicht es sogar anzunehmen, dass der topologische Raum  $X$  eine universelle Überlagerung  $\tilde{X} \rightarrow X$ , man muss also nicht fordern, dass  $X$  zusammenhängend und lokal zusammenziehbar ist.

## ANHANG A. ETWAS KATEGORIENTHEORIE

Die Kategorientheorie beschreibt grundlegende Konzepte, die in vielen Bereichen der Mathematik vorkommen. Das Buch [ML98] ist sehr zu empfehlen.

## A.1. Kategorien.

**Definition A.1.1.** Eine **Kategorie**  $\mathcal{C}$  ist ein Datum bestehend aus

- (a) einer Menge<sup>88</sup>  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  von **Objekten**;
- (b) einer Menge  $\mathcal{C}(X, Y)$  von **Morphismen** für je zwei Objekte  $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ;
- (c) einer Abbildung

$$\begin{aligned} \circ: \mathcal{C}(Y, Z) \times \mathcal{C}(X, Y) &\rightarrow \mathcal{C}(X, Z), \\ (g, f) &\mapsto g \circ f, \end{aligned}$$

für je drei Objekte  $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ , genannt **Verknüpfung** von Morphismen, so dass die folgenden Bedingungen gelten:

- (a) Die Verknüpfung ist **assoziativ**, d. h. es gilt  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  für alle Morphismen  $f, g, h$ , für die diese Verknüpfungen sinnvoll sind.
- (b) Für jedes Objekt  $X$  gibt es einen Morphismus  $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$ , die **Identität** von  $X$ , so dass  $\text{id}_X \circ f = f$  und  $g \circ \text{id}_X = g$  für alle Morphismen  $f$  und  $g$  gilt, für die diese Verknüpfungen sinnvoll sind.<sup>89</sup>

**A.1.2.** Die Identität eines Objekts  $X$  einer Kategorie ist eindeutig bestimmt (sind  $\text{id}_X$  und  $\text{id}'_X$  Identitäten von  $X$ , so gilt  $\text{id}_X = \text{id}_X \circ \text{id}'_X = \text{id}'_X$ ).

**Notation A.1.3.** Wir schreiben oft  $X \in \mathcal{C}$  für  $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ . Seien  $X, Y \in \mathcal{C}$ . Statt  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$  sagen wir auch, dass  $f$  ein **Morphismus von  $X$  nach  $Y$**  ist und schreiben kurz  $f: X \rightarrow Y$ . Man nennt Morphismen deswegen manchmal **Pfeile**. Man schreibt oft  $gf$  statt  $g \circ f$  und  $\text{id}$  statt  $\text{id}_X$ . Die Notation  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  statt  $\mathcal{C}(X, Y)$  ist verbreitet, wir werden sie aber in dieser Vorlesung eher vermeiden.

**Definition A.1.4.** Ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  heißt **Isomorphismus** oder **invertierbarer** Morphismus, notiert  $f: X \xrightarrow{\sim} Y$ , falls es einen Morphismus  $g: Y \rightarrow X$  mit  $gf = \text{id}_X$  und  $fg = \text{id}_Y$  gibt. Ein solches  $g$  ist eindeutig, selbst ein Isomorphismus, wird **Inverses** von  $f$  genannt und als  $f^{-1}$  notiert. Zwei Objekte  $X$  und  $Y$  von  $\mathcal{C}$  heißen **isomorph**, falls es einen Isomorphismus zwischen ihnen gibt.

Ein **Endomorphismen** ist ein Morphismus eines Objekts in sich selbst, also ein Morphismus  $f: X \rightarrow X$ . Die Menge aller Endomorphismen von  $X$  wird oft als  $\text{End}_{\mathcal{C}}(X) := \mathcal{C}(X) := \mathcal{C}(X, X)$  notiert; mit der Verknüpfung  $\circ$  ist sie ein Monoid. Ein **Automorphismus** ist ein invertierbares Element dieses Monoids, also ein Endomorphismus, der ein Isomorphismus ist. Man schreibt oft  $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(X) := \mathcal{C}(X)^{\times} := \mathcal{C}(X, X)^{\times}$  für die Menge aller Automorphismen von  $X$ .

### Beispiele A.1.5.

- (a) Die Kategorie **Top** der topologischen Räume ist wie folgt definiert:
  - (i) Die Objekte sind die topologischen Räume, es ist also  $\text{Obj}(\text{Top})$  die Menge aller topologischen Räume.
  - (ii) Gegeben Objekte  $X, Y$  ist  $\text{Top}(X, Y)$  die Menge aller stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$ , in Formeln  $\text{Top}(X, Y) := \{f: X \rightarrow Y \text{ stetige Abbildung}\}$ .

<sup>88</sup>Wer sich hier wundert, dass wir von einer Menge und nicht von einer Klasse sprechen: Wir arbeiten implizit mit Grothendieck-Universen.

<sup>89</sup>Wir verlangen nicht, dass die Morphismenmengen disjunkt sind. Dies hat technische Vorteile.

- (iii) Die Verknüpfung ist die offensichtliche Verknüpfung von stetigen Abbildungen (das ist wohldefiniert nach Satz 2.4.7).

Es ist klar, dass dieses Datum die Axiome einer Kategorie erfüllt. Isomorphismen in  $\text{Top}$  werden klassisch als Homöomorphismen bezeichnet.

- (b) Ist  $R$  ein Ring, so ist die Kategorie  $\text{Mod}(R)$  der  $R$ -Moduln wie folgt definiert:
  - (i) Die Objekte sind die  $R$ -Moduln.
  - (ii) Gegeben Objekte  $M, N$  sei  $\text{Mod}(R)(M, N) := \text{Hom}_R(M, N)$  die Menge aller  $R$ -linearen Abbildungen von  $M$  nach  $N$ . Morphismen in  $\text{Mod}(R)$  werden klassisch  $R$ -lineare Homomorphismen genannt. Da die Notation  $\text{Mod}(R)(M, N)$  etwas sperrig ist, schreibt man oft  $\text{Mod}_R(M, N)$  oder  $\text{Hom}_R(M, N)$ .
  - (iii) Die Verknüpfung ist die offensichtliche Verknüpfung von Morphismen von  $R$ -Moduln.

Es ist klar, dass dieses Datum die Axiome einer Kategorie erfüllt.

- (c) Ein Spezialfall ist die Kategorie  $\text{Mod}(k)$  der Vektorräume über einem Körper  $k$ . Diese wird oft als  $\text{Vect}(k)$  oder ähnlich notiert.
- (d) Analog definiert man viele andere Kategorien:
  - (i) Die Kategorie  $\text{Set}$  der Mengen hat die Mengen als Objekte und Abbildungen zwischen Mengen als Morphismen. (Dieses Beispiel sollte eigentlich das erste Beispiel einer Kategorie sein.)
  - (ii) Die Kategorie  $\text{Top}_*$  der punktierten topologischen Räume hat als Objekte punktierte topologische Räume  $(X, x)$  und als Morphismen  $f: (X, x) \rightarrow (Y, y)$  die basispunkterhaltenden stetigen Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$ , in Formeln

$$\text{Top}_*((X, x), (Y, y)) = \{f \in \text{Top}(X, Y) \mid f(x) = y\},$$

mit offensichtlichen Verknüpfungen.

- (iii) Die Kategorie  $\text{Grp}$  der Gruppen hat als Objekte die Gruppen und Homomorphismen von Gruppen als Morphismen.
- (iv) Die Kategorie  $\text{Ab}$  der abelschen Gruppen hat als Objekte die abelschen Gruppen und Homomorphismen von (abelschen) Gruppen als Morphismen.
- (v) Die Kategorie  $\text{Ring}$  der Ringe hat die Ringe als Objekte und Ringmorphismen als Morphismen.
- (e) Es gibt auch Kategorien mit wenigen Objekten:
  - (i) Die leere Kategorie, die kein Objekt hat.
  - (ii) Einen multiplikativ geschriebenen Monoid  $M$  kann man auffassen als eine Kategorie  $\underline{M}$  mit genau einem Objekt, notieren wir es  $*$ , und mit Morphismenmenge  $\underline{M}(*, *) = M$  und Multiplikation als Verknüpfung. Es gilt  $\text{id}_* = 1$ . Ist umgekehrt  $\mathcal{C}$  eine Kategorie mit genau einem Objekt, notieren wir es  $*$ , so ist  $\mathcal{C}(*, *)$  ein Monoid.
  - (iii) Die im folgenden Diagramm angedeutete Kategorie  $\mathcal{P}$  hat genau zwei Objekte, die wir  $0$  und  $1$  nennen, und genau drei Morphismen, nämlich die Identitäten  $\text{id}_0$  und  $\text{id}_1$  und einen weiteren Morphismus  $f: 0 \rightarrow 1$ ; ihre Verknüpfung ist die einzig mögliche.

$$\mathcal{P}: \quad \text{id}_0 \circlearrowleft 0 \xrightarrow{f} 1 \circlearrowright \text{id}_1$$

Es gilt also  $\text{Obj}(\mathcal{P}) = \{0, 1\}$ . Die Mengen von Morphismen sind wie folgt gegeben:  $\mathcal{P}(1, 0) := \emptyset$ ,  $\mathcal{P}(0, 0) := \{\text{id}_X\}$ ,  $\mathcal{P}(0, 1) := \{f\}$ ,  $\mathcal{P}(1, 1) := \{\text{id}_Y\}$ .

- (iv) Allgemeiner kann man jede partiell geordnete Menge  $(A, \leq)$  als Kategorie  $\mathcal{A}$  auffassen: Die Objekte sind die Elemente  $a, b, \dots$  von  $A$ , und  $\mathcal{A}(a, b)$  besteht aus genau einem Element, falls  $a \leq b$ , und ist sonst leer. Die Verknüpfung ist die einzig mögliche.
- (f) Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, so dass  $\mathcal{C}(X, X) = \{\text{id}_X\}$  und  $\mathcal{C}(X, Y) = \emptyset$  für alle Objekte  $X \neq Y$  in  $\mathcal{C}$ , so sagt man, dass  $\mathcal{C}$  eine **diskrete** Kategorie ist. Eine diskrete Kategorie ist also eindeutig durch ihre Objektmenge bestimmt. Umgekehrt kann man jede Menge in offensichtlicher Weise als diskrete Kategorie auffassen.

**Definition A.1.6.** Eine Kategorie  $\mathcal{G}$  heißt **Gruppoid**, falls jeder Morphismus in  $\mathcal{G}$  ein Isomorphismus ist.

- Beispiele A.1.7.**
- (a) Die einem Monoid  $M$  zugeordnete Kategorie  $\underline{M}$  ist genau dann ein Gruppoid, wenn  $M$  eine Gruppe ist.
  - (b) Ist  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie, so definieren wir eine Kategorie  $\mathcal{C}^\times$  durch  $\text{Obj}(\mathcal{C}^\times) := \text{Obj}(\mathcal{C})$  und  $\mathcal{C}^\times(X, Y) := \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f \text{ ist Isomorphismus}\}$  und der von  $\mathcal{C}$  induzierten Verknüpfung. Dann ist  $\mathcal{C}^\times$  ein Gruppoid.
  - (c) Beispielsweise ist  $\text{Top}^\times$  die Kategorie der topologischen Räume und Homöomorphismen.

## A.2. Funktoren.

**Definition A.2.1.** Ein **Funktor**  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  von einer Kategorie  $\mathcal{C}$  in eine Kategorie  $\mathcal{D}$  ist ein Datum bestehend aus

- (a) einer Abbildung  $F = F_{\text{Obj}}: \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$  und
- (b) Abbildungen  $F = F_{X,Y}: \mathcal{C}(X, Y) \rightarrow \mathcal{D}(FX, FY)$ , für je zwei Objekte  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,

so dass gelten:

- (a)  $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$  für alle verknüpfbaren Morphismen  $f$  und  $g$  in  $\mathcal{C}$ ;
- (b)  $F(\text{id}_X) = \text{id}_{FX}$  für alle Objekte  $X \in \mathcal{C}$ .

**Trivialbeispiel A.2.2.** Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, so ist der **Identitätsfunktor**  $\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  die Identität auf Objekten und Morphismen.

**Beispiel A.2.3.** Der Vergiss-Funktor  $\text{Top}_* \rightarrow \text{Top}$  „vergisst den Basispunkt“ und bildet einen punktierten topologischen Raum  $(X, x)$  auf den topologischen Raum  $X$  ab und ist die Inklusion  $\text{Top}_*((X, x), (Y, y)) \hookrightarrow \text{Top}(X, Y)$  auf den Morphismenmengen.

**A.2.4.** Meist gibt man Funktoren nur auf Objekten an, wenn sie das offensichtliche mit Morphismen tun. Der Leser sollte aber stets überlegen, was mit Morphismen passiert.

**Beispiele A.2.5.** Weitere Beispiele für Vergiss-Funktoren sind die folgenden sieben Funktoren, die das offensichtliche mit Objekten und Morphismen tun:

$$\begin{aligned} \text{Mod}(\mathbb{C}[X]) &\rightarrow \text{Vect}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Ab} \rightarrow \text{Grp} \rightarrow \text{Set}, \\ \text{Top}_* &\rightarrow \text{Top} \rightarrow \text{Set}. \end{aligned}$$

Beispielsweise bildet der Vergiss-Funktor  $\text{Vect}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Ab}$  einen reellen Vektorraum auf die unterliegende abelsche Gruppe ab.

**Beispiel A.2.6.** Sei  $X \in \text{Set}$ . Dann ist  $(X \times -): \text{Set} \rightarrow \text{Set}$  ein Funktor. Was macht er auf Morphismen?

**A.2.7.** Hat eine Kategorie  $\mathcal{C}$  einen offensichtlichen „Vergiss-Funktor“ in die Kategorie Set der Mengen, so nennt man einen Morphismus in  $\mathcal{C}$  injektiv/surjektiv/bijektiv, falls sein Bild unter diesem Funktor diese Eigenschaft hat.

**Beispiel A.2.8.** Ist  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie und  $X \in \mathcal{C}$  ein Objekt, so überlege sich der Leser, was der Funktor

$$F := \mathcal{C}(X, -): \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$$

sinnvollerweise auf Morphismenmengen tut. Um auch  $\mathcal{C}(-, X)$  zu einem Funktor zu machen, benötigen wir den Begriff der *opponierten* Kategorie.

**Definition A.2.9.** Ist  $\mathcal{C}$  eine Kategorie, so bezeichnen wir mit  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  ihre **opponierte Kategorie**. Sie entsteht, indem man die Richtung aller Pfeile in  $\mathcal{C}$  umdreht. Genauer hat  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  dieselben Objekte wie  $\mathcal{C}$ , aber ihre Morphismenmengen sind definiert als

$$\mathcal{C}^{\text{op}}(Y, X) := \mathcal{C}(X, Y).$$

Die Verknüpfung ist definiert per  $f \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} g := g \circ_{\mathcal{C}} f$  für Morphismen  $X \xleftarrow{f} Y \xleftarrow{g} Z$  in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  alias Morphismen  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  in  $\mathcal{C}$ .

**A.2.10.** Gegeben ein Morphismus  $f: X \rightarrow Y$  in einer Kategorie  $\mathcal{C}$  ist es bisweilen sinnvoll, den entsprechenden Morphismus in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  als  $f^{\text{op}}: Y \rightarrow X$  oder gar als  $f^{\text{op}}: Y^{\text{op}} \rightarrow X^{\text{op}}$  zu notieren.

**A.2.11.** Sei  $F: \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$  ein Funktor.<sup>90</sup> Dann dreht  $F$  die Richtung der Pfeile in folgendem Sinne um: Ist  $X \xrightarrow{f} Y$  ein Morphismus in  $\mathcal{C}$ , also ein Morphismus  $X \xleftarrow{f} Y$  in  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ , so liefert  $F$  einen Morphismus  $F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y)$  in  $\mathcal{D}$ . Sind

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad \text{Morphismen in } \mathcal{C},$$

so erhalten wir Morphismen

$$F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y) \xleftarrow{F(g)} F(Z) \quad \text{in } \mathcal{D},$$

und es gilt

$$F(g \circ_{\mathcal{C}} f) = F(f \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} g) = F(f) \circ_{\mathcal{D}} F(g)$$

oder kurz  $F(gf) = F(f)F(g)$ .

**Beispiel A.2.12.** Ordnet man einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  seinen Dualraum  $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$  zu und einer linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$  ihre duale Abbildung  $f^*: W^* \rightarrow V^*$ , so definiert dies einen Funktor

$$(-)^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(-, \mathbb{R}): \text{Vect}(\mathbb{R})^{\text{op}} \rightarrow \text{Vect}(\mathbb{R}).$$

Allgemeiner ist  $\text{Hom}_R(-, R)$  ein Funktor von der opponierten Kategorie der  $R$ -Linksmoduln in die Kategorie der  $R$ -Rechtsmoduln; hier ist  $R$  ein (nicht als kommutativ vorausgesetzter) Ring.

<sup>90</sup> Ein solcher Funktor wird auch als **kontravarianter** Funktor  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  bezeichnet, denn er dreht die Richtung der Pfeile um. Verwendet man diese Sprache, so bezeichnet man „normale“ Funktoren als **kovariante** Funktoren.

**Beispiel A.2.13.** Ist  $\mathcal{C}$  eine beliebige Kategorie und  $X \in \mathcal{C}$  ein Objekt, so ist

$$F := \mathcal{C}(-, X): \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$$

ein Funktor. Was macht er auf Morphismen?

**A.2.14** (Verknüpfung von Funktoren und die Kategorie der Kategorien). Sind  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  Funktoren, so definiert man die **Verknüpfung** in der offensichtlichen Weise.

Wenn man mengentheoretische Probleme ignoriert, erhalten wir die Kategorie  $\text{Cat}$  der Kategorien: Ihre Objekte sind die Kategorien, ihre Morphismen die Funktoren.

#### LITERATUR

- [AZ18] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. Proofs from The Book. Springer, Berlin, sixth edition, 2018. See corrected reprint of the 1998 original [MR1723092], including illustrations by Karl H. Hofmann.
- [Hat02] Allen Hatcher. Algebraic topology. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [HS97] P. J. Hilton and U. Stammbach. A course in homological algebra, volume 4 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [ML98] Saunders Mac Lane. Categories for the working mathematician, volume 5 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [Mun75] James R. Munkres. Topology: a first course. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.
- [tD08] Tammo tom Dieck. Algebraic topology. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.
- [vQ79] Boto von Querenburg. Mengentheoretische Topologie. Springer-Verlag, Berlin-New York, second edition, 1979. Hochschultext. [University Text].

INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT PADERBORN, WARBURGER STRASSE 100, 33098 PADERBORN, GERMANY

*Email address:* olaf.schnuerer@math.uni-paderborn.de