

# ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE: SINGULÄRE HOMOLOGIE

OLAF M. SCHNÜRER

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Motivation	2
2. Simplicialkomplexe und simpliciale Homologie	2
2.1. Simplicialkomplexe	2
2.2. Geometrische Realisierung eines Simplicialkomplexes	4
2.3. Simpliciale Abbildungen	8
2.4. Simpliciale Homologie	9
3. Singuläre Homologie	18
3.1. Definition der singulären Homologie und erste Resultate	18
3.2. Funktorialität der singulären Homologie	25
3.3. Homotopie-Invarianz der singulären Homologie	26
3.4. Erste Homologie und Fundamentalgruppe	29
4. Relative singuläre Homologie	32
4.1. Definition der relativen singulären Homologie	33
4.2. Lange exakte Homologie-Sequenz eines Raumpaars	35
4.3. Satz über feine Ketten	37
4.4. Mayer-Vietoris-Sequenz	42
4.5. Homologie der Sphären	43
4.6. Homologie von Flächen	45
4.7. Ausschneidung	49
4.8. Vergleichs-isomorphismus zwischen simplicialer Homologie eines Simplicialkomplexes und singulärer Homologie seiner geometrischen Realisierung	54
4.9. Euler-Charakteristik	63
4.10. Super-Spur	68
4.11. Simplicialer Fixpunktsatz	70
4.12. Baryzentrische Unterteilung für Simplicialkomplexe	72
4.13. Simpliciale Approximation	76
4.14. Lefschetz'scher Fixpunktsatz	78
4.15. Abbildungsgrad für Selbstabbildungen von Sphären samt Anwendungen	86
Anhang A. Kategorientheorie	93
Anhang B. Homologische Algebra	98
B.1. Die Kategorie der Komplexe und Homologie	98
B.2. Die Homotopiekategorie von Komplexen	102
B.3. Die lange exakte Homologiesequenz	105
B.4. Fünfer- und Neunerlemma	106
Anhang C. Nachträge zur mengentheoretischen Topologie	107
Literatur	108

---

*Datum:* 3. Januar 2021.

Skript zur Vorlesung *Algebraische Topologie* im Wintersemester 2020/21 an der Universität Paderborn.

Ich halte mich eng an das Skript [See20]. Alexis-Vincent Chasiotis, Carsten Hecht, Martin Pulter und Jonas Pinke haben mich dankenswerterweise auf Fehler oder Unklarheiten im Skript aufmerksam gemacht. (Falls jemand hier nicht namentlich erscheinen möchte, bitte melden.)

## 1. MOTIVATION

### 1.0.1. Motivation (mit Bildern an Tafel):

- Wir wollen jedem topologischen Raum ein algebraisches Datum zuordnen, das „genügend verschiedene“ topologische Räume unterscheidet und gleichzeitig „berechenbar“ ist.
- Beispiel: Fundamentalgruppe; jedem topologischen Raum  $X$  (mit ausgezeichnetem Punkt  $x$ ) wird eine Gruppe  $\pi_1(X) = \pi_1(X, x)$  zugeordnet (sie ist im Allgemeinen nicht abelsch).
  - $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \not\cong \pi_1(\mathbb{R}^2) = \{0\}$ .
  - $\pi_1(\{*\}) \cong \pi_1(\mathbb{R}) \cong \pi_1(\mathbb{R}^m) \cong \pi_1(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{m-1})$  für alle  $m \geq 3$ .
- Wir sind gerne bereit, mit der „Homotopie-Invarianz der Fundamentalgruppe“ zu leben (siehe [Sch20, Satz 3.5.1]<sup>1</sup>).

Jedoch ist es unbefriedigend, dass die Fundamentalgruppen der Sphären  $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3, \dots$  der Dimension  $\geq 2$  und aller  $\mathbb{R}^m$  trivial sind, die Fundamentalgruppe diese topologischen Räume also nicht unterscheiden kann.

Immerhin kann  $\pi_1$  die Eins-Sphäre  $\mathbb{S}^1$  von den gerade genannten Räumen unterscheiden.

Auch kann  $\pi_1$  zwischen  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$  und  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$  und  $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q, r\}$  für verschiedene Punkte  $p, q, r$  in  $\mathbb{R}^2$  unterscheiden (freie Gruppen in einem, zwei oder drei Erzeugern).

- Wie unterscheiden sich  $\mathbb{S}^1$  und  $\mathbb{S}^2$ ?

Kombinatorischer gefragt: Wie unterscheiden sich der Rand eines Dreiecks (homotop zu  $\mathbb{S}^1$ ) und der Rand (= Oberfläche) eines Tetraeders (homotop zu  $\mathbb{S}^2$ )?

Idee: Der eindimensionale Dreiecksrand umschließt ein „Loch kleinerer Dimension“ als der zweidimensionale Tetraederrand. Diese Löcher sind gerade das „Innere“ des Dreiecks bzw. Tetraeders.

- Unser erstes Ziel ist es, singuläre Homologie zu definieren. Diese ordnet jedem topologischen Raum  $X$  eine Familie *abelscher* Gruppen  $H_p(X)$ , für  $p \in \mathbb{Z}$ , zu. Wie die Fundamentalgruppe wird sie homotopie-invariant sein. Jedoch kann sie beispielsweise alle Sphären  $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2, \dots$  voneinander unterscheiden.
- Damit die Definition nicht vom Himmel fällt, definieren wir zunächst simpliziale Homologie von Simplizialkomplexen. Ein Simplizialkomplex ist ein rein kombinatorisches Datum, das topologische Räume modelliert, die sich (in schöner Weise) aus Punkten, Streckensegmenten, Tetraedern, und analogen höherdimensionalen „vollen Simplizes“ zusammenbauen lassen. Für solche Gebilde ist anschaulich recht klar, was „Löcher verschiedener Dimensionen“ sind - die simpliziale Homologie zählt im Wesentlichen diese Löcher und motiviert die viel weniger anschauliche, aber allgemeinere Definition der singulären Homologie.
- Man kann die Singuläre-Homologie-Theorie auch axiomatisch aus den sogenannten Eilenberg-Steenrod Axiomen entwickeln, siehe [Wik20, Eilenberg-Steenrod axioms] und [Bre97].

## 2. SIMPLIZIALKOMPLEXE UND SIMPLIZIALE HOMOLOGIE

### 2.1. Simplizialkomplexe.

**Definition 2.1.1.** Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ein  $(n+1)$ -Tupel  $(p_0, \dots, p_n)$  von Vektoren in  $V$  heißt **affin unabhängig**, wenn das Tupel  $(p_1 - p_0, \dots, p_n - p_0)$  linear unabhängig ist. Eine äquivalente, symmetrischere Forderung ist: Für alle  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  mit  $\lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n = 0$  und  $\lambda_0 + \dots + \lambda_n = 0$  gilt  $0 = \lambda_0 = \dots = \lambda_n$ .

Sei  $(p_0, \dots, p_n)$  ein affin unabhängiges  $(n+1)$ -Tupel. Dann nennt man die konvexe Hülle

$$\text{konv}(p_0, \dots, p_n) = \left\{ \sum_{i=0}^n t_i p_i \mid t_i \in [0, 1] \text{ mit } \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

dieser Vektoren den **vollen  $n$ -Simplex mit Ecken**  $p_0, \dots, p_n$ . Für jeden Punkt  $q \in \text{konv}(p_0, \dots, p_n)$  gibt es auf Grund der affinen Unabhängigkeitsannahme genau ein  $(n+1)$ -Tupel  $(t_0, \dots, t_n) \in [0, 1]^{n+1}$  mit  $q = \sum_{i=0}^n t_i p_i$ . Man nennt die Elemente dieses Tupels die **baryzentrischen Koordinaten von  $q$** .<sup>2</sup> Der Punkt  $\frac{1}{n+1}(p_0 + \dots + p_n)$  heißt **Schwerpunkt** oder **Baryzentrum** unseres vollen Simplex (vgl. Abbildung 1).

<sup>1</sup>Verweise in hellem Purpur (= Magenta) sollten funktionieren, wenn sich das in [Sch20] genannte Skript im selben Verzeichnis wie dieses Skript befindet.

<sup>2</sup>Anschaulich ist  $q$  der Schwerpunkt der  $n+1$  Punkte  $p_0, \dots, p_n$ , wobei  $p_i$  die Masse  $t_i$  hat.

Sind  $p_0, \dots, p_n \in V$  (nicht notwendig affin unabhängig) Vektoren, so nennt man jede Summe der Form  $\sum_{i=0}^n t_i p_i$  mit  $t_i \in [0, 1]$  eine **Konvexkombination der**  $p_0, \dots, p_n$ .

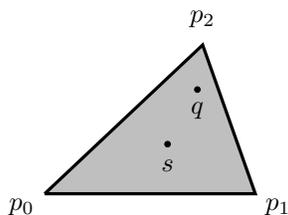


ABBILDUNG 1. Voller 2-Simplex mit Ecken  $p_0, p_1, p_2$ . Eingezeichnet sind sein Schwerpunkt  $s = \frac{1}{3}(p_0 + p_1 + p_2)$  und der Punkt  $q$  mit baryzentrischen Koordinaten  $(\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{7}{10})$

**Beispiele 2.1.2.** Ein einzelner Punkt  $p$  ist stets affin unabhängig und sein voller Simplex ist  $\text{konv}(p) = \{p\}$ .

Zwei Punkte  $p, q$  sind genau dann affin unabhängig, wenn sie verschieden sind. Dann ist  $\text{konv}(p, q)$  das „abgeschlossenen Streckenstück zwischen  $p$  und  $q$ “ und wird manchmal als  $[p, q]$  notiert.

Drei Punkte  $p, q, r$  sind genau dann affin unabhängig, wenn sie nicht alle auf einer „affinen Geraden“ liegen. In diesem Fall ist  $\text{konv}(p, q, r)$  das abgeschlossene Dreieck mit Ecken  $p, q, r$ .

Siehe auch [Wik20, Simplex (Mathematik)].

**2.1.3.** Jede Permutation eines affin unabhängigen Tupels ist affin unabhängig.

Jedes Teiltupel eines affin unabhängigen Tupels ist affin unabhängig. Der volle Simplex des Teiltupels ist eine **Seitenfläche** des vollen Simplex des gesamten Tupels.

**2.1.4.** Ist  $V$  endlichdimensional, so hat  $V$  eine natürliche Topologie<sup>3</sup>; der volle  $n$ -Simplex  $\text{konv}(p_0, \dots, p_n)$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $V$ .

**Definition 2.1.5** (e.g. [Spa81, 3.1]). Ein **Simplizialkomplex** ist ein Paar  $(E, \mathcal{K})$  bestehend aus einer Menge  $E$  und einem System  $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$  von nichtleeren endlichen Teilmengen, das unter dem Bilden von nichtleeren Teilmengen stabil ist und alle einelementigen Teilmengen enthält:

- Für alle  $\sigma \in \mathcal{K}$  gilt  $0 < |\sigma| < \infty$ ;
- für alle  $\sigma \in \mathcal{K}$  und alle  $\emptyset \neq \tau \subset \sigma$  gilt  $\tau \in \mathcal{K}$ ;
- für alle  $e \in E$  gilt  $\{e\} \in \mathcal{K}$ .

Die Elemente von  $E$  heißen **Ecken**, die Elemente von  $\mathcal{K}$  heißen **Simplizes** des Simplizialkomplexes. Die Simplizes  $\sigma \in \mathcal{K}$  mit  $|\sigma| = q + 1$  heißen genauer  **$q$ -Simplizes** oder auch Simplizes der **Dimension**  $\dim(\sigma) = q$ ; die Menge der  $q$ -Simplizes wird als  $\mathcal{K}_q = \{\sigma \in \mathcal{K} \mid |\sigma| = q + 1\}$  notiert. Für  $q < 0$  gilt also  $\mathcal{K}_q = \emptyset$ .

Sind  $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$  Simplizes mit  $\tau \subset \sigma$ , so nennt man  $\tau$  eine **Seite von**  $\sigma$  oder genauer im Fall  $\tau \in \mathcal{K}_q$  eine  **$q$ -Seite von**  $\sigma$ .

**2.1.6.** Der Fall  $|E| = \infty$  ist zwar erlaubt und wichtig, beim ersten Lesen sollte man aber eher an den Fall  $|E| < \infty$  denken.

**2.1.7.** Ein Simplizialkomplex ist ein rein kombinatorisches Datum und hat a priori nichts mit geometrischen vollen Simplizes zu tun. Unsere Simplizialkomplexe werden deshalb oft auch **abstrakte** oder **kombinatorische Simplizialkomplexe** genannt.

**2.1.8.** Ist  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex, so ist die Abbildung  $E \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_0, e \mapsto \{e\}$  eine Bijektion und  $E = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}_0} \sigma$  ist die disjunkte Vereinigung der 0-Simplizes.

Somit ist  $E$  durch  $\mathcal{K}$  bestimmt und man nennt deshalb oft kurz das Mengensystem  $\mathcal{K}$  einen Simplizialkomplex und erwähnt  $E$  nicht explizit.

<sup>3</sup>Jeder endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorraum hat eine natürliche Topologie: Wähle eine beliebige Norm, betrachte die induzierte Metrik und die daraus erhaltene Topologie - diese hängt nicht von der Wahl der Norm ab, da alle Normen äquivalent sind.

**Beispiel 2.1.9.** Ist  $E$  eine Menge, so ist  $(E, \mathcal{P}_{\text{endlich}}(E) \setminus \{\emptyset\})$  ein Simplizialkomplex, der sogenannte **maximale Simplizialkomplex mit Eckenmenge**  $E$ , wobei  $\mathcal{P}_{\text{endlich}}(E)$  die Menge aller endlichen Teilmengen von  $E$  bezeichnet.

**Definition 2.1.10.** Ist  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex, so ist  $E$  genau dann endlich, wenn  $\mathcal{K}$  endlich ist. In diesem Fall nennt man  $(E, \mathcal{K})$  einen **endlichen Simplizialkomplex**.

**Beispiele 2.1.11.**

- (a) Setze  $E = \mathbb{Z}$  und

$$\mathcal{K} = \left\{ \{n\} \mid n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \{n, n+1\} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dies definiert einen Simplizialkomplex  $(E, \mathcal{K})$ . Seine in Kürze definierte geometrische Realisierung (Definition 2.2.2) ist homöomorph zu  $\mathbb{R}$  (motiviere durch Bild), wie wir in 2.2.9 begründen werden.

- (b) Setze  $E = \mathbb{Z}^2$  und

$$\mathcal{K}_2 := \left\{ \{(x, y), (x+1, y), (x+1, y+1)\}, \{(x, y), (x, y+1), (x+1, y+1)\} \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

und

$$\mathcal{K} := \{ \sigma \mid \sigma \subset \tau \text{ für ein } \tau \in \mathcal{K}_2 \}.$$

Dann ist  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex mit geometrischer Realisierung homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$ , wie wir in 2.2.9 begründen werden (male Bild,  $\mathbb{R}^2$  in Quadrate zerschnitten, diese entlang „erster“ Diagonale zerschnitten; „Triangulierung“ von  $\mathbb{R}^n$ ).

- (c) Ähnlich definiert man einen Simplizialkomplex mit Eckenmenge  $\mathbb{Z}^n$ , dessen geometrische Realisierung homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist, siehe [Spa81, 3.1.9]. Anschaulich: Zerschneide  $\mathbb{R}^n$  in offensichtlicher Weise in  $n$ -dimensionale Würfel; zerschneide jeden dieser Würfel in  $n!$  volle  $n$ -Simplizes.  
 (d) Siehe [www.ics.uci.edu/~eppstein/projects/tetra/](http://www.ics.uci.edu/~eppstein/projects/tetra/) für zwei Beispiele, wie man den Würfel in Tetraeder zerschneiden kann.  
 (e) Betrachte den Simplizialkomplex mit  $E = \mathbb{N} \sqcup \{*\}$  und

$$\mathcal{K} = \left\{ \{e\} \mid e \in E \right\} \cup \left\{ \{*, n\} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Verbindet man in  $\mathbb{R}^2$  den Ursprung durch ein Geradensegment mit allen Punkten der Form  $(1, n)$ , für  $n \in \mathbb{N}$ , so könnte man vermuten, dass die entstandene Teilmenge homöomorph zur geometrischen Realisierung von  $\mathcal{K}$  ist. Dies ist aber nicht der Fall, wie sofort aus der späteren Proposition 2.2.15 folgt.

**Definition 2.1.12.** Ein **Unterkomplex** (oder genauer **Untersimplizialkomplex**) eines Simplizialkomplexes  $(E, \mathcal{K})$  ist ein Simplizialkomplex  $(F, \mathcal{L})$  mit  $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$  (und somit  $F \subset E$ ). Wir schreiben dies als  $(F, \mathcal{L}) \subset (E, \mathcal{K})$ .

**2.1.13.** Sind  $\mathcal{L}, \mathcal{M} \subset \mathcal{K}$  Unterkomplexe, so auch  $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$  und  $\mathcal{L} \cup \mathcal{M}$  (die in der Notation weggelassenen Eckenmengen sind ebenfalls Schnitt bzw. Vereinigung der Eckenmengen). Allgemeiner sind beliebige Schnitte  $\cap \mathcal{L}(i)$  und Vereinigungen  $\cup \mathcal{L}(i)$  von Unterkomplexen  $\mathcal{L}(i) \subset \mathcal{K}$  wieder Unterkomplexe.

**Beispiel 2.1.14.** Seien  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex und  $m \in \mathbb{Z}$ . Der Unterkomplex  $\mathcal{K}_{\leq m} := (E, \bigsqcup_{q \leq m} \mathcal{K}_q)$  heißt das  **$m$ -Skelett von  $\mathcal{K}$**  oder das  **$m$ -dimensionale Skelett von  $\mathcal{K}$** .

**Beispiel 2.1.15.** Ist  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex und  $\mathcal{T} \subset \mathcal{K}$  eine Teilmenge, so bildet die Menge aller nicht-leeren Teilmengen von Elementen von  $\mathcal{T}$  einen Unterkomplex von  $\mathcal{K}$ .

## 2.2. Geometrische Realisierung eines Simplizialkomplexes.

*Erinnerung 2.2.1* (freier Vektorraum). Ist  $E$  eine beliebige Menge, so bezeichnen wir mit  $\mathbb{R}E$  den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller Abbildungen  $t: E \rightarrow \mathbb{R}$  mit endlichem Träger (dieser Untervektorraum von  $\mathbb{R}^E$  wird oft als  $\mathbb{R}^{(E)}$  notiert; Addition und Skalarmultiplikation sind punktweise definiert).

Wir fassen  $E$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}E$  auf, indem wir einem Element  $e \in E$  die Funktion  $E \rightarrow \mathbb{R}$  zuweisen, die auf  $e$  den Wert Eins annimmt und überall sonst den Wert Null (*charakteristische Funktion von  $e$* ). Mit dieser Konvention läßt sich jedes Element  $f \in \mathbb{R}E$  eindeutig als  $\mathbb{R}$ -Linearkombination  $f = \sum_{e \in E} a_e e$  schreiben,

wobei nur endlich viele der  $a_e = f(e) \in \mathbb{R}$  von Null verschieden sind;<sup>4</sup> mit anderen Worten ist  $E$  eine Basis von  $\mathbb{R}E$ .<sup>5</sup>

Lineare Abbildungen  $\mathbb{R}E \rightarrow V$  in einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  sind eindeutig durch ihre Einschränkung auf  $E \subset \mathbb{R}E$  bestimmt und definierbar. In anderen Worten ist  $E \subset \mathbb{R}E$  eine *universelle Menge-( $\mathbb{R}$ -Vektorraum)-Abbildung* und  $\mathbb{R}E$  heißt **freier  $\mathbb{R}$ -Vektorraum über  $E$**  (in Analogie zur Terminologie in [Sch20, Satz 3.8.3 und Satz 3.8.10]).

Ende der 1. Vorlesung am 29.10.2020.

**Definition 2.2.2.** Sei  $(E, \mathcal{K})$  oder kurz  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex. Seine **geometrische Realisierung**  $\Delta(\mathcal{K})$  ist der folgende topologische Raum (er wird auch der **Polyeder von  $\mathcal{K}$**  genannt)<sup>6</sup>. Als Menge ist  $\Delta(\mathcal{K})$  definiert durch

$$\Delta(\mathcal{K}) := \left\{ f: E \rightarrow [0, 1] \mid \text{Supp}(f) \in \mathcal{K} \text{ und } \sum_{e \in E} f(e) = 1 \right\} \subset \mathbb{R}E.$$

(Wer nur an endlichen Simplicialkomplexen interessiert ist, kann anstelle der folgenden Technikalitäten alternativ 2.2.5 zur Definition der Topologie auf  $\Delta(\mathcal{K})$  verwenden.)

Für jeden Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}$  setze

$$\Delta(\mathcal{K})_\sigma := \{ f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid \text{Supp}(f) \subset \sigma \} \subset \Delta(\mathcal{K}).$$

Schreibe  $\sigma = \{e_0, \dots, e_q\}$ , wobei  $q = \dim \sigma$ . Dann ist das (sogar linear unabhängige) Tupel  $(e_0, \dots, e_q)$  von Vektoren in  $\mathbb{R}E$  affin unabhängig und es gilt

$$\Delta(\mathcal{K})_\sigma = \text{konv}(\sigma) = \text{konv}(e_0, \dots, e_q),$$

in Worten ist also  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$  der volle  $q$ -Simplex mit Ecken  $e_0, \dots, e_q$ .

Der endlichdimensionale Untervektorraum  $\mathbb{R}\sigma = \mathbb{R}\{e_0, \dots, e_q\} = \mathbb{R}e_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_q \subset \mathbb{R}E$  trägt eine natürliche Topologie. Wir versehen die Teilmenge  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \mathbb{R}e_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_q$  mit der induzierten Topologie (= Teilmengentopologie, siehe [Sch20, Definition 2.3.6]).

Offensichtlich gilt

$$\Delta(\mathcal{K}) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \Delta(\mathcal{K})_\sigma.$$

Wir versehen  $\Delta(\mathcal{K})$  mit der Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \Delta(\mathcal{K})$ , für  $\sigma \in \mathcal{K}$  (siehe [Sch20, Definition 2.8.33]). Damit ist  $\Delta(\mathcal{K})$  als topologischer Raum definiert.

*Anschaung 2.2.3.* Anschaulich wird  $\Delta(\mathcal{K})$  wie folgt konstruiert: Jedem  $q$ -Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}_q$  ordnet man einen vollen  $q$ -Simplex mit der „offensichtlichen Topologie“ zu (nämlich  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma = \text{konv}(e_0, \dots, e_q)$  in der obigen Definition) und dann verklebt man all diese  $q$ -Simplizes, für variables  $q$ , in der offensichtlichen Weise.<sup>7</sup>

**2.2.4.** In der Notation von Definition 2.2.2 gilt

$$(2.2.1) \quad \Delta(\mathcal{K})_\sigma \cap \Delta(\mathcal{K})_\tau = \Delta(\mathcal{K})_{\sigma \cap \tau}$$

für beliebige Simplizes  $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ . **Per Konvention setze  $\Delta(\mathcal{K})_\emptyset := \emptyset$ , damit dies auch im Fall  $\sigma \cap \tau = \emptyset$  stimmt.** Insbesondere folgt, dass alle  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$  abgeschlossen in  $\Delta(\mathcal{K})$  sind. Man beachte auch  $\Delta(\mathcal{K})_\tau \subset \Delta(\mathcal{K})_\sigma \iff \tau \subset \sigma$ .

**2.2.5.** Ist  $(E, \mathcal{K})$  ein endlicher Simplicialkomplex, so trägt der endlichdimensionale  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}E$  eine natürliche Topologie, so dass wir seine (abgeschlossene) Teilmenge  $\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}E$  mit der Teilmengentopologie versehen können. Diese stimmt mit der in Definition 2.2.2 erklärten Topologie überein, was man wie folgt sieht:

<sup>4</sup> Wenn ich von einer Linearkombination spreche, nehme ich stets an, dass nur endlich viele Summanden von Null verschieden sind, vgl. [Wik20, Linearkombination].

<sup>5</sup> Eine solche Linearkombination  $f = \sum_{e \in E} a_e e$  nennt man oft eine *formale* Linearkombination, was vermutlich daher kommt, dass man formelartig links neben die Elemente von  $E$  ganze Zahlen schreibt.

<sup>6</sup> Eigentlich wäre der Begriff *topologische Realisierung* besser.

<sup>7</sup> Das Verkleben zweier topologischer Räume wurde in [Sch20, 2.8.52] mit Hilfe eines kokartesischen Diagramms erklärt; kokartesische Diagramme sind Spezialfälle von Kolimiten – dieser Begriff wird hier nicht vorausgesetzt; wer ihn jedoch kennt, wird sofort erkennen, dass und in welcher Weise  $\Delta(\mathcal{K})$  ein Kolimes ist.

Nach 2.1.4 sind alle vollen Simplexe  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma = \text{konv}(e_0, \dots, e_q)$  abgeschlossen in  $\mathbb{R}E$ . Diese bilden eine endliche abgeschlossene Überdeckung von  $\Delta(\mathcal{K})$ , letzteres versehen mit der Teilmengentopologie. Nach [Sch20, Proposition 2.4.13.(b), vgl. Beispiel 2.8.36] trägt also  $\Delta(\mathcal{K})$  die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \Delta(\mathcal{K})$ . Da die Topologie von  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}\sigma$  mit der als Teilmenge von  $\mathbb{R}E$  übereinstimmt, zeigt dies unsere Behauptung.

**2.2.6.** Sei  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex. Für jeden Unterkomplex  $(F, \mathcal{L}) \subset (E, \mathcal{K})$  können wir  $\Delta(\mathcal{L})$  als Teilmenge von  $\Delta(\mathcal{K})$  auffassen, indem wir Funktionen  $f: F \rightarrow [0, 1]$  durch Null zu Funktionen  $E \rightarrow [0, 1]$  ausdehnen. Wir behaupten, dass die Inklusion  $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$  eine abgeschlossene Einbettung ist. Stetigkeit ist klar, denn ihre Einschränkung auf  $\Delta(\mathcal{L})_\tau = \Delta(\mathcal{K})_\tau$  ist stetig für alle  $\tau \in \mathcal{K}$ . Sei  $A \subset \Delta(\mathcal{L})$  abgeschlossen. Dann gilt für jedes  $\sigma \in \mathcal{K}$

$$\Delta(\mathcal{K})_\sigma \cap A = \bigcup_{\tau \in \mathcal{L}, \tau \subset \sigma} \Delta(\mathcal{K})_\tau \cap A$$

und die rechte Seite ist eine endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen von  $\Delta(\mathcal{K})$ , denn  $\Delta(\mathcal{K})_\tau \cap A = \Delta(\mathcal{L})_\tau \cap A$  ist laut Annahme abgeschlossen in  $\Delta(\mathcal{L})_\tau = \Delta(\mathcal{K})_\tau$  und letzteres ist abgeschlossen in  $\Delta(\mathcal{K})$  nach 2.2.4.

Die Topologie von  $\Delta(\mathcal{K})$  ist die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$ , wobei  $\mathcal{L}$  alle *endlichen* Unterkomplexe von  $\mathcal{K}$  durchläuft.<sup>8</sup>

Ist  $\sigma \in \mathcal{K}$  ein Simplex, so können wir  $\sigma$  als maximalen Simplicialkomplex mit Eckenmenge  $\sigma$  auffassen (siehe 2.1.9). Notieren wir diesen (by abuse of notation) als  $\sigma$ , so ist  $\sigma \subset \mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ein Unterkomplex. Die entsprechende (abgeschlossene) Teilmenge  $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$  ist der volle Simplex  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$  aus Definition 2.2.2, in Formeln

$$\Delta(\sigma) = \Delta(\mathcal{K})_\sigma.$$

Die Formel (2.2.1) hat in dieser Schreibweise die einprägsamere Gestalt  $\Delta(\sigma) \cap \Delta(\tau) = \Delta(\sigma \cap \tau)$ . **Das stimmt auch im Fall  $\sigma \cap \tau = \emptyset$ , denn der leere Unterkomplex  $\emptyset \subset \mathcal{K}$  erfüllt  $\Delta(\emptyset) = \emptyset$ .**

**2.2.7.** Sei  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex und  $\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}E$  seine geometrische Realisierung. In vielen Beispielen findet man eine homöomorphes Bild von  $\Delta(\mathcal{K})$  in einem Vektorraum  $V$  der Dimension  $\dim V < |E| = \dim \mathbb{R}E$ . Besonders interessant ist dies, falls  $E$  unendlich ist und  $V$  endliche Dimension hat. Proposition 2.2.8 erklärt eine Methode, wie man dies erreichen kann.

**Proposition 2.2.8.** *Sei  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex. Sei  $\varphi: E \rightarrow V$  eine Abbildung von der Menge der Ecken in einen Vektorraum  $V$  und sei  $\widehat{\varphi}: \mathbb{R}E \rightarrow V$  ihre eindeutige lineare Erweiterung. Sind die drei Bedingungen*

- $\widehat{\varphi}|_{\Delta(\mathcal{K})}$  ist injektiv;
- $V$  ist endlichdimensional;
- die (automatisch abgeschlossene) Überdeckung  $\widehat{\varphi}(\Delta(\mathcal{K})) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \text{konv}(\varphi(\sigma))$  ist lokal-endlich (siehe [Sch20, Aufgabe 2.4.18])

erfüllt, so restringiert  $\widehat{\varphi}$  zu einem Homöomorphismus

$$(2.2.2) \quad \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\varphi}(\Delta(\mathcal{K}))$$

auf sein Bild.

**2.2.9.** Die Behauptungen in den Beispielen (a) und (b) in 2.1.11 folgen sofort aus Proposition 2.2.8.

*Beweis.* Die Stetigkeit der Abbildung (2.2.2) ist offensichtlich, denn ihre Einschränkung auf jedes  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$  ist offensichtlich stetig (denn die lineare Abbildung  $\mathbb{R}\sigma \rightarrow V$  zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen ist stetig). Auf Grund der ersten Bedingung ist unsere Abbildung bijektiv; die Stetigkeit der Umkehrabbildung folgt dann sofort aus [Sch20, Aufgabe 2.4.18] und der Definition der Topologie auf  $\Delta(\mathcal{K})$ , denn  $\widehat{\varphi}$  bildet das Kompaktum  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$  homöomorph auf den Hausdorff-Raum  $\text{konv}(\varphi(\sigma))$  ab nach [Sch20, Satz 2.7.15].<sup>9</sup>  $\square$

<sup>8</sup>Um Missverständnissen vorzubeugen: Sie ist auch die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\Delta(\mathcal{L}) \subset \Delta(\mathcal{K})$ , wobei  $\mathcal{L}$  alle Unterkomplexe von  $\mathcal{K}$  durchläuft.

<sup>9</sup>Vielleicht ist die folgende Formulierung verständlicher: Die dritte Bedingung besagt nach Aufgabe 2.4.18, dass  $\widehat{\varphi}(\Delta(\mathcal{K}))$  die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\text{konv}(\varphi(\sigma)) \subset \widehat{\varphi}(\Delta(\mathcal{K}))$  trägt. Analog trägt per Definition  $\Delta(\mathcal{K})$  die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \Delta(\mathcal{K})$ . Nun folgt die Behauptung daraus, dass die Bijektion  $\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \widehat{\varphi}(\Delta(\mathcal{K}))$  die Teilmenge  $\Delta(\mathcal{K})_\sigma$  homöomorph auf  $\text{konv}(\varphi(\sigma))$  abbildet.

**Aufgabe 2.2.10.** Wir verwenden die Notation aus Proposition 2.2.8.

- (a) Für jedes  $q \in \mathbb{N}$  und jeden  $q$ -Simplex  $\sigma = \{e_0, \dots, e_q\} \in \mathcal{K}_q$  gilt:  $\widehat{\varphi}|_{\text{konv}(\sigma)}$  ist genau dann injektiv, wenn das  $(q+1)$ -Tupel  $(\varphi(e_0), \dots, \varphi(e_q))$  affin unabhängig ist.  
Hinweis: Eventuell einfacher mit der symmetrischen Definition der affinen Unabhängigkeit in Definition 2.1.1.
- (b) Die Injektivität von  $\widehat{\varphi}|_{\Delta(\mathcal{K})}$  ist äquivalent dazu, dass die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:
- (i) Für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  und jeden  $q$ -Simplex  $\sigma = \{e_0, \dots, e_q\} \in \mathcal{K}_q$  ist das  $(q+1)$ -Tupel  $(\varphi(e_0), \dots, \varphi(e_q))$  affin unabhängig.
  - (ii) Es gilt  $\text{konv}(\varphi(\sigma)) \cap \text{konv}(\varphi(\tau)) = \text{konv}(\varphi(\sigma \cap \tau))$  für alle Simplizes  $\sigma, \tau \in \mathcal{K}$ .

Ende der 2. Vorlesung am 30.10.2020.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 2.2.10
- (2) [Sch20, Aufgabe 2.4.18]
- (3) Lies [Sch20, Appendix A] und stelle Fragen, wenn irgendetwas unklar ist (etwa Details in A.2.3, Beispiel A.2.9, Beispiel A.2.14 oder A.2.15). Melde alle Fehler.
- (4) Lies Definition A.0.2 und löse Aufgabe A.0.3.

**Proposition 2.2.11.** Sei  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex. Dann ist  $\Delta(\mathcal{K})$  ein Hausdorffraum.

**2.2.12.** Mit etwas mengentheoretischer Topologie (Satz von Tietze [vQ79, 7.7 Satz]) kann man zeigen, dass  $\Delta(\mathcal{K})$  ein normaler Hausdorffraum ist; der Leser sei dafür auf [Spa81, Theorem 3.1.17] verwiesen, wo die geometrische Realisierung  $\Delta(\mathcal{K})$  als  $|\mathcal{K}|$  notiert wird.

*Beweis.* Der Vektorraum  $\mathbb{R}E$  wird durch

$$\langle f, g \rangle = \sum_{e \in E} f(e)g(e)$$

zu einem Skalarproduktraum (im Allgemeinen ist dies kein Hilbertraum, etwa für  $E$  abzählbar unendlich, was für uns aber unerheblich ist). Wir erhalten eine induzierte Norm, Metrik und Topologie auf  $\mathbb{R}E$ . Da  $\mathbb{R}E$  mit dieser Topologie ein Hausdorffraum ist, genügt es zu zeigen, dass die Inklusion  $\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}E$  eine stetige Abbildung ist. Dafür ist äquivalent zu zeigen, dass für jedes  $\sigma \in \mathcal{K}$  die Inklusion  $\Delta(\sigma) = \Delta(\mathcal{K})_\sigma \subset \mathbb{R}E$  stetig ist. Dies ist aber klar, da diese Abbildung als  $\Delta(\sigma) \subset \mathbb{R}\sigma \subset \mathbb{R}E$  faktorisiert und die natürliche Topologie auf  $\mathbb{R}\sigma$  durch die Einschränkung unseres obigen Skalarprodukts definiert werden kann.  $\square$

**2.2.13.** Wir bereiten nun den Beweis von Proposition 2.2.15 vor. Seien  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex und  $\sigma \in \mathcal{K}$  ein Simplex. Wir erinnern an den abgeschlossenen vollen Simplex

$$\Delta(\sigma) = \Delta(\mathcal{K})_\sigma = \{f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid \text{Supp}(f) \subset \sigma\} \subset \Delta(\mathcal{K}).$$

und definieren nun sein „Inneres“

$$(2.2.3) \quad \Delta(\sigma)' := \{f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid \text{Supp}(f) = \sigma\} = \{f \in \Delta(\sigma) \mid f(e) \neq 0 \text{ für alle } e \in \sigma\} \subset \Delta(\sigma).$$

Offensichtlich entsteht  $\Delta(\sigma)'$  aus  $\Delta(\sigma)$  durch Entfernen aller echten (abgeschlossenen) Seitenflächen  $\Delta(\tau)$  für alle  $\tau \subsetneq \sigma$  und ist offen in  $\Delta(\sigma)$  (aber im Allgemeinen nicht offen in  $\Delta(\mathcal{K})$ ). Deswegen wird  $\Delta(\sigma)'$  als **offener Simplex zu  $\sigma$**  bezeichnet. Offensichtlich ist  $\Delta(\mathcal{K})$  die disjunkte Vereinigung der offenen Simplizes, in Formeln

$$\Delta(\mathcal{K}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \Delta(\sigma)'.$$

**Lemma 2.2.14.** Seien  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex und  $A \subset \Delta(\mathcal{K})$  eine Teilmenge, so dass für alle Simplizes  $\sigma \in \mathcal{K}$  der Schnitt  $A \cap \Delta(\sigma)'$  endlich ist. Dann ist  $A$  abgeschlossen in  $\Delta(\mathcal{K})$  und trägt die diskrete Topologie.

*Beweis.* Für beliebiges  $\sigma \in \mathcal{K}$  ist  $\Delta(\sigma)$  die endliche disjunkte Vereinigung aller  $\Delta(\tau)'$  mit  $\tau \subset \sigma$ . Laut Annahme besteht  $\Delta(\sigma) \cap A$  also nur aus endlich vielen Elementen und ist somit abgeschlossen in  $\Delta(\sigma)$ . Also ist  $A$  abgeschlossen in  $\Delta(\mathcal{K})$ . Ersetzen wir in diesem Argument  $A$  durch eine beliebige Teilmenge  $A' \subset A$ , so zeigt dies, dass jede Teilmenge  $A'$  von  $A$  abgeschlossen in  $\Delta(\mathcal{K})$  und damit in  $A$  ist. Also trägt  $A$  die diskrete Topologie.  $\square$

**Proposition 2.2.15** ([Spa81, Corollary 3.1.19]). Sind  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex und  $K \subset \Delta(\mathcal{K})$  eine kompakte<sup>10</sup> Teilmenge, so gibt es einen endlichen Unterkomplex  $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$  mit  $K \subset \Delta(\mathcal{L})$ .

*Beweis.* Für jeden Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}$  mit  $K \cap \Delta(\sigma)' \neq \emptyset$  wähle man einen Punkt  $p_\sigma \in K \cap \Delta(\sigma)'$ . Sei  $A \subset K$  die Menge aller so gewählten Punkte. Dann ist  $A$  nach Lemma 2.2.14 eine abgeschlossene Teilmenge von  $\Delta(\mathcal{K})$  – dann auch von  $K$  und ist somit kompakt – und trägt die diskrete Topologie. Also ist  $A$  endlich. Die Behauptung folgt sofort.  $\square$

**Korollar 2.2.16** ([Spa81, Corollary 3.1.20]). Ein Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  ist genau dann endlich, wenn  $\Delta(\mathcal{K})$  kompakt ist.

*Beweis.* Ist  $\mathcal{K}$  endlich, so ist  $\Delta(\mathcal{K})$  als endliche Vereinigung endlich vieler kompakter, abgeschlossener voller Simplexes quasi-kompakt, wegen Proposition 2.2.11 Hausdorff und somit kompakt.

Die umgekehrte Implikation folgt aus Proposition 2.2.15.  $\square$

**Definition 2.2.17.** Eine **Triangulierung** eines topologischen Raums  $X$  ist ein Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  zusammen mit einem Homöomorphismus  $f: \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} X$ . Ein topologischer Raum  $X$  heißt **triangulierbar**, falls es eine solche Triangulierung gibt.

**2.2.18.** Ein kompakter topologischer Raum  $X$  ist genau dann triangulierbar, wenn es einen *endlichen* Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  mit  $X \cong \Delta(\mathcal{K})$  gibt. Dies folgt sofort aus Korollar 2.2.16.

### Beispiele 2.2.19.

- (a) Triangulierungen von  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$  haben wir in den Beispielen (a) und (b) in 2.1.11 informell kennengelernt. Dass es sich dabei wirklich um Triangulierungen im Sinne von Definition 2.2.17 handelt, haben wir in 2.2.9 gesehen.
- (b) Um die Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  zu triangulieren, benötigt man mindestens drei 1-Simplizes. (Warum geht es nicht mit zwei 1-Simplizes?)
- (c) Die abgeschlossene Kreisscheibe  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  hat eine offensichtliche „Triangulierung durch einen  $n$ -Simplex“, denn sie ist homöomorph zu einem vollen  $n$ -Simplex (per stereographischer Projektion).
- (d) Sphäre  $\mathbb{S}^n$ : Trianguliere durch die Seiten des  $(n+1)$ -Simplex.  
Es gibt natürlich viele andere Triangulierungen, etwa Kugeloberfläche  $\mathbb{S}^2$  in 8 Dreiecke zerteilen etc.
- (e) Zweitorus  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .  
Stellt man sich  $\mathbb{T}^2$  als Quadrat mit identifizierten gegenüberliegenden Seiten vor, warum ist die Zerlegung in vier gleich große Quadrate, die wiederum in zwei Dreiecke zerschnitten werden, keine Triangulierung?  
Schneidet man dieses Quadrat in neun gleich große Quadrate und zerschneidet diese in je zwei Dreiecke, so ist es eine Triangulierung mit 18 Dreiecken.  
Aufgabe: Finde eine Triangulierung mit 14 Dreiecken (und 21 Kanten und 7 Ecken) – laut Internet/Literatur geht es nicht besser.
- (f) Für Bilder und weitere Informationen (welche Mannigfaltigkeiten sind triangulierbar?) siehe [Wik20, [Triangulation \(topology\)](#)].

### 2.3. Simpliciale Abbildungen.

**Definition 2.3.1.** Gegeben zwei Simplizialkomplexe  $(E, \mathcal{K})$  und  $(F, \mathcal{L})$  ist eine **simpliciale Abbildung**  $\varphi: (E, \mathcal{K}) \rightarrow (F, \mathcal{L})$  eine Abbildung  $\varphi: E \rightarrow F$  von Mengen mit  $\varphi(\sigma) \in \mathcal{L}$  für alle  $\sigma \in \mathcal{K}$ . Äquivalent ist die Forderung: Die induzierte Abbildung  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$  auf den Potenzmengen bildet  $\mathcal{K}$  nach  $\mathcal{L}$  ab.

*Warnung 2.3.2.* Wir fordern nicht, dass eine simpliciale Abbildung  $q$ -Simplizes auf  $q$ -Simplizes abbildet. Ein 3-Simplex etwa kann auf einen 1-Simplex abgebildet werden – umgekehrt geht dies aber offensichtlich nicht.

**2.3.3.** Simplizialkomplexe und simpliciale Abbildungen bilden in offensichtlicher Weise eine Kategorie. Wie notieren diese als  $\text{SimpKomp}$ . Morphismen in  $\text{SimpKomp}$ , also simpliciale Abbildungen, werden auch Morphismen von Simplizialkomplexen genannt.

<sup>10</sup>Wegen Proposition 2.2.11 sind hier die Begriffe *kompakt* und *quasi-kompakt* gleichbedeutend.

**2.3.4.** Sind  $(E, \mathcal{K})$  und  $(F, \mathcal{L})$  Simplizialkomplexe, so ist eine Abbildung  $E \rightarrow F$  modulo der Isomorphismen  $E \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_0$  und  $F \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_0$  aus 2.1.8 dasselbe wie eine Abbildung  $\mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$ . Deswegen kann man eine simpliziale Abbildung  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L} = (F, \mathcal{L})$  äquivalent durch eine Abbildung  $\mathcal{K}_0 \rightarrow \mathcal{L}_0$  festlegen. Dies wird vor allem dann nützlich sein, wenn wir unsere Simplizialkomplexe als  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  (ohne Angabe der Eckenmengen) notieren.

**Beispiel 2.3.5.** Unterkomplexe sind „dasselbe“ wie simpliziale Abbildungen, die injektiv auf den Eckenmengen sind: Ein Unterkomplex  $(F, \mathcal{L}) \subset (E, \mathcal{K})$  eines Simplizialkomplexes liefert in offensichtlicher Weise eine simpliziale Abbildung  $(F, \mathcal{L}) \rightarrow (E, \mathcal{K})$  mit  $F \rightarrow E$  injektiv. Ist umgekehrt  $\varphi: (F, \mathcal{L}) \rightarrow (E, \mathcal{K})$  eine simpliziale Abbildung mit  $\varphi: F \rightarrow E$  injektiv, so ist  $(\varphi(F), \varphi(\mathcal{L})) \subset (E, \mathcal{K})$  ein zu  $(F, \mathcal{L})$  isomorpher Unterkomplex, wobei  $\varphi(\mathcal{L}) = \{\varphi(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{L}\}$ .

**Lemma 2.3.6.** Sei  $\varphi: (E, \mathcal{K}) \rightarrow (F, \mathcal{L})$  eine simpliziale Abbildung. Dann restringiert die induzierte lineare Abbildung  $\mathbb{R}E \rightarrow \mathbb{R}F$  zwischen den freien Vektorräumen zu einer stetigen Abbildung

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi): \Delta(\mathcal{K}) &\rightarrow \Delta(\mathcal{L}), \\ f = \sum t_e e &\mapsto (\Delta(\varphi))(f) = \sum t_e \varphi(e), \end{aligned}$$

zwischen den geometrischen Realisierungen.

Somit kann  $\Delta$  als Funktor  $\Delta: \text{SimpKomp} \rightarrow \text{Top}$  von der Kategorie der Simplizialkomplexe in die Kategorie der topologischen Räume aufgefasst werden.

*Beweis.* Die Verknüpfung  $E \xrightarrow{\varphi} F \subset \mathbb{R}F$  erweitert eindeutig zu einer linearen Abbildung  $\mathbb{R}E \rightarrow \mathbb{R}F$ . Diese ist explizit durch  $\sum_{e \in E} t_e e \mapsto \sum_{e \in E} t_e \varphi(e) = \sum_{f \in F} (\sum_{e \in \varphi^{-1}(f)} t_e) f$  gegeben (endliche Summen). Sie bildet die Menge  $\Delta(\mathcal{K})$  nach  $\Delta(\mathcal{L})$  ab und liefert so die gesuchte Abbildung  $\Delta(\varphi)$  von Mengen. Um zu zeigen, dass letztere stetig ist, betrachte man für jedes  $\sigma \in \mathcal{K}$  das offensichtliche kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Delta(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\Delta(\varphi)} & \Delta(\mathcal{L}) \\ \cup & & \cup \\ \Delta(\sigma) & \longrightarrow & \Delta(\varphi(\sigma)) \end{array}$$

(seine untere Horizontale ist wohldefiniert und surjektiv). Die rechte Inklusion ist stetig, da sie eine der Abbildungen ist, die die Topologie auf  $\Delta(\mathcal{L})$  definieren. Die untere Horizontale ist offensichtlich stetig, da sie von der offensichtlichen linearen Abbildung  $\mathbb{R}\sigma \rightarrow \mathbb{R}\varphi(\sigma)$  zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen herkommt. Damit ist die Abbildung  $\Delta(\sigma) \rightarrow \Delta(\mathcal{L})$  stetig. Da  $\sigma \in \mathcal{K}$  beliebig war, bedeutet dies nach der universellen Eigenschaft der Finaltopologie ([Sch20, Satz 2.8.35], dass  $\Delta(\varphi)$  stetig ist.  $\square$

## 2.4. Simpliziale Homologie.

**2.4.1.** In diesem Kapitel definieren wir auf rein kombinatorische Weise die *simpliziale Homologie* eines Simplizialkomplexes  $\mathcal{K}$ ; dazu wird die geometrische Realisierung  $\Delta(\mathcal{K})$  nicht benötigt. Später werden wir jedoch zeigen, dass die simpliziale Homologie von  $\mathcal{K}$  mit der singulären Homologie von  $\Delta(\mathcal{K})$  übereinstimmt (Satz 4.8.18).

*Erinnerung 2.4.2* (freier  $R$ -Modul; Analogon zu Erinnerung 2.2.1 mit  $\mathbb{R}$ -Vektorraum alias  $\mathbb{R}$ -Modul ersetzt durch  $R$ -Modul). Sei  $R$  ein beliebiger Ring (etwa  $\mathbb{Z}$ ). Ist  $E$  eine Menge, so bezeichnen wir mit  $RE$  den  $R$ -Modul aller Abbildungen  $f: E \rightarrow R$  mit endlichem Träger. Ähnlich wie in Erinnerung 2.2.1 fassen wir  $E$  als Teilmenge von  $RE$  auf und können dann jedes Element von  $RE$  als  $R$ -Linearkombinationen  $\sum_{e \in E} a_e e$  mit  $a_e \in R$  schreiben (vgl. Fußnote 4). Hier bei sind die Koeffizienten  $a_e \in R$  eindeutig bestimmt – mit anderen Worten bildet  $E$  eine  $R$ -Basis von  $RE$ .

Morphismen von  $R$ -Moduln (alias  $R$ -lineare Abbildungen)  $RE \rightarrow M$  in einen beliebigen  $R$ -Modul  $M$  sind eindeutig durch ihre Einschränkung auf  $E \subset RE$  bestimmt und definierbar, in Formeln definiert Restriktion eine Bijektion

$$\text{Mod}_R(RE, M) \xrightarrow{\sim} \text{Set}(E, M).$$

Man nennt  $RE$  (zusammen mit  $E \subset RE$ ) den **freien  $R$ -Modul über  $E$** . Die obige Bijektion kodiert seine universelle Eigenschaft.

Speziell für  $R = \mathbb{Z}$  erhält man den freien  $\mathbb{Z}$ -Modul  $\mathbb{Z}E$  über  $E$ . Dieser wird meist **freie abelsche Gruppe über  $E$**  genannt, denn  $\mathbb{Z}$ -Moduln sind dasselbe wie abelsche Gruppen und  $\mathbb{Z}$ -lineare Abbildungen sind dasselbe wie Morphismen abelscher Gruppen (= Homomorphismen abelscher Gruppen); mit anderen Worten stimmen die Kategorien  $\text{Ab}$  der abelschen Gruppen und  $\text{Mod}(\mathbb{Z})$  der  $\mathbb{Z}$ -Moduln überein, in Formeln  $\text{Ab} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$ .

**Beispiel 2.4.3.** Jedes Element der freien abelschen Gruppe  $\mathbb{Z}\{a, b, c\}$  kann eindeutig als  $xa + yb + zc$  mit  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  geschrieben werden. Wer mag, kann dies auch als  $x\underline{a} + y\underline{b} + z\underline{c}$  schreiben, also allgemein die Inklusion  $E \subset \mathbb{Z}E$  als  $e \mapsto \underline{e}$  schreiben. Insbesondere ist solch eine Notation nötig, wenn man etwa die freie abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}V$  über einem Vektorraum  $V$  betrachtet, denn sonst ist nicht klar, ob  $3v$  als  $3 \cdot v = v + v + v$  (Skalarmultiplikation bzw. Addition in der abelschen Gruppe  $V$ ) oder als  $3\underline{v}$  zu verstehen ist.

**Definition 2.4.4.** Sei  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex. Sei  $\leq$  eine Ordnung (= totale Ordnung) auf der Eckenmenge  $E$  (ist  $E$  endlich, so kann man sich die Ecken von 1 bis  $n := |E|$  durchnummeriert vorstellen).<sup>11</sup>

Sei  $q \geq 0$  eine natürliche Zahl. Wir definieren

$$(2.4.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} &:= \{s: \{0, \dots, q\} \rightarrow E \text{ streng monoton} \mid (\text{im } s) \in \mathcal{K}\} \\ &= \{(s_0, \dots, s_q) \in E^{q+1} \mid s_0 < s_1 < \dots < s_q \text{ und } \{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}_q\}. \end{aligned}$$

<sup>12</sup> Für  $q < 0$  setzen wir  $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} := \emptyset$ .

Sei  $q \geq 1$ . Der eindeutige Morphismus

$$\partial = \partial_q = \partial_q^{\text{st-mono}}: \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}^{\text{st-mono}}$$

abelscher Gruppen zwischen den freien abelschen Gruppen über den Mengen der „streng monotonen“  $q$ -Simplizes bzw.  $(q-1)$ -Simplizes mit

$$(2.4.2) \quad \partial((s_0, \dots, s_q)) = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q)$$

für alle  $(s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}$  heißt  **$q$ -ter Randoperator zur Eckenordnung  $\leq$** , wobei das Hütchen als Tarnkappe über  $s_i$  andeutet, dass dieses Element weggelassen wird.

Für  $q \leq 0$  sei  $\partial = \partial_q^{\text{st-mono}} := 0: \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}^{\text{st-mono}} = \mathbb{Z}\emptyset = \{0\}$  die Nullabbildung.

**2.4.5.** In Appendix B sind einige Grundbegriffe der homologischen Algebra erklärt, die wir im Folgenden verwenden. Vom Leser wird erwartet, dass er diesen Appendix soweit nötig parallel zum aktuellen Abschnitt liest. Beim ersten Lesen empfehlen wir, sich auf den Fall  $R = \mathbb{Z}$  und somit  $\text{Mod}(\mathbb{Z}) = \text{Ab}$  zu beschränken. Zur Erleichterung des parallelen Lesens versuchen wir, beim ersten Auftreten jedes homologischen Begriffs im aktuellen Abschnitt einen Verweis auf die entsprechende Stelle im Appendix anzugeben.

Wir hoffen, dass diese Trennung algebraischer und topologischer Begriffe strukturelle Klarheit schafft. Historisch gesehen sind viele Begriffe aus der homologischen Algebra (*Zykel, Rand, Homotopie, ...*) topologisch motiviert.

**Proposition 2.4.6.** Sei  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex und sei  $\leq$  eine Ordnung auf  $E$ . Dann ist das Diagramm

$$(2.4.3) \quad \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} := (\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}, \partial) := \left( \dots \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_0=0} \underbrace{\mathbb{Z}\mathcal{K}_{-1}}_{=\{0\}} \rightarrow \dots \right)$$

ein Komplex abelscher Gruppen (= Komplex von  $\mathbb{Z}$ -Moduln) im Sinne der Definition B.1.1.

**2.4.7.** Proposition 2.4.6 besagt, dass jeder Simplicialkomplex zusammen mit einer Ordnung auf der Eckenmenge einen Komplex abelscher Gruppen liefert. Auch wenn hier zweimal das Wort *Komplex* auftaucht, sind die mathematischen Bedeutungen grundverschieden.

<sup>11</sup>Statt mit einer Ordnung könnten wir auch mit einer partiellen Ordnung, die auf jedem Simplex von  $\mathcal{K}$  zu einer (totalen) Ordnung restringiert, arbeiten.

<sup>12</sup>Die Zuordnung  $(s_0, \dots, s_q) \mapsto \{s_0, \dots, s_q\}$  liefert eine Bijektion  $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_q$ , denn für jedes  $\sigma \in \mathcal{K}_q$  gibt es Elemente  $s_0, \dots, s_q \in E$  mit  $\sigma = \{s_0, \dots, s_q\}$ , welche eindeutig bestimmt sind, wenn wir zusätzlich  $s_0 < s_1 < \dots < s_q$  verlangen.

*Beweis.* Zu zeigen ist  $\partial \circ \partial = 0$  oder genauer  $\partial_{q-1}^{\text{st-mono}} \circ \partial_q^{\text{st-mono}} = 0$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$ . Für  $q \leq 1$  ist dies trivial. Gelte  $q \geq 2$ . Sei  $\sigma = (s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}$  beliebig. Wegen der universellen Eigenschaft freier abelscher Gruppen genügt es,

$$\partial(\partial(\sigma)) = 0$$

zu zeigen. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
(2.4.4) \quad \partial(\partial(\sigma)) &= \partial \left( \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \right) \\
&= \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \partial((s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q)) \\
&= \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i \left( \sum_{0 \leq j < i} (-1)^j (s_0, \dots, \widehat{s}_j, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i < j \leq q} (-1)^{j-1} (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, \widehat{s}_j, \dots, s_q) \right) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (s_0, \dots, \widehat{s}_j, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \\
&\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j-1} (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, \widehat{s}_j, \dots, s_q) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

**Beispiel 2.4.8.** Betrachte den Simplicialkomplex  $(E, \mathcal{K})$  mit Ecken  $1, 2, 3$  und 1-Simplizes  $\{2, 3\}$ ,  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 2\}$  und 0-Simplizes  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ ,  $\{3\}$  (und keinen weiteren Simplizes). (Seine geometrische Realisierung ist homöomorph zum Rand eines Dreiecks, also zu  $S^1$ .) Nimm die offensichtliche Ordnung auf  $E = \{1, 2, 3\}$ . Der Komplex  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$  lebt dann nur in den Graden 1, 0 und ist somit durch die beiden Komponenten in diesen Graden und das sie verbindende Differential

$$\begin{aligned}
(2.4.5) \quad \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{st-mono}} &= \mathbb{Z}(2, 3) \oplus \mathbb{Z}(1, 3) \oplus \mathbb{Z}(1, 2) \xrightarrow{\partial_1^{\text{st-mono}}} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}} = \mathbb{Z}(1) \oplus \mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(3), \\
(2, 3) &\mapsto (3) - (2), \\
(1, 3) &\mapsto (3) - (1), \\
(1, 2) &\mapsto (2) - (1),
\end{aligned}$$

eindeutig bestimmt.

**2.4.9.** Die Wahl der Ordnung  $\leq$  in Definition 2.4.4 ist etwas unbefriedigend und läßt sich in der Tat vermeiden, wie wir in Proposition 2.4.21 sehen werden.

Ende der 3. Vorlesung am 05.11.2020.

**Definition 2.4.10.** Sei  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex. Für  $q \geq 0$  setzen wir<sup>13</sup>

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_q^{\text{ang}} &:= \{s: \{0, \dots, q\} \rightarrow E \text{ injektiv} \mid (\text{im } s) \in \mathcal{K}\} \\
&= \{s: \{0, \dots, q\} \rightarrow E \mid (\text{im } s) \in \mathcal{K}_q\} \\
&= \{(s_0, \dots, s_q) \in E^{q+1} \mid \{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}_q\}.
\end{aligned}$$

<sup>13</sup> Im Hinblick auf meine späteren Notationen  $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{bel}}$  und  $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}$  wäre hier eigentlich  $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}}$  angebracht!

Elemente dieser Menge heißen **angeordnete  $q$ -Simplizes**.<sup>14</sup> Definiere

$$(2.4.6) \quad S_q \mathcal{K} := \frac{\mathbb{Z} \mathcal{K}_q^{\text{ang}}}{\langle s \circ \pi - \text{sgn}(\pi) s \mid s \in \mathcal{K}_q^{\text{ang}}, \pi \in \text{Sym}(\{0, \dots, q\}) \rangle}$$

$$= \frac{\mathbb{Z} \mathcal{K}_q^{\text{ang}}}{\langle (s_{\pi(0)}, \dots, s_{\pi(q)}) = \text{sgn}(\pi)(s_0, \dots, s_q) \mid (s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{ang}}, \pi \in \text{Sym}(\{0, \dots, q\}) \rangle}$$

als Quotient der freien abelschen Gruppe über allen angeordneten  $q$ -Simplizes modulo der angegebenen Relation: Zwei angeordnete Simplizes, die sich nur in der Reihenfolge der Ecken um eine Permutation  $\pi$  unterscheiden, werden bis auf den Faktor  $\text{sgn}(\pi) \in \{\pm 1\}$  miteinander identifiziert.

Die (abelsche) Gruppe  $S_q \mathcal{K}$  heißt die (abelsche) **Gruppe der  $q$ -Simplizialketten von  $\mathcal{K}$** .

Für  $q < 0$  setze  $S_q \mathcal{K} := \{0\}$ .

**2.4.11.** Erkläre angeordnete Simplizes durch Bilder (0-Simplizes als Punkte, 1-Simplizes als Segmente mit Richtung, 2-Simplizes als Dreieck mit Pfeil, der die Anordnung wiedergibt, 3-Simplizes ähnlich).

Dann erkläre Relation: 2-Simplex  $\{a, b, c\} \in \mathcal{K}_2$  liefert 6 angeordnete 2-Simplizes  $(a, b, c)$ ,  $(b, c, a)$ ,  $(c, a, b)$ ,  $(a, c, b)$ ,  $(b, a, c)$ ,  $(c, b, a)$ .

Die ersten drei werden gleich in  $S_3 \mathcal{K}$ , ebenso die letzten drei: Dort gilt  $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b) = -(a, c, b) = -(b, a, c) = -(c, b, a)$ . Wer mag, kann dies genauer als  $(a, b, c) = (b, c, a) = \dots = -(c, b, a)$  schreiben.

Veranschauliche durch Dreieck mit kreisförmigen Pfeil; zwei Drehsinne, unterscheiden sich um Vorzeichen.

**Beispiel 2.4.12.** Für den Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  aus Beispiel 2.4.8 gilt

$$S_1 \mathcal{K} = \frac{\mathbb{Z}(2, 3) \oplus \mathbb{Z}(3, 2) \oplus \mathbb{Z}(1, 3) \oplus \mathbb{Z}(3, 1) \oplus \mathbb{Z}(1, 2) \oplus \mathbb{Z}(2, 1)}{\langle (2, 3) = -(3, 2), (1, 3) = -(3, 1), (1, 2) = -(2, 1) \rangle} = \mathbb{Z}(2, 3) \oplus \mathbb{Z}(1, 3) \oplus \mathbb{Z}(1, 2),$$

was so wie  $\mathbb{Z} \mathcal{K}_1^{\text{st-mono}}$  aussieht (jedoch brauchen wir nun keine Ordnung auf  $E$ ).

**2.4.13.** Eine  $q$ -Simplizialkette ist eine  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination angeordneter Simplizes modulo der Relationen, die wir herausgeteilt haben.

Der Begriff *Kette* kommt vermutlich daher, dass eine Kombination mehrerer (orientierter) Segmente alias (angeordneter) 1-Simplizes (oder genauer deren geometrischer Realisierungen) ein kettenähnliches Gebilde im üblichen Sprachgebrauch ergibt.

**2.4.14.** Allgemeiner gilt für je zwei angeordnete  $q$ -Simplizes  $s, t \in \mathcal{K}_q^{\text{ang}}$  mit  $(\text{im } s) = (\text{im } t)$  im Quotienten  $S_q \mathcal{K}$  (entweder)  $s = t$  oder  $s = -t$ . Im Fall  $q = 0$  gilt für solche Simplizes stets  $s = t$ .

**Proposition 2.4.15.** Sei  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex.

(a) Sei  $q \geq 1$ . Die Abbildung

$$(2.4.7) \quad \mathcal{K}_q^{\text{ang}} \rightarrow \mathbb{Z} \mathcal{K}_{q-1}^{\text{ang}},$$

$$(s_0, \dots, s_q) \mapsto \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q)$$

erweitert eindeutig zu einem Morphismus  $\mathbb{Z} \mathcal{K}_q^{\text{ang}} \rightarrow \mathbb{Z} \mathcal{K}_{q-1}^{\text{ang}}$  abelscher Gruppen und induziert weiter einen Morphismus

$$(2.4.8) \quad \partial = \partial_q: S_q \mathcal{K} \rightarrow S_{q-1} \mathcal{K}$$

abelscher Gruppen, den sogenannten **Randoperator**.

(b) Das Diagramm

$$(2.4.9) \quad SK = (SK, \partial) := \left( \dots \rightarrow S_2 \mathcal{K} \xrightarrow{\partial_2} S_1 \mathcal{K} \xrightarrow{\partial_1} S_0 \mathcal{K} \xrightarrow{\partial_0} \underbrace{S_{-1} \mathcal{K}}_{=\{0\}} \xrightarrow{\partial_{-1}} \underbrace{S_{-2} \mathcal{K}}_{=\{0\}} \rightarrow \dots \right)$$

ist ein Komplex abelscher Gruppen, wobei  $\partial_q := 0$  für alle  $q \leq 0$  gilt. Dieser Komplex heißt **Komplex der Simplizialketten**.

<sup>14</sup> Die Abbildung  $\mathcal{K}_q^{\text{ang}} \rightarrow \mathcal{K}_q$ ,  $s = (s_0, \dots, s_q) \mapsto (\text{im } s) = \{s_0, \dots, s_q\}$ , vergisst die Anordnung.

**2.4.16.** Erkläre Randoperator bildlich: Dreieck mit Uhrzeiger-Drehsinn bzw. Dreieck mit Gegenuhrzeiger-drehsinn werden auf die Kette ... bzw. deren Negatives abgebildet.

Gibt auch gleich Beispiel für Zykel: orientierter Dreiecksrand und illustriert damit  $\partial^2 = 0$ .

*Beweis.* (a) Da die symmetrische Gruppe  $\text{Sym}(\{0, \dots, q\})$  von den Transpositionen benachbarter Elemente erzeugt wird, genügt es zu zeigen, dass sich die Bilder von  $(s_0, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, s_q)$  und  $(s_0, \dots, s_{j+1}, s_j, \dots, s_q)$  unter der Verknüpfung  $\mathcal{K}_q^{\text{ang}} \xrightarrow{(2.4.7)} \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}} \rightarrow S_q\mathcal{K}$  um den Faktor  $(-1)$  unterscheiden; dabei ist  $j \in \{0, \dots, q-1\}$  beliebig. Das Bild von  $(s_0, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, s_q)$  ist aber

$$\sum_{0 \leq i < j} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, s_q) + (-1)^j (s_0, \dots, \widehat{s}_j, s_{j+1}, \dots, s_q) + (-1)^{j+1} (s_0, \dots, s_j, \widehat{s}_{j+1}, \dots, s_q) \\ + \sum_{j+1 < i \leq q} (-1)^i (s_0, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q)$$

und das von  $(s_0, \dots, s_{j+1}, s_j, \dots, s_q)$  ist (in der folgenden Gleichung wird im zweiten Summanden „nichts vertauscht“, denn  $s_{j+1}$  ist ja schon weg – analog im dritten Summanden)

$$\sum_{0 \leq i < j} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_{j+1}, s_j, \dots, s_q) + (-1)^j (s_0, \dots, \widehat{s}_{j+1}, s_j, \dots, s_q) + (-1)^{j+1} (s_0, \dots, s_{j+1}, \widehat{s}_j, \dots, s_q) \\ + \sum_{j+1 < i \leq q} (-1)^i (s_0, \dots, s_{j+1}, s_j, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \\ = - \sum_{0 \leq i < j} (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, s_q) - (-1)^{j+1} (s_0, \dots, s_j, \widehat{s}_{j+1}, \dots, s_q) - (-1)^j (s_0, \dots, \widehat{s}_j, s_{j+1}, \dots, s_q) \\ - \sum_{j+1 < i \leq q} (-1)^i (s_0, \dots, s_j, s_{j+1}, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q).$$

(b) Zu zeigen ist  $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$ . Die Rechnung (2.4.4) zeigt aber sogar, dass jede Verknüpfung  $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-1}^{\text{ang}} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q-2}^{\text{ang}}$  Null ist.  $\square$

**Definition 2.4.17.** Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex. Indem wir Definition B.1.5 auf den Komplex  $S\mathcal{K} = (S\mathcal{K}, \partial)$  der Simplizialketten anwenden, erhalten wir diverse abelsche Gruppen. Wir nennen

- $Z_q\mathcal{K} := Z_q(S\mathcal{K}) = Z_q(S\mathcal{K}, \partial) = \ker(\partial_q : S_q\mathcal{K} \rightarrow S_{q-1}\mathcal{K})$  die (abelsche) Gruppe der  $q$ -**Simplizialzykel**;
- $B_q\mathcal{K} := B_q(S\mathcal{K}) = B_q(S\mathcal{K}, \partial) = \text{im}(\partial_{q+1} : S_{q+1}\mathcal{K} \rightarrow S_q\mathcal{K})$  die (abelsche) Gruppe der  $q$ -**Simplizialränder** (englisch *boundaries*);
- $H_q\mathcal{K} := H_q(S\mathcal{K}, \partial) = H_q(S\mathcal{K}) = \frac{Z_q\mathcal{K}}{B_q\mathcal{K}} = Z_q\mathcal{K}/B_q\mathcal{K}$  die  $q$ -**te simpliziale Homologie(gruppe)** (ebenfalls eine abelsche Gruppe).

**2.4.18.** Wir verwenden dasselbe Symbol  $H_q$  (manchmal mit, manchmal ohne Klammern) sowohl für die  $q$ -te Homologie  $H_q A = H_q(A)$  eines Komplexes abelscher Gruppen  $A$  als auch für die  $q$ -te simpliziale Homologie  $H_q\mathcal{K} = H_q(\mathcal{K})$  eines Simplizialkomplexes und hoffen, dass dies nie zu Missverständnissen führt.

**Beispiel 2.4.19.** Male Beispiele: Rand einer 1-Kette. Schließe Kette: wird Zykel.

Male zwei homologe Zykel.

**2.4.20.** Der Leser mag sich fragen, ob zwei Simplizialkomplexe mit homöomorpher geometrischer Realisierung isomorphe simpliziale Homologie haben. Dies ist in der Tat der Fall, siehe 4.8.15.

**Proposition 2.4.21.** Sei  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex. Ist  $\leq$  eine Ordnung auf  $E$ , so ist der offensichtliche (und im Beweis erklärte) Morphismus ein Isomorphismus

$$(2.4.10) \quad \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\sim} S\mathcal{K}$$

in der Kategorie  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$  (siehe Definition B.1.10).

Insbesondere induziert dieser Isomorphismus Isomorphismen

$$(2.4.11) \quad H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}) \xrightarrow{\sim} H_q(\mathcal{K})$$

für alle  $q \in \mathbb{Z}$ , wir können also die simpliziale Homologie mit Hilfe des Komplexes  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$  ausrechnen.

*Beweis.* Sei  $q \geq 0$ . Die Inklusion  $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \mathcal{K}_q^{\text{ang}}$  erweitert zu einem (injektiven) Gruppenmorphismus  $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}}$ . Sei  $b_q$  die Verknüpfung

$$(2.4.12) \quad b_q: \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}} \rightarrow S_q\mathcal{K}.$$

Für  $q < 0$  definieren wir  $b_q := 0$  und erhalten das offensichtlich kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\partial_2^{\text{st-mono}}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\partial_1^{\text{st-mono}}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\partial_0^{\text{st-mono}}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}_{-1}^{\text{st-mono}} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow b_2 & & \downarrow b_1 & & \downarrow b_0 & & \downarrow b_{-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & S_2\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial_2} & S_1\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial_1} & S_0\mathcal{K} & \xrightarrow{\partial_0} & S_{-1}\mathcal{K} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

in Ab. Dieses Diagramm definiert den Morphismus (2.4.10). Um zu zeigen, dass er ein Isomorphismus ist, reicht es zu zeigen, dass alle  $b_q$  Isomorphismen sind (vgl. B.1.12), was für  $q < 0$  trivial ist.

Der Leser prüft aber leicht, dass der Gruppenmorphismus<sup>15</sup>

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}} &\rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}, \\ (t_0, \dots, t_q) &\mapsto \text{sgn}(\rho)(t_{\rho(0)}, \dots, t_{\rho(q)}) \end{aligned}$$

für die eindeutige Permutation  $\rho \in \text{Sym}(\{0, \dots, q\})$  mit  $t_{\rho(0)} < \dots < t_{\rho(q)}$ ,

für  $q \geq 0$  einen Morphismus  $S_q\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_q$  abelscher Gruppen induziert, welcher invers zu  $b_q$  ist.

Die letzte Aussage ist klar nach Lemma B.1.13, da  $H_q$  wie jeder Funktor Isomorphismen auf Isomorphismen abbildet.  $\square$

**2.4.22.** Sei  $\leq$  eine Ordnung auf  $E$ . Die gerade bewiesene Aussage, dass (2.4.12) ein Isomorphismus ist, besagt in anderen Worten, dass  $S_q\mathcal{K}$  eine freier  $\mathbb{Z}$ -Modul mit Basis  $((s_0, \dots, s_q))_{(s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}}$  ist. Diese  $\mathbb{Z}$ -Basis besteht aus  $|\mathcal{K}_q| = |\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}|$  Elementen (siehe Fußnote 12) Der Ausdruck für das Differential eines solchen Basiselements bezüglich der entsprechenden Basis von  $S_{q-1}\mathcal{K}$  ist durch (2.4.7) gegeben.

Statt eine Ordnung auf  $E$  zu verwenden, können wir auch so vorgehen. Für jeden  $q$ -Simplex  $\sigma$  fixieren wir ein beliebiges  $(q+1)$ -Tupel  $\vec{\sigma} = (\sigma_0, \dots, \sigma_q)$  mit  $\sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_q\}$  und fassen  $\vec{\sigma}$  als Element von  $S_q\mathcal{K}$  auf. Dann ist  $(\vec{\sigma})_{\sigma \in \mathcal{K}_q}$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $S_q\mathcal{K}$ , denn diese Basiselemente stimmen mit den zuvor erklärten Basiselementen jeweils bis auf einen Faktor  $\pm 1$  überein (vgl. 2.4.14).

**Beispiel 2.4.23** (Fortsetzung von Beispiel 2.4.8). Wir berechnen die simpliziale Homologie des Simplizialkomplexes  $(E, \mathcal{K})$  aus Beispiel 2.4.8. Nach 2.4.22 ist sie die Homologie des folgenden, in den Graden Null und Eins konzentrierten Komplexes (vgl. (2.4.5))

$$(2.4.13) \quad \begin{aligned} \dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}(2, 3) \oplus \mathbb{Z}(1, 3) \oplus \mathbb{Z}(1, 2) &\xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}(1) \oplus \mathbb{Z}(2) \oplus \mathbb{Z}(3) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \\ & (2, 3) \mapsto (3) - (2), \\ & (1, 3) \mapsto (3) - (1), \\ & (1, 2) \mapsto (2) - (1). \end{aligned}$$

Wir erhalten daraus

$$H_p(\mathcal{K}) = \begin{cases} \ker(\partial_1) & \text{falls } p = 1, \\ \text{cok}(\partial_1) & \text{falls } p = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Per Rechnung erhält man  $H_1(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}((2, 3) - (1, 3) + (1, 2)) \cong \mathbb{Z}$  und  $H_0(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$  induziert vom Aufsummieren  $a(1) + b(2) + c(3) \mapsto a + b + c$ .

<sup>15</sup>Auch wenn wir hier und in ähnlichen Situationen den Wert eines bei einer freien abelschen Gruppe startenden Gruppenmorphismus nur auf den Erzeugern angeben, verwenden wir implizit die universelle Eigenschaft der freien abelschen Gruppe und meinen die offensichtliche  $\mathbb{Z}$ -lineare Erweiterung.

**Aufgabe 2.4.24** (Simpliziale Homologie des Randes eines Quadrats). Berechne die simpliziale Homologie des folgenden Simplizialkomplexes  $(E, \mathcal{K})$ , dessen geometrische Realisierung der Rand eines Quadrats ist. Die Eckenmenge ist  $E := \{a, b, c, d\}$ , die Simplexmenge besteht aus den vier 1-Simplizes  $\{a, b\}$ ,  $\{b, c\}$ ,  $\{c, d\}$ ,  $\{d, a\}$  (alias Seiten des Quadrats) und allen nichtleeren Teilmengen dieser Simplizes.

**Aufgabe 2.4.25** (Simpliziale Homologie des Kantengebildes eines Tetraeders). Berechne die simpliziale Homologie des folgenden Simplizialkomplexes  $(E, \mathcal{K})$ , dessen geometrische Realisierung das Kantengerüst eines Tetraeders ist. Die Eckenmenge ist  $E := \{a, b, c, d\}$ , die Simplexmenge besteht aus den sechs 1-Simplizes  $\{a, b\}$ ,  $\{a, c\}$ ,  $\{a, d\}$ ,  $\{b, c\}$ ,  $\{b, d\}$ ,  $\{c, d\}$  (alias Kanten des Tetraeders) und allen einelementigen Teilmengen von  $E$ .

**Aufgabe 2.4.26.** Berechne die simpliziale Homologie des folgenden Simplizialkomplexes  $(E, \mathcal{K})$ , dessen geometrische Realisierung die Oberfläche eines Tetraeders ist, an den in einem Eckpunkt der Rand eines Dreiecks angeklebt ist - sie ist also homöomorph zur Verklebung der Kugelschale  $\mathbb{S}^2$  und der Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  in einem Punkt. Die Eckenmenge ist  $E := \{a, b, c, d, e, f\}$ , die Simplexmenge besteht aus den vier 2-Simplizes  $\{b, c, d\}$ ,  $\{a, c, d\}$ ,  $\{a, b, d\}$ ,  $\{a, b, c\}$  (alias Seiten des Tetraeders), den 1-Simplizes  $\{e, f\}$ ,  $\{a, f\}$ ,  $\{a, e\}$  (alias Seiten des Dreiecks) und allen nichtleeren Teilmengen dieser Simplizes.

**Aufgabe 2.4.27** (Funktorialität der simplizialen Homologie). Sei  $f: (E, \mathcal{K}) \rightarrow (F, \mathcal{L})$  eine simpliziale Abbildung. Die Abbildungen

$$(2.4.14) \quad S_q f: S_q \mathcal{K} \rightarrow S_q \mathcal{L},$$

$$s = (s_0, \dots, s_q) \mapsto \begin{cases} f \circ s = (f(s_0), \dots, f(s_q)) & \text{falls } f(\{s_0, \dots, s_q\}) = \{f(s_0), \dots, f(s_q)\} \in \mathcal{L}_q \\ & (\text{äquivalent: } f \circ s \text{ injektiv),} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

für  $q \in \mathbb{Z}$ , sind wohldefiniert und liefern einen Morphismus

$$(2.4.15) \quad S f := (S_q f)_{q \in \mathbb{Z}}: S \mathcal{K} \rightarrow S \mathcal{L}$$

von Komplexen.<sup>16</sup>

Damit wird  $S$  zu einem Funktor  $S: \text{SimpKomp} \rightarrow \text{Kom}(\mathbb{Z})$ . Weiter wird  $H_q: \text{SimpKomp} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z}) = \text{Ab}$  zu einem Funktor, für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  (nach Lemma B.1.13).

Ende der 4. Vorlesung am 06.11.2020.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 2.4.24
- (2) Aufgabe 2.4.25
- (3) Aufgabe B.1.14 (bei handschriftlicher Lösung bitte  $f: A \rightarrow C$  schreiben...)
- (4) Aufgabe 2.4.27

**2.4.28.** Die simpliziale Homologie eines endlichen Simplizialkomplexes kann algorithmisch berechnet werden (siehe [Mun84, Theorem 11.5]).

**Lemma 2.4.29.** Seien  $(E, \leq)$  eine nichtleere geordnete Menge und  $\mathcal{K}$  der maximale Simplizialkomplex mit Eckenmenge  $E$  (siehe 2.1.9). Dann ist

$$(2.4.16) \quad \dots \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

ein azyklischer (siehe Definition B.1.8) Komplex,<sup>17</sup> wobei  $\partial_0$  durch Aufsummieren  $\sum a_e(e) = \sum a_e e \mapsto \sum a_e$  der Koeffizienten definiert ist und  $\partial_q = \partial_q^{\text{st-mono}}$  für alle  $q > 0$  gilt.

<sup>16</sup> Man kann  $S f$  natürlich nach Wahl von Ordnungen auf  $E$  und  $F$  mit Hilfe der Isomorphismen aus Proposition 2.4.21 in einen Morphismus  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{L}^{\text{st-mono}}$  übersetzen, jedoch ist die komponentenweise Definition dieses Morphismus ziemlich hässlich. Konzeptuell ist es also vorteilhaft, mit  $S \mathcal{K}$  statt  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$  zu arbeiten. (Der potentielle Ausweg, nur „ordnungserhaltende“ simpliziale Abbildungen zu betrachten, ist zu restriktiv; nur für Inklusionen von Unterkomplexen scheint er sinnvoll.)

<sup>17</sup> Er ist sogar nullhomotop (siehe Definition B.2.4): Unser Beweis zeigt dies im Fall  $|E| < \infty$  (vgl. Fußnote 18); sonst modifiziere man den Beweis etwas (siehe Aufgabe 2.4.32) oder verwende das später bewiesene Hauptlemma der homologischen Algebra ??.

*Beweis.* Das Diagramm (2.4.16) ist ein Komplex, denn es ist eine Variation des Komplexes  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$  aus Proposition 2.4.6 (nur die Komponente im Grad -1 samt der dort ein- und ausgehenden Pfeile wurde verändert) und die Gleichheit  $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$  ist klar.

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass  $E$  endlich ist, denn ist die Aussage in diesem Fall gezeigt, so folgt sofort allgemein, dass jeder Zykel ein Rand ist (denn jeder Zykel ist eine Linearkombination endlich vieler Simplizes, deren Ecken eine endliche Teilmenge von  $E$  bilden (falls diese leer ist, ist unser Zykel Null und sicherlich ein Rand)). Sei  $v$  das unter dieser Annahme existierende kleinste Element von  $E$ . Für  $q \geq 0$  definiere

$$(2.4.17) \quad \delta = \delta_q: \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q+1}^{\text{st-mono}},$$

$$(v_0, \dots, v_q) \mapsto \begin{cases} (v, v_0, \dots, v_q) & \text{falls } v \neq v_0 \text{ (oder äquivalent } v < v_0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere  $\delta_{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}}$  durch  $\delta_{-1}(n) := n(v)$  und  $\delta_q := 0$  für  $q < -1$ .

Wir behaupten für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  die Gleichheit

$$(2.4.18) \quad \partial\delta + \delta\partial = \text{id} \quad \text{oder genauer} \quad \partial_{q+1}\delta_q + \delta_{q-1}\partial_q = \text{id}_{\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}}.$$

Für  $q < -1$  ist das trivial und für  $q = -1$  eine einfache Rechnung. Für  $q \geq 0$  verifiziert man dies, indem man für beliebiges  $(v_0, \dots, v_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}$  im Fall  $v \neq v_0$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (v_0, \dots, v_q) & \xrightarrow{\partial} & \sum_{i=0}^q (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q) \\ \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\ & & \sum_{i=0}^q (-1)^i (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q) \\ \delta \downarrow & & \\ (v, v_0, \dots, v_q) & \xrightarrow{\partial} & (v_0, \dots, v_q) - \sum_{i=0}^q (-1)^i (v, v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q) \end{array}$$

und im Fall  $v = v_0$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (v_0, \dots, v_q) & \xrightarrow{\partial} & \sum_{i=0}^q (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q) \\ \delta \downarrow & & \delta \downarrow \\ & & (v, v_1, \dots, v_q) \\ \delta \downarrow & & \\ 0 & \xrightarrow{\partial} & 0 \end{array}$$

betrachtet

Ist nun  $z$  ein beliebiger  $q$ -Zykel unseres Komplexes, so gilt

$$z = \partial(\delta(z)) + \delta(\partial(z)) = \partial(\delta(z))$$

was bedeutet, dass  $z$  der Rand von  $\delta(z)$  ist.<sup>18</sup> □

**2.4.30.** Die beiden folgenden Varianten von Lemma 2.4.29, in denen *streng monoton* durch *beliebig* bzw. *monoton* ersetzt wird (die Menge  $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}$  wird durch  $\mathcal{K}_q^{\text{bel}}$  bzw.  $\mathcal{K}_q^{\text{mono}}$  ersetzt), werden ähnlich bewiesen (siehe Beweis unten).

Seien  $E$  eine nichtleere Menge und  $\mathcal{K}$  der maximale Simplicialkomplex mit Eckenmenge  $E$ .

(a) Sei  $q \geq 0$  eine natürliche Zahl. Wir definieren (vgl. (2.4.1))

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q^{\text{bel}} &:= \{s: \{0, \dots, q\} \rightarrow E \text{ beliebige Abbildung} \mid (\text{im } s) \in \mathcal{K}\} \\ &= \{(s_0, \dots, s_q) \in E^{q+1} \mid \{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}\}. \end{aligned}$$

<sup>18</sup> Die Gleichung (2.4.18) besagt, dass der Identitätsmorphismus des Komplexes (2.4.16) nullhomotop ist, was wiederum bedeutet, dass dieser Komplex nullhomotop ist (Definition B.2.10). Jeder nullhomotope Komplex ist azyklisch nach B.2.11.

<sup>19</sup>Dann ist

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

ein azyklischer Komplex, wobei  $\partial_q$  für  $q \geq 1$  durch  $\partial_q(v_0, \dots, v_q) = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q)$  definiert ist,  $\partial_0$  das Aufsummieren der Koeffizienten ist und alle anderen Abbildungen Null sind.

(b) Sei  $\leq$  eine Ordnung auf  $E$ . Sei  $q \geq 0$  eine natürliche Zahl. Wir definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_q^{\text{mono}} &:= \{s: \{0, \dots, q\} \rightarrow E \text{ monotone Abbildung} \mid (\text{im } s) \in \mathcal{K}\} \\ &= \{(s_0, \dots, s_q) \in E^{q+1} \mid s_0 \leq \dots \leq s_q \text{ und } \{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}\}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{mono}} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{mono}} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{mono}} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

ein azyklischer Komplex, wobei  $\partial_q$  für  $q \geq 1$  durch  $\partial_q(v_0, \dots, v_q) = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i (v_0, \dots, \widehat{v}_i, \dots, v_q)$  definiert ist,  $\partial_0$  das Aufsummieren der Koeffizienten ist und alle anderen Abbildungen Null sind.<sup>20</sup>

*Beweis.* Der Beweis beider Varianten geht analog zum Beweis von Lemma 2.4.29 und ist sogar etwas einfacher: Der einzige Unterschied ist, dass wir  $\delta_q$  nun statt durch (2.4.17) einfacher durch

$$\delta_q(v_0, \dots, v_q) := (v, v_0, \dots, v_q)$$

definieren (wobei  $E$  endlich ist und  $v$  das kleinste Element von  $E$  ist).  $\square$

**Korollar 2.4.31.** Sei  $E$  eine nichtleere Menge und  $\mathcal{K}$  der maximale Simplicialkomplex mit Eckenmenge  $E$ .

(a) **Simpliziale Homologie eines maximalen Simplicialkomplexes** (dessen geometrische Realisierung ein voller Simplex ist, falls  $E$  endlich ist): Es gilt

$$H_q \mathcal{K} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) **Simpliziale Homologie eines maximalen Simplicialkomplexes ohne den topdimensionalen Simplex** (dessen geometrische Realisierung die Oberfläche eines vollen Simplex mit  $|E|$  Ecken ist, welche homöomorph zur Sphäre  $\mathbb{S}^{|E|-2}$  der Dimension  $|E| - 2$  ist): Sei  $E$  endlich mit  $|E| \geq 3$  und sei  $\mathcal{S} = \mathcal{K} \setminus \{E\}$ . Dann gilt

$$H_q \mathcal{S} \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = |E| - 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Aus dem Beweis folgt sofort: Gilt  $E = \{v_0, \dots, v_n\}$  mit paarweise verschiedenen  $v_0, \dots, v_n$ , so gilt  $H_{|E|-2} \mathcal{S} = H_{n-1} \mathcal{S} = \mathbb{Z}[\partial(v_0, \dots, v_n)]$ .*

*(Der Leser mag sich selbst überlegen, was in den Fällen  $|E| = 1, 2$  passiert; vgl. (4.5.1) in Korollar 4.7.7.)*

*Beweis.* Wegen der Isomorphismen (2.4.11) aus Proposition 2.4.21 genügt es, nach Wahl einer Ordnung  $\leq$  auf  $E$  die Homologien von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$  und  $\mathbb{Z}\mathcal{S}^{\text{st-mono}}$  auszurechnen.

Wir vergleichen den Komplex  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$  mit dem azyklischen Komplex (2.4.16) aus Lemma 2.4.29. In nichtnegativen Graden stimmen beide Komplexe überein, so dass die positive Homologie von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$  verschwindet. Die negative verschwindet eh. Exaktheit des Komplexes (2.4.16) in den Graden 0 und -1 zeigt, dass das  $\partial_0$  dieses Komplexes einen Isomorphismus

$$\frac{\mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}}}{\text{im } \partial_1} = \frac{\mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}}}{\ker \partial_0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

induziert. Die linke Seite ist aber die nullte Homologie von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ .

<sup>19</sup>Beispielsweise darf  $s_0 = \dots = s_q \in E$  gelten, dann ist  $\{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}_0$ .

<sup>20</sup>Die Komplexe in beiden Teilaufgaben sind sogar nullhomotop: Die Bemerkungen aus der Fußnote 17 in Lemma 2.4.29 gelten analog.

Analog vergleichen wir den Komplex  $\mathbb{Z}\mathcal{S}^{\text{st-mono}}$  mit dem azyklischen Komplex (2.4.16). Sei  $n := |E|$ . Beachte, dass der „topdimensionale“ Simplex  $E \in \mathcal{K}$  Dimension  $n - 1$  hat und in  $\mathcal{S}$  fehlt. In den Graden  $n, n - 1, n - 2, n - 3 \geq 0$  sind der Komplex (2.4.16) durch

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}E \xrightarrow{\partial_{n-1}} \mathbb{Z}\mathcal{K}_{n-2}^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \mathbb{Z}\mathcal{K}_{n-3}^{\text{st-mono}}$$

und der Komplex  $\mathbb{Z}\mathcal{S}^{\text{st-mono}}$  durch

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{n-2}^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \mathbb{Z}\mathcal{K}_{n-3}^{\text{st-mono}}$$

gegeben. Der Rest des Beweises ist nun offensichtlich und dem Leser überlassen.  $\square$

**Aufgabe 2.4.32** (Wie man im Beweis von Lemma 2.4.29 die Annahme, dass  $E$  endlich ist, vermeiden kann). Im Setting von Lemma 2.4.29 sei  $v \in E$  beliebig. Für  $q \geq 0$  definiere

$$\delta = \delta_q: \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q+1}^{\text{st-mono}},$$

$$(v_0, \dots, v_q) \mapsto \begin{cases} (-1)^{t+1}(v_0, \dots, v_t, v, v_{t+1}, \dots, v_q) & \text{falls } v \notin \{v_0, \dots, v_q\}, \text{ wobei dann} \\ & t \in \{-1, \dots, q\} \text{ das eindeutige Element} \\ & \text{mit } v_t < v < v_{t+1} \text{ ist,} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei im ersten Fall die Randfälle  $v_{-1} < v$  und  $v < v_{q+1}$  als wahr interpretiert werden, definiere  $\delta = \delta_{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{st-mono}}$ ,  $1 \mapsto (v)$ , und setze  $\delta_q = 0$  für  $q < -1$ . Dann gilt  $\partial\delta + \delta\partial = \text{id}$ .

(Lösung auskommentiert)

### 3. SINGULÄRE HOMOLOGIE

#### 3.1. Definition der singulären Homologie und erste Resultate.

**Definition 3.1.1.** Sei  $q \geq 0$ . Sei  $e_0, \dots, e_q$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^{q+1}$ .<sup>21</sup> Der topologische Raum

$$\Delta_q := \text{konv}(e_0, \dots, e_q) = \left\{ (x_0, \dots, x_q) \mid \sum_{i=0}^q x_i = 1 \text{ und } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ für alle } i \right\}$$

heißt der  $q$ -te **Standardsimplex**.

**3.1.2.** Als Menge ist der  $q$ -te Standardsimplex ein voller Simplex im Sinne der Definition 2.1.1.

**Beispiel 3.1.3.** Es ist  $\Delta_0 = \{1\} \subset \mathbb{R}$  ein „nulldimensionaler“ Punkt (genauer eine einpunktige Menge),  $\Delta_1 \subset \mathbb{R}^2$  ein „eindimensionales“ Geradensegment,  $\Delta_2 \subset \mathbb{R}^3$  ein „zweidimensionales“ Dreieck (samt seinem Inneren),  $\Delta_3 \subset \mathbb{R}^4$  ein „dreidimensionaler“ gefüllter Tetraeder etc.

**Definition 3.1.4.** Seien  $X$  ein topologischer Raum und  $q \geq 0$ .

(a) Eine stetige Abbildung  $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$  heißt ein **singulärer  $q$ -Simplex von  $X$** .

Wir erinnern daran, dass  $\text{Top}$  die Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen ist. Insbesondere ist  $\text{Top}(\Delta_q, X)$  die Menge aller singulären Simplizes von  $X$ .

(b) Die freie abelsche Gruppe über der Menge aller singulären Simplizes von  $X$  wird als

$$S_q X := \mathbb{Z} \text{Top}(\Delta_q, X)$$

notiert. Ihre Elemente können in eindeutiger Weise als  $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen  $\sum_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} n_\sigma \sigma$  geschrieben werden und heißen **singuläre  $q$ -Ketten von  $X$**  (mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$ ).

Definiere  $S_q X := \{0\}$  für alle  $q < 0$ .

**Warnung 3.1.5.** Das Wort *Simplex* ist begrifflich leider sehr überladen: volle Simplizes, Standardsimplizes, Simplizes in Simplicialkomplexen, singuläre Simplizes. Manchmal spricht man einfach von Simplizes und hofft, dass der Leser aus dem Kontext erschließen kann, welche Art gemeint ist.

<sup>21</sup>Im aktuellen Kontext ist es üblich, die Koordinaten von 0 bis  $q$  zu nummerieren.

**3.1.6.** Außer der Stetigkeit wird keine Forderung an einen singulären Simplex  $\sigma$  gestellt. Beispielsweise mag  $\sigma$  nicht injektiv sein, oder sogar konstant (auch werden keinerlei Differenzierbarkeitsforderungen gestellt, was ja in diesem Kontext nicht möglich ist); daher rührt das Adjektiv *singulär*.

**Beispiel 3.1.7.** Singuläre Simplizes können sehr wild sein: Beispielsweise kann ein singulärer 1-Simplex von  $\mathbb{R}^2$  als Bild durchaus das ganze Einheitsquadrat haben (vgl. [Wik20, Raumfüllende Kurve]).

**Beispiel 3.1.8.** Eine singuläre  $q$ -Kette von  $X$  ist eine  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination stetiger Abbildungen. Trotzdem male Bild einer singulären 1-Kette.

**Beispiel 3.1.9.** Die (abelsche) Gruppe  $S_q X$  ist im Allgemeinen riesig. Schon die offensichtliche Bijektion  $X \xrightarrow{\sim} \text{Top}(\Delta_0, X)$ , die einem Punkt  $x$  die konstante Abbildung  $\Delta_0 = \{1\} \rightarrow X, 1 \mapsto x$ , zuordnet, induziert einen Gruppenisomorphismus

$$\mathbb{Z}X \xrightarrow{\sim} S_0 X.$$

**Definition 3.1.10.** Für  $q \geq 1$  und  $0 \leq i \leq q$  nenne das Einfügen einer Null an  $i$ -ter Position

$$(3.1.1) \quad \begin{aligned} k_i &= k_i^q: \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q, \\ (x_0, \dots, x_{q-1}) &\mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{q-1}) \end{aligned}$$

die **Inklusion der  $i$ -ten Seite** (oder  **$i$ -te Kanteninklusion**<sup>22</sup>). In den Extremfällen  $i = 0$  und  $i = q$  gelten also  $k_0(x_0, \dots, x_{q-1}) = (0, x_0, \dots, x_{q-1})$  und  $k_q(x_0, \dots, x_{q-1}) = (x_0, \dots, x_{q-1}, 0)$ .

**Definition 3.1.11.** Definiere **Randoperatoren**  $\partial = \partial_q = \partial_q^X: S_q X \rightarrow S_{q-1} X$  wie folgt. Für  $q \leq 0$  setze  $\partial_q := 0$ ; für  $q \geq 1$  sei  $\partial_q$  der eindeutige Gruppenmorphismus mit

$$(3.1.2) \quad \partial_q(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ k_i^q$$

für alle singulären  $q$ -Simplizes  $\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)$ .

**Beispiel 3.1.12.** Ist  $\gamma: \Delta_1 = \{(x_0, x_1) \in [0, 1]^2 \mid x + y = 1\} \rightarrow X$  ein 1-Simplex (also wegen  $[0, 1] \xrightarrow{\sim} \Delta_1, t \mapsto (t-1, t)$ , im Wesentlichen ein Weg in  $X$ ), so gilt

$$\partial(\gamma) = \gamma \circ k_0 - \gamma \circ k_1 = \gamma(0, 1) - \gamma(1, 0)$$

wobei wir Nullsimplizes mit Punkten von  $X$  identifizieren, wie in Beispiel 3.1.9 erklärt. Der Rand eines 1-Simplex ist also „Endpunkt minus Anfangspunkt“.

**3.1.13.** Schreibt man  $\partial: S_q X \rightarrow S_{q-1} X$  wirklich ausnahmsweise einmal explizit auf singulären  $q$ -Ketten aus, so erhält man (bitte nicht abschrecken lassen, insbesondere von der letzten Umformung): Für jede singuläre  $q$ -Kette  $f = \sum_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} f_\sigma \sigma \in S_q X$  gilt

$$(3.1.3) \quad \begin{aligned} \partial(f) &= \sum_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} f_\sigma \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ k_i \\ &= \sum_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} \sum_{i=0}^q (-1)^i f_\sigma \sigma \circ k_i \\ &= \sum_{\tau \in \text{Top}(\Delta_{q-1}, X)} \left( \sum_{\substack{i \in \{0, \dots, q\}, \\ \sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X), \\ \sigma \circ k_i = \tau}} (-1)^i f_\sigma \right) \tau. \end{aligned}$$

In Worten: Um den Koeffizienten von  $\partial(f)$  bei  $\tau$  zu bestimmen, geht man die endlich vielen  $q$ -Simplizes  $\sigma$  mit  $f_\sigma \neq 0$  durch. Für jeden solchen Simplex  $\sigma$  betrachte man seine  $q+1$  „Seitenflächen“  $\sigma \circ k_i$ . Bei Übereinstimmung einer solchen Seitenfläche mit  $\tau$  erhält man den Summanden  $(-1)^i f_\sigma$ .

<sup>22</sup>Daher der Buchstabe  $k$ . Der Begriff *Kante* gefällt mir hier nicht so gut, denn ich würde die Seitenflächen eines Tetraeders nicht als Kanten bezeichnen.

**Proposition 3.1.14.** Sei  $X$  ein topologischer Raum Dann ist das Diagramm

$$(3.1.4) \quad SX = (SX, \partial) := \left( \dots \rightarrow S_2X \xrightarrow{\partial_2} S_1X \xrightarrow{\partial_1} S_0X \xrightarrow{\partial_0} \underbrace{S_{-1}X}_{=\{0\}} \xrightarrow{\partial_{-1}} \underbrace{S_{-2}X}_{=\{0\}} \rightarrow \dots \right)$$

ein Komplex abelscher Gruppen, den sogenannten **Komplex der singulären Ketten von  $X$** .

*Beweis.* Der Fall  $q \leq 1$  ist trivial. Gelte  $q \geq 2$  und sei  $\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)$  ein beliebiger singulärer  $q$ -Simplex. Es genügt,  $\partial_{q-1}(\partial_q(\sigma)) = 0$  zu zeigen. Wir berechnen

$$(3.1.5) \quad \begin{aligned} \partial(\partial(\sigma)) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial(\sigma \circ k_i) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \sigma \circ k_i \circ k_j \\ &= \sum_{\substack{(i,j): 0 \leq i \leq q, \\ 0 \leq j \leq q-1}} (-1)^{i+j} \sigma \circ k_i \circ k_j \end{aligned}$$

Wegen der leicht zu prüfenden Identität  $k_i \circ k_j = k_j \circ k_{i-1}$  für alle  $i > j$  und die für  $i \leq j$  gegenseitig auf.  $\square$

**3.1.15** (Vergleich mit dem simplizialen Differential). Definiert man für  $q \geq 1$  und  $0 \leq i \leq q$  die  $i$ -te Inklusion

$$\begin{aligned} \tilde{k}_i &= \tilde{k}_i^q: \{0, \dots, q-1\} \rightarrow \{0, \dots, q\}, \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x < i, \\ x+1 & \text{falls } x \geq i, \end{cases} \end{aligned}$$

so bildet, für jeden Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$ , das Simplizialketten-Differential (2.4.8) die Klasse  $s \in S_q\mathcal{K}$  eines Elements  $s = (s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{ang}}$  auf die Summe

$$\partial(s) = \sum_{0 \leq i \leq q} (-1)^i s \circ \tilde{k}_i$$

ab, was formal wie die Definition (3.1.2) des Singuläre-Ketten-Differentials aussieht.<sup>23</sup>

**Definition 3.1.16.** Sei  $X$  ein topologischer Raum. Wir nennen

- $Z_q X := Z_q(SX) = Z_q(SX, \partial) = \ker(\partial_q: S_q X \rightarrow S_{q-1} X)$  die (abelsche) Gruppe der **singulären  $q$ -Zykel**;
- $B_q X := B_q(SX) = B_q(SX, \partial) = \text{im}(\partial_{q+1}: S_{q+1} X \rightarrow S_q X)$  die (abelsche) Gruppe der **singulären  $q$ -Ränder** (englisch *boundaries*);
- $H_q X := H_q(SX) = H_q(SX, \partial) = Z_q X / B_q X = \frac{Z_q X}{B_q X}$  die  **$q$ -te singuläre Homologie(gruppe)** (ebenfalls abelsch).

Die Nebenklasse in  $H_q X$  eines Zyklus  $z \in Z_q X$  heißt seine **Homologieklass**e und wird als  $[c] \in H_q X$  notiert.

**3.1.17** (vgl. 2.4.18). Wir verwenden dasselbe Symbol  $H_q$  (manchmal mit, manchmal ohne Klammern) sowohl für die  $q$ -te Homologie  $H_q A = H_q(A)$  eines Komplexes abelscher Gruppen  $A$  als auch für die  $q$ -te singuläre Homologie  $H_q X = H_q(X) = H_q(SX)$  eines topologischen Raums  $X$  und hoffen, dass dies nie zu Missverständnissen führt.

Ende der 5. Vorlesung am 12.11.2020.

**3.1.18.** Die Definition von  $H_q X$  als Quotient einer Untergruppe  $Z_q X$  einer im Allgemeinen riesigen abelschen Gruppe  $S_q X$  sieht a priori extrem unhandlich aus.

Trotzdem werden wir die Homologiegruppen  $H_q X$  vieler interessanter Räume explizit berechnen können; oft werden schöne, insbesondere endliche erzeugte Gruppen wie  $\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  herauskommen.

<sup>23</sup>Ersetzt man in der Rechnung (3.1.5) alle Symbole  $k$  durch  $\tilde{k}$  und verwendet die Identität  $\tilde{k}_i \circ \tilde{k}_j = \tilde{k}_j \circ \tilde{k}_{i-1}$  für alle  $i > j$ , so erhält man  $\partial^2 = 0$  für das Simplizialketten-Differential; dies liefert eine Variante zum Beweis von Proposition 2.4.15.(b).

Man mag sich auch fragen, wann  $H_q X$  eine endlich erzeugte abelsche Gruppe ist (solche Gruppen versteht man gut, siehe [Wik20, Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen]). Beispielsweise besagt der Satz von Wilder **eventuell Referenz einfügen**, dass die Homologiegruppen  $H_q M$  kompakter Mannigfaltigkeiten  $M$  endlich erzeugt sind.

**3.1.19.** Die  $q$ -te singuläre Homologie  $H_q X$  eines topologischen Raum heißt genauer  **$q$ -te singuläre Homologie mit ganzzahligen Koeffizienten** und wird auch als  $H_q^{\text{sing}}(X; \mathbb{Z})$  oder  $H_q^{\text{sing}} X$  oder  $H_q(X; \mathbb{Z})$  notiert.

Statt mit ganzzahligen Koeffizienten kann man auch eine beliebige abelsche Gruppe  $A$  als Koeffizienten nehmen: Wir erinnern an die Definition

$$\begin{aligned} S_q X &= \mathbb{Z} \text{Top}(\Delta_q, X) = \left\{ f: \text{Top}(\Delta_q, X) \rightarrow \mathbb{Z} \mid f \text{ hat endlichen Träger} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} f_\sigma \sigma \mid f_\sigma \in \mathbb{Z}, \text{ davon nur endlich viele } \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

Ersetzen wir darin  $\mathbb{Z}$  durch  $A$ , so erhalten wir die abelsche Gruppe

$$\begin{aligned} S_q(X; A) &:= A \text{Top}(\Delta_q, X) = \left\{ f: \text{Top}(\Delta_q, X) \rightarrow A \mid f \text{ hat endlichen Träger} \right\} \\ &= \left\{ \sum_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} f_\sigma \sigma \mid f_\sigma \in A, \text{ davon nur endlich viele } \neq 0 \right\}. \end{aligned}$$

der **singulären  $q$ -Ketten von  $X$  mit Koeffizienten in  $A$** .<sup>24</sup> Die Definition 3.1.11 des Randoperators verallgemeinert sich in offensichtlicher „ $A$ -linearer“<sup>25</sup> Weise und ist explizit durch (3.1.3) gegeben. Wir erhalten den Komplex  $S(X; A) = (S_q(X; A), \partial_q)$  abelscher Gruppen, den sogenannten **Komplex der singulären Ketten von  $X$  mit Koeffizienten in  $A$** .<sup>26</sup> Seine  $q$ -te Homologie ist per Definition die  **$q$ -te singuläre Homologie von  $X$  mit Koeffizienten in  $A$**  und wird als  $H_q(X; A)$  oder  $H_q^{\text{sing}}(X; A)$  notiert.<sup>27</sup>

Nimmt man statt der abelschen Gruppe  $A$  einen Ring  $R$ , so definiert man analog einen Komplex  $S(X; R)$  von  $R$ -Moduln; seine Homologien  $H_q(X; R)$  sind dann ebenfalls  $R$ -Moduln. Im Spezialfall eines Körpers  $k$  erhält man  $k$ -Vektorräume  $H_q(X; k)$ .<sup>28</sup>

**Allgemeiner (und vielleicht besser nur dies erklären?):** Seien  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann ist  $S(X; M)$  ein Komplex von  $R$ -Moduln. Seine Homologien  $H_q(X; M)$  sind ebenfalls  $R$ -Moduln. Der Spezialfall  $R = \mathbb{Z}$  und  $M = \mathbb{Z}$  ist der bisher in diesem Skript behandelte, die Spezialfälle  $R = \mathbb{Z}$  und  $M = A$  eine abelsche Gruppe bzw.  $R$  beliebig und  $M = R$  bzw.  $R = k$  und  $M = k$  liefern das soeben erklärte.

**Beispiel 3.1.20.** Sei  $x$  ein Punkt eines topologischen Raums  $X$  und sei  $q \in \mathbb{N}$ . Sei  $c_x = c_x^q: \Delta_q \rightarrow X$ ,  $v \mapsto x$ , der „konstante  $q$ -Simplex mit Wert  $x$ “. Dann gilt

$$\partial(c_x^q) = \sum_{i=0}^q (-1)^i c_x^{q-1} = \begin{cases} c_x^{q-1} & \text{falls } q \text{ gerade,} \\ 0 & \text{falls } q \text{ ungerade,} \end{cases}$$

für alle  $q \geq 1$ . Alle konstanten „ungeraden“ Simplexes  $c_x^1, c_x^3, c_x^5, \dots$  sind also Zykel, aber auch Ränder der konstanten „positiven geraden“ Simplexes  $c_x^2, c_x^4, c_x^6, \dots$  (welche also keine Zykel sind). Alle Homologieklassen  $[c_x^1], [c_x^3], [c_x^5], \dots$  sind also Null.

<sup>24</sup>Der aufmerksame Leser wird bemerken, dass  $A \text{Top}(\Delta_q, X)$  eigentlich nicht definiert ist. Ist  $E$  eine beliebige Menge, so definieren wir  $AE$  als abelsche Gruppe aller Abbildungen  $E \rightarrow A$  mit endlichem Träger. Im allgemeinen ist  $AE$  **keine** freie abelsche Gruppe. Sie hat jedoch  $E$  als „ $A$ -Basis“ in dem Sinne, dass jedes Element in eindeutiger Weise als „ $A$ -Linearkombination“ von Elementen von  $E$  geschrieben werden kann, also als (endliche) Summe  $\sum_{e \in E} f_e e$  mit eindeutigen  $f_e \in A$ , von denen nur endlich viele von Null verschieden sind. (Äquivalent und formal wohl besser definiert man  $AE$  als Koprodukt  $\bigoplus_{e \in E} A$  in der Kategorie Ab.) (Wer Tensorprodukte kennt, kann  $AE$  auch als  $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}E$  definieren.)

<sup>25</sup>Hier stehen Anführungszeichen, denn  $A$  ist nur eine abelsche Gruppe und kein Ring.

<sup>26</sup>Im Spezialfall  $A = \mathbb{Z}$  gilt  $S_q(X; \mathbb{Z}) = SX$ .

<sup>27</sup>Wer das Tensorprodukt  $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$  abelscher Gruppen kennt, wird bemerken, dass der Komplex  $S(X; A)$  aus dem Komplex  $S(X; \mathbb{Z}) = SX$  durch Anwenden des Funktors  $A \otimes_{\mathbb{Z}} -: \text{Mod}(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z})$  hervorgeht. Es ist aber im Allgemeinen **nicht** richtig, dass  $H_q(X; A)$  aus  $H_q(X; \mathbb{Z})$  durch Anwenden dieses Funktors hervorgeht, denn Tensorieren ist im Allgemeinen nicht linksexakt. Das universelle Koeffiziententheorem der Homologie, Satz ??, klärt die Beziehung zwischen  $H_q(X; A)$  und  $H_q(X; \mathbb{Z})$ .

<sup>28</sup>Das Semikolon in  $S(X; A)$  und  $H_q(X; A)$  wird verwendet, um Verwechslungen mit dem später definierten Komplex  $S(X, Z)$  der relativen Ketten und der relativen Homologie  $H_q(X, Z)$  zu vermeiden (siehe Definition 4.1.2).

**Beispiel 3.1.21.** Sei  $X = \text{pt} = \{*\}$  ein einpunktiger Raum. Dann gilt nach Beispiel 3.1.20

$$\begin{aligned} (SX, \partial) &= \left( \dots \rightarrow S_4 X \xrightarrow{\partial_4} S_3 X \xrightarrow{\partial_3} S_2 X \xrightarrow{\partial_2} S_1 X \xrightarrow{\partial_1} S_0 X \xrightarrow{\partial_0} \underbrace{S_{-1} X}_{=\{0\}} \rightarrow \dots \right) \\ &\cong \left( \dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_4=\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_3=0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_2=\text{id}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_1=0} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_0=0} \{0\} \rightarrow \dots \right). \end{aligned}$$

Notieren wir den eindeutigen 0-Simplex  $\Delta_0 \rightarrow \text{pt}$  als  $c_*$ , so gilt also

$$H_q(\text{pt}) = \begin{cases} \mathbb{Z}c_* \cong \mathbb{Z} & \text{für } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Beispiel 3.1.22.**  $H_q(\emptyset) = 0$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Beispiel 3.1.23.** Ist  $X = \bigsqcup X_w$  die Zerlegung (als Menge) eines topologischen Raums in seine Wegzusammenhangskomponenten ([Sch20, Definition 2.6.12]), so ist die offensichtliche Abbildung eine Bijektion

$$\bigsqcup \text{Top}(\Delta_q, X_w) \xrightarrow{\sim} \text{Top}(\Delta_q, X)$$

für jedes  $q \geq 0$ , denn das Bild des nichtleeren wegzusammenhängenden  $\Delta_q$  unter jeder stetigen Abbildung ist wegzusammenhängend. Wir folgern

$$\bigoplus S_q X_w \xrightarrow{\sim} S_q X$$

als abelsche Gruppen, nun für alle  $q \in \mathbb{Z}$ , denn die freie abelsche Gruppe über einer beliebigen disjunkten Vereinigung von Mengen  $E_i$  ist die direkte Summe der freien abelschen Gruppen über den  $E_i$ , in Formeln  $\mathbb{Z} \bigsqcup E_i = \bigoplus \mathbb{Z}E_i$ . Diese Zerlegung ist verträglich mit den Randoperatoren, d. h. wir haben sogar einen Isomorphismus

$$\bigoplus SX_w \xrightarrow{\sim} SX$$

in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$  (die direkte Summe von Komplexen wird in Definition B.1.23 erklärt). Da die Homologie einer direkten Summe von Komplexen die direkte Summe der Homologien ist (Aufgabe B.1.24 erhalten wir Isomorphismen

$$(3.1.6) \quad \bigoplus H_q X_w \xrightarrow{\sim} H_q X$$

für alle  $q \in \mathbb{Z}$ .<sup>29</sup>

**Lemma 3.1.24** (Nullte Homologie). *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $\pi_0(X)$  die Menge seiner Wegzusammenhangskomponenten. Dann induziert die Verknüpfung offensichtlicher Abbildungen  $\text{Top}(\Delta_0) \xrightarrow{\sim} X \rightarrow \pi_0(X)$  einen Isomorphismus*

$$H_0 X \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\pi_0(X)$$

*abelscher Gruppen.*

<sup>29</sup> Ist  $X$  ein topologischer Raum und gilt  $X = \bigsqcup Y_\alpha$  als Mengen, wobei jedes  $Y_\alpha$  eine Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  ist (beispielsweise könnte jedes  $Y_\alpha$  offen in  $X$  sein (dann ist jedes  $Y_\alpha$  automatisch abgeschlossen in  $X$ )), so liefert das analoge Argument oder zweimalige Anwendung des obigen Resultats Isomorphismen  $\bigoplus S_q Y_\alpha \xrightarrow{\sim} S_q X$  und  $\bigoplus H_q Y_\alpha \xrightarrow{\sim} H_q X$ .

*Beweis.* Wir erklären die beiden Diagramme (deren nichtgepunktete Teile bis auf die Richtung der horizontalen Bijektion übereinstimmen)

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Top}(\Delta_0, X) & \xrightarrow{\sim \alpha} & X \\
 \cap & & \downarrow \\
 S_0 X & & \pi_0(X) \\
 \parallel & \searrow \psi & \cap \\
 Z_0 X & & \cap \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_0 X & \xrightarrow{\bar{\psi}} & \mathbb{Z}\pi_0(X),
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \text{Top}(\Delta_0, X) & \xleftarrow{\sim \alpha^{-1}} & X \\
 \cap & & \downarrow \\
 S_0 X & & \pi_0(X) \\
 \parallel & \searrow \varphi & \cap \\
 Z_0 X & & \cap \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_0 X & \xleftarrow{\bar{\varphi}} & \mathbb{Z}\pi_0(X).
 \end{array}$$

Wir erklären die gepunkteten Pfeile, die die Diagramme jeweils kommutativ machen. (Wegen  $S_{-1}X = 0$  gilt die Gleichheit  $Z_0X = S_0X$ .)

Links ist  $\psi$  der eindeutige Gruppenmorphismus, der die Verknüpfung  $\text{Top}(\Delta_0, X) \rightarrow \mathbb{Z}\pi_0(X)$  auf die freie abelsche Gruppe  $S_0X$  fortsetzt. Wir wollen zeigen, dass  $\psi$  den gepunkteten Gruppenmorphismus  $\bar{\psi}$  induziert. Dazu ist zu zeigen, dass  $\psi$  auf der Untergruppe  $B_0X$  der 0-Ränder verschwindet. Da ein 1-Simplex alias Weg in  $X$  als Rand „Endpunkt minus Anfangspunkt“ hat (Beispiel 3.1.12), gilt

$$B_0X = \langle x - y \mid x, y \in X \text{ in derselben Wegzusammenhangskomponenten} \rangle$$

wobei rechts das Erzeugnis als abelsche Gruppe gemeint ist.<sup>30</sup> Da für alle  $x, y \in X$  in derselben Wegzusammenhangskomponenten offensichtlich  $\psi(x - y) = 0$  gilt, verschwindet  $\psi$  auf  $B_0X$ .

Die eindeutige Existenz der Abbildung  $\varphi$  rechts mit der Eigenschaft, dass der obere Bereich des rechten Diagramms kommutativ ist, kommt daher, dass für je zwei Punkte  $x, y \in X$  in derselben Wegzusammenhangskomponenten die entsprechenden konstanten 0-Simplizes  $x$  und  $y$  sich um einen Rand unterscheiden (wieder nach Beispiel 3.1.12), also dieselbe Homologiekategorie  $[x] = [y] \in H_0X$  haben. Per Definition ist  $\bar{\varphi}$  der eindeutige Gruppenmorphismus, der  $\varphi$  auf die freie abelsche Gruppe  $\mathbb{Z}\pi_0(X)$  fortsetzt.

Nach Konstruktion sind die beiden Gruppenmorphisamen  $\bar{\psi}$  und  $\bar{\varphi}$  invers zueinander.  $\square$

**3.1.25.** Für jeden topologischen Raum  $X$  nennt man den Morphismus

$$\begin{aligned}
 \varepsilon: S_0X &\rightarrow \mathbb{Z}, \\
 \sum n_x x &\mapsto \sum n_x,
 \end{aligned}$$

abelscher Gruppen **Augmentation**. Es gilt  $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$  wegen Beispiel 3.1.12. Also verschwindet  $\varepsilon$  auf  $B_0X$  und faktorisiert deswegen über  $S_0X = Z_0X \rightarrow H_0X$  zu einem Morphismus

$$\bar{\varepsilon}: H_0X \rightarrow \mathbb{Z}$$

abelscher Gruppen. Nach dem Beweis von Lemma 3.1.24 ist diese Abbildung genau dann ein Isomorphismus, wenn  $X$  wegzusammenhängend ist: Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $\bar{\varepsilon}$  bis auf die offensichtliche Identifikation  $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}\pi_0(X)$  der Isomorphismus  $\bar{\psi}$  aus dem dortigen Beweis. Ist umgekehrt  $\bar{\varepsilon}$  ein Isomorphismus, so haben wir Isomorphismen  $\mathbb{Z}\pi_0(X) \xleftarrow{\bar{\psi}} H_0X \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} \mathbb{Z}$  abelscher Gruppen, und es folgt<sup>31</sup>  $|\pi_0(X)| = 1$ .

Die Gleichung  $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$  zeigt auch, dass

$$(3.1.7) \quad \tilde{S}X := \left( \dots \rightarrow S_2X \xrightarrow{\partial_2} S_1X \xrightarrow{\partial_1} S_0X \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} \{0\} \rightarrow \dots \right)$$

ein Komplex ist, der sogenannte **augmentierte Komplex der singulären Ketten von  $X$**  (vgl. Lemma 2.4.29).

<sup>30</sup> Allgemein ist  $B_qX$  von allen  $\partial(\sigma)$ , für  $\sigma \in \text{Top}(\Delta_{q+1}, X)$  erzeugt.

<sup>31</sup> Zunächst muss  $\pi_0(X)$  endlich sein, denn  $\mathbb{Z}\pi_0(X)$  ist von einem Element erzeugbar. Es folgt  $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}|\pi_0(X)|$ . Ist  $R$  ein kommutativer Ring, so folgt aber aus  $R^m \cong R^n$  als  $R$ -Moduln bereits  $m = n$  (Wohlbestimmtheit des Rangs). Beweis per Multiplikatitivität der Determinante oder per Reduktion modulo maximalem Ideal und der entsprechenden Aussage für Vektorräume (für  $R = \mathbb{Z}$  kann auch über  $\mathbb{Z}$  mit  $\mathbb{Q}$  tensorieren).

**Aufgabe 3.1.26** (Vgl. 3.4.3). Sei  $\sigma: \Delta_1 \rightarrow X$  ein singulärer 1-Simplex. Sei  $\bar{\sigma}$  der „umgedrehte“ 1-Simplex  $\bar{\sigma}(x_0, x_1) := \sigma(x_1, x_0)$ . Dann gilt  $\sigma = -\bar{\sigma} + \partial\tau$  für einen geeigneten 2-Simplex  $\tau$ ; mit anderen Worten sind  $\sigma$  und  $-\bar{\sigma}$  homolog (siehe Definition B.1.5).

Hinweis: Betrachte den 2-Simplex  $\mu(z_0, z_1, z_2) = \sigma(z_0 + z_2, z_1)$ .

Bemerkung: Sei  $p \geq 2$ , sei  $\sigma: \Delta_p \rightarrow X$  ein  $p$ -Simplex und setze  $\bar{\sigma}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_p) := \sigma(x_1, x_0, x_2, \dots, x_p)$ . Dann gibt es im Allgemeinen keinen  $(p+1)$ -Simplex  $\tau$  mit  $\sigma = -\bar{\sigma} + \partial\tau$ , denn sonst würde folgen  $\partial(\sigma) = -\partial(\bar{\sigma})$ , was im Allgemeinen falsch ist (nimm etwa  $X = \Delta_p$  und  $\sigma = \text{id}$ ).

**Satz 3.1.27** (Homologie konvexer Mengen). *Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine konvexe Teilmenge, so gilt  $H_q K = 0$  für alle  $q > 0$ .*<sup>32</sup>

*Beweis.* Ist  $K$  leer, so ist die Aussage klar. Sonst fixieren wir einen Punkt  $p \in K$  und betrachten (ähnlich wie im Beweis von Lemma 2.4.29) für  $q \geq 0$  den **Prismen-Operator**

$$(3.1.8) \quad P = P(p) = P(p, K)_q: S_q K \rightarrow S_{q+1} K,$$

der „jeden  $q$ -Simplex durch Verbinden mit dem ausgezeichneten Punkt  $p$  zu einem  $q+1$ -Simplex macht“ und formal der eindeutige Morphismus abelscher Gruppen mit der folgenden Eigenschaft ist: Für jeden  $q$ -Simplex  $\sigma: \Delta_q \rightarrow K$  ist  $P\sigma$  der eindeutige  $(q+1)$ -Simplex mit

$$(P\sigma)(1 - \tau, \tau x_0, \dots, \tau x_q) = (1 - \tau)p + \tau\sigma(x_0, \dots, x_q) \quad \text{für alle } \tau \in [0, 1] \text{ und alle } (x_0, \dots, x_q) \in \Delta_q.$$

Man beachte, dass die Abbildung  $P\sigma: \Delta_{q+1} \rightarrow K$  stetig ist, denn die Abbildung

$$\begin{aligned} [0, 1] \times \Delta_q &\rightarrow \Delta_{q+1}, \\ (\tau, (x_0, \dots, x_q)) &\mapsto (1 - \tau, \tau x_0, \dots, \tau x_q), \end{aligned}$$

ist *final* (nach [Sch20, 2.8.81]), was bedeutet, dass die Topologie auf der Zielmenge die Finaltopologie bezüglich dieser Abbildung ist.

Wir behaupten die Gleichheit

$$(3.1.9) \quad \partial P + P\partial = \partial \circ P_q + P_{q-1} \circ \partial = \text{id}: S_q K \rightarrow S_q K \quad \text{für alle } q \geq 1.$$

Sei  $q \geq 1$ . Nach Definition gelten

$$\begin{aligned} \partial(P\sigma) &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i (P\sigma) \circ k_i^{q+1} \\ P(\partial\sigma) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i P(\sigma \circ k_i^q) \end{aligned}$$

für jeden  $q$ -Simplex  $\sigma$ . Leicht prüft man die anschaulich hoffentlich evidenten Formeln

$$\begin{aligned} (P\sigma) \circ k_0^{q+1} &= \sigma, \\ (P\sigma) \circ k_i^{q+1} &= P(\sigma \circ k_{i-1}^q) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, q+1\} \end{aligned}$$

und folgert daraus die gewünschte Formel  $\partial P + P\partial = \text{id}_{S_q K}$  für  $q \geq 1$ .

Jeder Zykel  $z \in Z_q K$  mit  $q \geq 1$  ist somit wegen  $z = \partial(P(z)) + P(\partial(z)) = \partial(P(z))$  ein Rand.  $\square$

**3.1.28.** Ist  $K \subset \mathbb{R}^n$  eine nichtleere kompakte Teilmenge, so ist der augmentierte Komplex  $\tilde{S}K$  der singulären Ketten (siehe (3.1.7)) nullhomotop, wie eine naheliegende Modifikation des Beweises von Satz 3.1.27 zeigt.

**3.1.29** ((Weg-)Integral holomorpher Funktionen über Grad-1-Homologieklassen - setzt etwas Funktionentheorie voraus). Sei  $U \subset \mathbb{C}$  eine offene Teilmenge und  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion. Sei  $\sigma: \Delta_1 \rightarrow U$  ein singulärer 1-Simplex. Fasse  $\sigma$  durch Vorschalten von  $[0, 1] \xrightarrow{\sim} \Delta_1$ ,  $t \mapsto (1-t, t)$ , als Weg in  $U$  auf und bilde das Integral  $\int_\sigma f(z) dz$ . Per  $\mathbb{Z}$ -Linearer Fortsetzung definieren wir  $\int_\sigma f(x) dz$  für alle  $\sigma \in S_1 X$ . Für alle singulären 2-Simplizes  $\tau: \Delta_2 \rightarrow U$  gilt  $\int_{\partial\tau} f(z) dz = 0$  (wegen der Homotopie-Invarianz des Wegintegrals). Also hängt  $\int_\sigma f(z) dz$  nur von der Klasse von  $\sigma$  modulo  $B_1(U)$  ab, d. h. wir erhalten eine  $\mathbb{Z}$ -bilineare<sup>33</sup>

<sup>32</sup>Dasselbe gilt für sternförmige Teilmengen mit demselben Beweis ( $p$  ist dann als „Zentrum des Sterns“ zu wählen) – wir zeigen jedoch bald eh eine allgemeinere Aussage, siehe Beispiel 3.3.2.

<sup>33</sup>Genauer  $\mathbb{Z}$ -linear im ersten Argument für fixiertes zweites Argument,  $\mathbb{C}$ -linear im zweiten Argument für fixiertes erstes Argument.

Abbildung (auch Paarung genannt)

$$\begin{aligned} \frac{S_1 U}{B_1 U} \times \mathcal{O}^{\text{an}}(U) &\rightarrow \mathbb{C}, \\ ([\sigma], f) &\mapsto \int_{\sigma} f(z) dz, \end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{O}^{\text{an}}(U)$  den Ring der auf  $U$  holomorphen Funktionen bezeichnet. Wegen  $H_1(U) = \frac{Z_1 U}{B_1 U} \subset \frac{S_1 U}{B_1 U}$  können wir diese Paarung zu einer Paarung  $H_1(U) \times \mathcal{O}^{\text{an}}(U) \rightarrow \mathbb{C}$  einschränken.

### 3.2. Funktorialität der singulären Homologie.

**3.2.1. (Eventuell verwirrend – dann ignorieren und direkt Lemma 3.2.2 lesen.)** Wir haben bisher  $S_q X = \mathbb{Z} \text{Top}(\Delta_q, X)$  nur für topologische Räume  $X$  definiert. Die Zuordnung  $X \mapsto S_q X$  lässt sich aber leicht zu einem Funktor machen: Definiere  $S_q$  als Verknüpfung

$$S_q: \text{Top} \xrightarrow{\text{Top}(\Delta_q, -)} \text{Set} \xrightarrow{\mathbb{Z}-} \text{Ab}$$

der Funktoren „stetige Abbildungen aus  $\Delta_q$ “  $\text{Top}(\Delta_q, -)$  (ein Spezialfall von Beispiel A.2.9) und „freie abelsche Gruppe“  $\mathbb{Z}-$ ; hier wird natürlich  $q \geq 0$  angenommen. Was dieser Funktor auf Morphismen macht, wird am Anfang von Lemma 3.2.2 noch einmal explizit erklärt.

**Lemma 3.2.2** (Singuläre Ketten als Funktor). *Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Nachschalten von  $f$  liefert für jedes  $q \geq 0$  eine Abbildung*

$$\begin{aligned} f \circ: \text{Top}(\Delta_q, X) &\rightarrow \text{Top}(\Delta_q, Y), \\ \sigma &\mapsto f \circ \sigma. \end{aligned}$$

Sei

$$S_q f: S_q X = \mathbb{Z} \text{Top}(\Delta_q, X) \rightarrow S_q Y = \mathbb{Z} \text{Top}(\Delta_q, Y)$$

die  $\mathbb{Z}$ -lineare Fortsetzung dieser Abbildung auf die entsprechenden freien abelschen Gruppen; setze  $S_q f := 0$  für  $q < 0$ . Dann definiert die Familie  $Sf := (S_q f)_{q \in \mathbb{Z}}$  einen Morphismus

$$Sf: SX = (SX, \partial) \rightarrow SY = (SY, \partial)$$

in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$ . Genauer erhalten wir so einen Funktor  $S: \text{Top} \rightarrow \text{Kom}(\mathbb{Z})$ .<sup>34</sup>

*Beweis.* Für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  müssen wir zeigen, dass das Diagramm

$$(3.2.1) \quad \begin{array}{ccc} S_q X & \xrightarrow{S_q f} & S_q Y \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ S_{q-1} X & \xrightarrow{S_{q-1} f} & S_{q-1} Y \end{array}$$

<sup>34</sup>Bitte nicht mit dem Funktor  $S$  in Aufgabe 2.4.27 verwechseln. Die Beziehung zwischen diesen beiden Funktoren wird im Wesentlichen in Satz 4.8.18 erklärt.

kommutativ ist. Dies ist trivial für  $q \leq 0$ . Sei  $q > 1$ . Es genügt, die Kommutativität auf der Teilmenge  $\text{Top}(\Delta_q, X) \subset S_q X$  zu zeigen. Für jeden  $q$ -Simplex  $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$  gilt aber

$$\begin{aligned} \partial((S_q f)(\sigma)) &= \partial(f \circ \sigma) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i (f \circ \sigma) \circ k_i \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i f \circ (\sigma \circ k_i) \\ &= (S_{q-1} f) \left( \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \circ k_i) \right) \\ &= (S_{q-1} f) (\partial(\sigma)) \end{aligned}$$

Dass  $S$  ein Funktor ist, ist offensichtlich. (Auch jedes  $S_q: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  ist ein Funktor.) □

**3.2.3** (Singuläre Homologie als Funktor). Sei  $q \in \mathbb{Z}$ . Verknüpfen der Funktoren  $S: \text{Top} \rightarrow \text{Kom}(\mathbb{Z})$  und Funktor  $H_q: \text{Kom}(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ab}$  (siehe Lemma [B.1.13](#)) liefert einen ebenfalls als  $H_q$  notierten Funktor

$$H_q := H_q \circ S: \text{Top} \rightarrow \text{Ab},$$

denn er bildet das Objekt  $X \in \text{Top}$  auf  $H_q(SX) = H_q(X)$  ab (vgl. [3.1.17](#)).

Explizit bedeutet dies: Für jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  erhalten wir eine Morphismus  $H_q f = H_q(Sf): H_q X \rightarrow H_q Y$  abelscher Gruppen. Ist  $g: Y \rightarrow Z$  eine weitere stetige Abbildung, so gilt  $H_q(g \circ f) = H_q(g) \circ H_q(f)$ . Außerdem gilt  $H_q(\text{id}_X) = \text{id}_{H_q X}$ .

Wir können auch den Funktor totale Homologie  $H: \text{Kom}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{(B.1.1)}} \text{Kom}(\mathbb{Z})$  dahinterschalten und erhalten den Funktor

$$H := H \circ S: \text{Top} \rightarrow \text{Kom}(\mathbb{Z}).$$

**3.2.4** (Homöomorphismus-Invarianz der singulären Ketten und der singulären Homologie, vgl. Satz [3.3.1](#)). Da singuläre Ketten  $S$  und singuläre Homologie  $H_q$  Funktoren sind (Lemma [3.2.2](#), [3.2.3](#)), liefert jeder Homöomorphismus  $f: X \xrightarrow{\sim} Y$  topologischer Räume Isomorphismen  $Sf: SX \xrightarrow{\sim} SY$  in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$  und  $H_q(f): H_q X \xrightarrow{\sim} H_q Y$  in  $\text{Ab}$ .

Ende der 6. Vorlesung am 13.11.2020.

Hausaufgaben: Diesmal nur relativ elementare Aufgaben aus der homologischen Algebra – bitte die relevanten Definitionen im Anhang nachlesen.

- (1) Aufgabe [B.1.22](#)
- (2) Aufgabe [B.1.24](#)
- (3) Aufgabe [B.2.2](#)
- (4) Aufgaben [B.2.3](#) und [B.2.6](#) und [B.2.8](#)
- (5) Bonusaufgabe [B.1.25](#)

Eventuell in Übungsgruppe Aufgabe [B.1.9](#) erklären.

### 3.3. Homotopie-Invarianz der singulären Homologie.

**Satz 3.3.1** (Homotopie-Invarianz der singulären Homologie). *Homotope stetige Abbildungen induzieren dieselbe Abbildung auf der singulären Homologie (und sogar homotope Abbildungen auf den Komplexen singulärer Ketten).*

In Formeln: Sind  $f, g: X \rightarrow Y$  zwei homotope stetige Abbildungen, so gilt

$$H_q(f) = H_q(g): H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$$

für alle  $q \in \mathbb{Z}$  (und die beiden Morphismen  $Sf, Sg: SX \rightarrow SY$  in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$  sind sogar homotop<sup>35</sup>, werden also gleich in der Homotopiekategorie  $\text{Hot}(\mathbb{Z})$  abelscher Gruppen (siehe Definition [B.2.9](#))).

<sup>35</sup> Das Wort *homotop* ist überladen: Sowohl stetige Abbildungen als auch Morphismen von Komplexen können homotop sein. Die Verwendung des Begriffs für Morphismen von Komplexen kommt historisch wohl aus der Erkenntnis dieses Satzes.

**Beispiel 3.3.2.** Beispielsweise hat jeder zusammenziehbare (siehe [Sch20, Definition 3.4.10]) topologische Raum dieselbe Homologie wie ein einpunktiger Raum hat. Da jede nichtleere konvexe Teilmenge  $K \subset \mathbb{R}^n$  zusammenziehbar ist, folgt Satz 3.1.27 sofort aus Satz 3.3.1.<sup>36</sup>

**3.3.3 (Anschauung).** Sei  $h$  eine Homotopie zwischen zwei stetigen Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$ . Die Gleichung  $H_q f = H_q g$  besagt, dass für jeden  $q$ -Zykel  $z \in Z_q X$  die beiden  $q$ -Zykel  $(S_q f)(z)$  und  $(S_q g)(z)$  homolog sind, dass es also eine  $(q+1)$ -Kette  $\tau$  mit Rand  $\partial(\tau) = (S_q g)(z) - (S_q f)(z)$  gibt. Anschaulich ist  $\tau$  „das Gebiet in  $Y$ , das vom Bild des Zyklus  $z$  während der Homotopie  $h$  überstrichen wird“, der „Rand dieses Gebiets“ ist  $(S_q g)(z) - (S_q f)(z)$ .

*Beweis.* Seien  $f, g: X \rightarrow Y$  zwei homotope stetige Abbildungen. Wir zeigen, dass die beiden Morphismen  $Sf, Sg: SX \rightarrow SY$  homotop sind. Daraus folgt  $H_q f = H_q g$  nach Aufgabe B.2.2.

Sei  $h: X \times [0, 1] \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Sei  $i_t: X \rightarrow X \times [0, 1]$ ,  $x \mapsto (x, t)$ , die Inklusion „in Höhe  $t \in [0, 1]$ “. Dann gelten  $f = h \circ i_0$  und  $g = h \circ i_1$ .

Es genügt zu zeigen, dass  $Si_0$  und  $Si_1$  homotop sind, denn dann sind auch  $Sf = S(h \circ i_0) = Sh \circ Si_0$  und  $Sg = S(h \circ i_1) = Sh \circ Si_1$  homotop (siehe Aufgabe B.2.8). (Im Rest des Beweises werden  $f, g$  und  $Y$  nicht mehr auftauchen.)

Wir führen zunächst etwas Notation ein. Für  $q \in \mathbb{N}$  sei  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_q = (0, \dots, 0, 1)$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^{q+1}$ . Diese Vektoren sind die Ecken des  $q$ -Simplex  $\Delta_q$ . Gegeben Vektoren  $v_0, \dots, v_q$  in einem reellen Vektorraum  $V$ , definieren wir die Abbildung

$$(3.3.1) \quad \underbrace{(v_0, \dots, v_q)}: \Delta_q \rightarrow \text{konv}(v_0, \dots, v_q) \subset V,$$

$$\sum_{i=0}^q t_i e_i \mapsto \sum_{i=0}^q t_i v_i.$$

Sie ist die Einschränkung einer linearen Abbildung und bildet die Ecken  $e_0, \dots, e_q$  des Standardsimplex  $\Delta_q$  in dieser Reihenfolge auf  $v_0, \dots, v_q$  ab.

Mit dieser Notation definieren wir für  $0 \leq \nu \leq q$

$$\omega_\nu = \omega_\nu^{q+1} = \underbrace{((e_0, 0), \dots, (e_\nu, 0), (e_\nu, 1), \dots, (e_q, 1))}: \Delta_{q+1} \rightarrow \Delta_q \times [0, 1].$$

Bild malen für  $q = 1$  (Zerlegung des Rechtecks  $\Delta_1 \times [0, 1]$  in zwei Dreiecke) und  $q = 2$  (Zerlegung des „Box mit dreieckiger Grundseite“  $\Delta_2 \times [0, 1]$  in drei Tetraeder). Dass es sich um (nicht ganz disjunkte) „Zerlegungen“ handelt, ist hoffentlich anschaulich klar, jedoch für den Rest des Beweises nicht relevant.

Betrachte den Morphismus

$$\delta_q: S_q X \rightarrow S_{q+1}(X \times [0, 1]),$$

$$\sigma \mapsto \delta(\sigma) := \sum_{\nu=0}^q (-1)^\nu (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \omega_\nu.$$

abelscher Gruppen. Für  $q < 0$  setze (notgedrungen)  $\delta_q = 0$ . **Zeichne im Fall  $q = 1$  Drehsinn in die Dreiecke des Rechtecks.**

Wir behaupten die Formel

$$(3.3.2) \quad \partial_{q+1} \delta_q + \delta_{q-1} \partial_q = S_q i_1 - S_q i_0 \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Z}.$$

Diese besagt, dass  $(\delta_q)_{q \in \mathbb{Z}}$  eine Homotopie von  $S_q i_1$  nach  $S_q i_0$  ist, diese beiden Morphismen also homotop sind. **Formel am Bild erklären für  $q = 1$  und  $q = 2$ .**

Um die folgende Rechnung kurz zu halten, definieren wir  $e'_i := (e_i, 0) \in \Delta_q \times [0, 1]$  und  $e''_i := (e_i, 1) \in \Delta_q \times [0, 1]$ . Ist nun  $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$  ein beliebiger  $q$ -Simplex, so berechnen wir (die Farben werden später

<sup>36</sup>Man beachte auch, dass der unten angegebene Beweis von Satz 3.3.1 nicht auf Satz 3.1.27 aufbaut.

Im Skript [Soe20] ist ein weiterer, abstrakterer Beweis von Satz 3.3.1 angegeben, der Satz 3.1.27 verwendet (siehe zweiter Beweis von [Soe20, Satz 1.4.1]).

verwendet)

$$\begin{aligned}
\partial_{q+1}(\delta_q(\sigma)) &\stackrel{(3.1.2)}{=} \sum_{\nu=0}^q (-1)^\nu \sum_{\mu=0}^{q+1} (-1)^\mu (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, e'_\nu, e''_\nu, \dots, e''_q)}_{\text{blau}} \circ k_\mu^{q+1} \\
&= \sum_{\nu=0}^q (-1)^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, \widehat{e'_\mu}, \dots, e'_\nu, e''_\nu, \dots, e''_q)}_{\text{blau}} \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^q (-1)^\nu \sum_{\mu=\nu}^q (-1)^{\mu+1} (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, e'_\nu, e''_\nu, \dots, \widehat{e''_\mu}, \dots, e''_q)}_{\text{rot}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\delta_{q-1}(\partial_q(\sigma)) &\stackrel{(3.1.2)}{=} \sum_{\nu=0}^{q-1} (-1)^\nu \sum_{\mu=0}^q (-1)^\mu ((\sigma \circ k_\mu^q) \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, e'_\nu, e''_\nu, \dots, e''_{q-1})}_{\text{blau}} \\
\left( \text{verwende } k_\mu(e_i) \stackrel{(3.1.1)}{=} \begin{cases} e_i & \text{falls } i < \mu, \\ e_{i+1} & \text{falls } i \geq \mu. \end{cases} \right) &= \sum_{\nu=0}^{q-1} (-1)^\nu \sum_{\mu=0}^{\nu} (-1)^\mu (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, \widehat{e'_\mu}, \dots, e'_{\nu+1}, e''_{\nu+1}, \dots, e''_q)}_{\text{blau}} \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{q-1} (-1)^\nu \sum_{\mu=\nu+1}^q (-1)^\mu (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, e'_\nu, e''_\nu, \dots, \widehat{e''_\mu}, \dots, e''_q)}_{\text{rot}} \\
&= \sum_{\nu=1}^q (-1)^{\nu-1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} (-1)^\mu (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, \widehat{e'_\mu}, \dots, e'_\nu, e''_\nu, \dots, e''_q)}_{\text{blau}} \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{q-1} (-1)^\nu \sum_{\mu=\nu+1}^q (-1)^\mu (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, e'_\nu, e''_\nu, \dots, \widehat{e''_\mu}, \dots, e''_q)}_{\text{rot}}
\end{aligned}$$

Aufsummieren liefert (die Summe der blauen Terme ist blau, die Summe der roten rot)

$$\begin{aligned}
\partial_{q+1}(\delta_q(\sigma)) + \delta_{q-1}(\partial_q(\sigma)) &= (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, e''_0, \dots, e''_q)}_{\text{blau}} \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^q (-1)^\nu (-1)^\nu (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, e'_{\nu-1}, \widehat{e'_\nu}, e''_\nu, \dots, e''_q)}_{\text{blau}} \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{q-1} (-1)^\nu (-1)^{\nu+1} (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, e'_\nu, \widehat{e''_\nu}, e''_{\nu+1}, \dots, e''_q)}_{\text{rot}} \\
&\quad + (-1)^q (-1)^{q+1} (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, e'_q, \widehat{e''_q})}_{\text{rot}} \\
&= (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e''_0, \dots, e''_q)}_{\text{blau}} - (\sigma \times \text{id}_{[0,1]}) \circ \underbrace{(e'_0, \dots, e'_q)}_{\text{rot}} \\
&= i_1 \circ \sigma - i_0 \circ \sigma \\
&= (S_q i_1)(\sigma) - (S_q i_0)(\sigma).
\end{aligned}$$

Damit ist (3.3.2) gezeigt und der Satz bewiesen.  $\square$

**3.3.4.** Ich erinnere an die Homotopiekategorie  $\text{hTop}$  topologischer Räume und den kanonischen Funktor  $\text{Top} \rightarrow \text{hTop}$  (siehe [Sch20, Definition 3.4.8, 3.4.9]).

Ebenso kommt die Homotopiekategorie  $\text{Hot}(\mathbb{Z})$  der Komplexe abelscher Gruppen (=  $\mathbb{Z}$ -Moduln) mit einem kanonischen Funktor  $\text{Kom}(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hot}(\mathbb{Z})$  (siehe Definition B.2.9 und B.2.11).

Nach Satz 3.3.1 liefern homotope Abbildungen  $f, g: X \rightarrow Y$  homotope Abbildungen  $Sf, Sg: SX \rightarrow SY$ ; dies zeigt, dass eine eindeutige gestrichelte Abbildung im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Top}(X, Y) & \xrightarrow{S} & \text{Kom}_{\mathbb{Z}}(SX, SY) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{hTop}(X, Y) & \xrightarrow{\dots S \dots} & \text{Hot}_{\mathbb{Z}}(SX, SY) \end{array}$$

von Mengen und Abbildungen existiert, so dass dieses Diagramm kommutativ ist. By abuse of notation wird diese Abbildung wieder mit  $S$  bezeichnet.

Abstrakter formuliert – ohne  $X$  und  $Y$  zu fixieren – bedeutet dies, dass ein eindeutiger gestrichelter Funktor, der wieder mit  $S$  bezeichnet wird, im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Top} & \xrightarrow{S} & \text{Kom}(\mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{hTop} & \xrightarrow{\dots S \dots} & \text{Hot}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

von Kategorien und Funktoren existiert, so dass dieses Diagramm kommutativ ist. Dieses Diagramm lebt in der Kategorie der Kategorien (siehe [Sch20, A.2.15]).

Wer mag, kann hier noch rechts die Funktoren  $H_q$  ergänzen und erhält mit B.2.11 das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Top} & \xrightarrow{S} & \text{Kom}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{H_q} & \text{Ab} \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow H_q & \\ \text{hTop} & \xrightarrow{S} & \text{Hot}(\mathbb{Z}) & & \end{array}$$

in der Kategorie der Kategorien. Man kann also die  $q$ -te singuläre Homologie als Funktor  $H_q := H_q \circ S: \text{hTop} \rightarrow \text{Ab}$  auffassen. Insbesondere liefert jede Homotopieäquivalenz  $f: X \rightarrow Y$  topologischer Räume (siehe [Sch20, Definition 3.4.10]) Isomorphismen  $H_q(f): H_q(X) \xrightarrow{\sim} H_q(Y)$ .

### 3.4. Erste Homologie und Fundamentalgruppe.

**3.4.1.** Wir setzen in diesem Abschnitt voraus, dass der Leser die Definition der Fundamentalgruppe  $\pi_1(X, x)$  eines punktierten topologischen Raums  $(X, x)$  kennt (siehe [Sch20, Satz 3.1.16, Definition 3.1.14]). Wir verwenden dieselbe Notation wie in *loc. cit.* – ist insbesondere ein Weg  $\alpha$  in  $X$  gegeben, so bezeichnet  $\bar{\alpha}$  den rückwärts durchlaufenen Weg  $t \mapsto \alpha(1-t)$ , und  $\varepsilon_x$  bezeichnet den konstanten Weg bei  $x \in X$ .

Ist  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg in einem topologischen Raum, so schreiben wir  $[\![\gamma]\!]$  (statt  $[\gamma]$  wie in *loc. cit.*) für seine Klasse bezüglich Homotopie mit festen Endpunkten, um Verwechslungen mit Homologieklassen  $[z] \in H_1 X$  für Zykel  $z \in Z_1 X$  zu vermeiden.

**Satz 3.4.2** (Satz von Hurewicz (elementare Form), vgl. [Wik20, Der Satz von Hurewicz]). *Sei  $(X, x)$  ein punktierter topologischer Raum. Sei  $c: \Delta_1 \xrightarrow{\sim} [0, 1]$  die Projektion  $(s, t) \mapsto t$  auf die zweite Koordinate.*

(a) *Dann gibt es genau einen Morphismus*

$$(3.4.1) \quad \pi_1(X, x) \rightarrow H_1(X)$$

*von Gruppen von der Fundamentalgruppe in die erste singuläre Homologiegruppe mit*

$$[\![\gamma]\!] \mapsto [\gamma \circ c]$$

*für alle geschlossenen Wege  $\gamma \in \Omega(X, x)$ .*

(b) *Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist der von (3.4.1) auf der Abelsonierung  $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$  induzierte Morphismus ein Isomorphismus*

$$\pi_1(X, x)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} H_1(X)$$

*und wird **Hurewicz-Isomorphismus** genannt (siehe [Sch20, Aufgabe 3.10.25] für Definition und universelle Eigenschaft der Abelsonierung  $G^{\text{ab}}$  einer Gruppe  $G$ ).*

*Beweis.* (a) Für jede Schleife  $\gamma \in \Omega(X, x)$  ist  $\gamma \circ c$  offensichtlich ein 1-Zykel, so dass  $\Omega(X, x) \rightarrow H_1 X$ ,  $\gamma \mapsto [\gamma \circ c]$ , eine wohldefinierte Abbildung ist. Zu zeigen bleibt, dass mit-festen-Endpunkten-homotope Wege auf dasselbe Element abgebildet werden.

Für jedes  $\gamma \in \Omega(X, x)$  gibt es genau eine Abbildung  $\tilde{\gamma}$ , so dass das folgende Diagramm kommutiert (die Abbildung  $c$  wird erst später benötigt).

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{c} & [0, 1] \xrightarrow{\gamma} X \\ \text{Exp}=\exp(2\pi i -) \downarrow & & \nearrow \tilde{\gamma} \\ \mathbb{S}^1 & & \end{array}$$

Die Abbildung  $\tilde{\gamma}$  ist stetig, denn die normale Topologie auf  $\mathbb{S}^1$  stimmt mit der Finaltopologie bezüglich der Abbildung  $\text{Exp}$  überein (nach [Sch20, 2.8.81]).

Der singuläre 1-Simplex  $\text{Exp} \circ c$  ist ein Zykel, so dass wir seine Klasse  $[\text{Exp} \circ c] \in H_1(\mathbb{S}^1)$  betrachten können. Wir wenden darauf  $H_1(\tilde{\gamma}): H_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_1(X)$  an und erhalten die folgende Beschreibung von  $[\gamma \circ c]$ :

$$(3.4.2) \quad H_1(\tilde{\gamma})([\text{Exp} \circ c]) = [\tilde{\gamma} \circ \text{Exp} \circ c] = [\gamma \circ c]$$

Sei nun  $\beta \in \Omega(X, x)$  eine Schleife, die zu  $\gamma$  mit-festen-Endpunkten-homotop ist. Wir behaupten, dass dann  $\tilde{\gamma}$  und das analog definierte  $\tilde{\beta}$  homotop sind.

Sei  $h: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$  eine Homotopie mit festen Endpunkten von  $\beta$  nach  $\gamma$ . Mit demselben Argument wie oben induziert  $h$  genau eine stetige Abbildung  $\tilde{h}$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] \times [0, 1] & \xrightarrow{h} & X \\ \text{Exp} \times \text{id} \downarrow & & \nearrow \tilde{h} \\ \mathbb{S}^1 \times [0, 1] & & \end{array}$$

kommutativ ist. Dann ist  $\tilde{h}$  offensichtlich eine Homotopie von  $\tilde{\beta}$  nach  $\tilde{\gamma}$  (die auf  $\{1\} \times [0, 1]$  konstant ist, was uns aber egal ist). Dies zeigt die Behauptung.

Der Satz über die Homotopie-Invarianz der Homologie 3.3.1 liefert nun

$$(3.4.3) \quad [\gamma \circ c] \stackrel{(3.4.2)}{=} H_1(\tilde{\gamma})([\text{Exp} \circ c]) = H_1(\tilde{\beta})([\text{Exp} \circ c]) \stackrel{(3.4.2)}{=} [\beta \circ c]$$

in  $H_1(X)$ . Dies zeigt die Existenz der Abbildung (3.4.1).

Wir müssen noch zeigen, dass sie ein Gruppenmorphismus ist. Sei  $p: \Delta_2 \rightarrow [0, 1]$  die affine Abbildung mit  $p(1, 0, 0) = 0$ ,  $p(0, 1, 0) = \frac{1}{2}$ ,  $p(0, 0, 1) = 1$  (sie drückt das Dreieck flach auf das Intervall). Für beliebige Schleifen  $\beta, \gamma \in \Omega(X, x)$  berechnen wir den Rand des 2-Simplex  $(\gamma * \beta) \circ p$  zu

$$(3.4.4) \quad \partial((\gamma * \beta) \circ p) = \gamma \circ c - (\gamma * \beta) \circ c + \beta \circ c.$$

(Dies gilt auch, falls  $\gamma$  und  $\beta$  verknüpfbare Wege sind und zeigt, dass  $\gamma * \beta \circ c$  und  $\gamma \circ c + \beta \circ c$  homolog sind.) Für Schleifen  $\beta, \gamma \in \Omega(X, x)$  gilt also in  $H_1(X)$

$$[\gamma \circ c] + [\beta \circ c] = [(\gamma * \beta) \circ c].$$

Also ist die Abbildung (3.4.1) ein Gruppenmorphismus (denn die Summe der Bilder von  $[\gamma]$  und  $[\beta]$  ist das Bild von  $[\gamma] * [\beta] = [(\gamma * \beta)]$ ).

Da sein Zielbereich abelsch ist, induziert er nach der universellen Eigenschaft der Abelsierung einen eindeutigen Morphismus

$$\text{can}: \pi_1(X, x)^{\text{ab}} \rightarrow H_1(X)$$

abelscher Gruppen.

Wir ziehen noch eine für den Beweis von (b) nützliche Konsequenz aus diesen Überlegungen. Sei  $\beta$  ein beliebiger Weg in  $X$  (mit nicht notwendig demselben Start- wie Endpunkt hat). Wir erklären die Gleichheiten

$$[\bar{\beta} \circ c + \beta \circ c] = [(\bar{\beta} * \beta) \circ c] = [\varepsilon_{\beta(0)} \circ c] = 0$$

in  $H_1 X$ . Die erste folgt aus (3.4.4) (beachte, dass  $\bar{\beta} \circ c + \beta \circ c$  ein Zykel ist, auch wenn die Summanden dies im Allgemeinen nicht sind). Die zweite folgt aus der Wohldefiniertheit der Abbildung (3.4.1) oder genauer

aus (3.4.3), da die Schleife  $\bar{\beta} * \beta$  homotop zur konstanten Schleife  $\varepsilon_{\beta(0)}$  ist. Die dritte Gleichheit folgt, da (3.4.1) ein Morphismus von Gruppen ist. Mit anderen Worten gilt:

$$(3.4.5) \quad \bar{\beta} \circ c + \beta \circ c \quad \text{ist nullhomolog.}$$

(b) Sei nun  $X$  wegzusammenhängend. Wir konstruieren in diesem Fall die inverse Abbildung zu  $\text{can}$  und fixieren dazu für jeden Punkt  $y \in X$  einen Weg  $\alpha_y \in \Omega(X, x, y)$  von  $x$  nach  $y$ . Sei  $\sigma: \Delta_1 \rightarrow X$  ein 1-Simplex. Betrachte die Schlaufe „gehe von  $x$  zum Startpunkt  $\sigma(1, 0) = \sigma(c^{-1}(0))$  von  $\sigma \circ c^{-1}$ , durchlaufe diesen Weg bis zu seinem Endpunkt  $\sigma(0, 1)$  und gehe zurück nach  $x$ “

$$(3.4.6) \quad w(\sigma) := \bar{\alpha}_{\sigma(0,1)} * (\sigma \circ c^{-1}) * \alpha_{\sigma(1,0)}.$$

Dehne die Zuordnung  $\sigma \mapsto w(\sigma)$  (wobei wir eigentlich die Klasse der Schleife  $w(\sigma)$  in der Abelsonisierung meinen, die strenggenommen als  $\llbracket w(\sigma) \rrbracket$  notiert wird) zu einem Morphismus

$$w: S_1 X \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

abelscher Gruppen aus (dies funktioniert, da die Gruppe rechts abelsch ist). Wir behaupten, dass dieser alle Ränder in  $B_1 X$  auf Null abbildet. Dazu genügt es zu zeigen, dass in der Abelsonisierung  $w(\partial(\tau)) = 1$  (= neutrales Element von  $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ ) für alle 2-Simplizes  $\tau \in \Delta_2 \rightarrow X$  gilt. Wir berechnen

$$\partial(\tau) = \tau \circ k_0 - \tau \circ k_1 + \tau \circ k_2$$

und erhalten (mit  $*$  als Verknüpfungssymbol in der abelschen Gruppe  $\pi_1(X, x)^{\text{ab}}$ ), wobei man sich  $t \in [0, 1]$  variabel denke,

$$\begin{aligned} w(\partial(\tau)) &= \left( \bar{\alpha}_{\tau(0,0,1)} * \tau(0, 1-t, t) * \alpha_{\tau(0,1,0)} \right) * \left( \bar{\alpha}_{\tau(0,0,1)} * \tau(1-t, 0, t) * \alpha_{\tau(1,0,0)} \right)^{-1} \\ &\quad * \left( \bar{\alpha}_{\tau(0,1,0)} * \tau(1-t, t, 0) * \alpha_{\tau(1,0,0)} \right) \\ (\text{da abelsch}) &= \left( \bar{\alpha}_{\tau(0,1,0)} * \tau(1-t, t, 0) * \alpha_{\tau(1,0,0)} \right) * \left( \bar{\alpha}_{\tau(0,0,1)} * \tau(1-t, 0, t) * \alpha_{\tau(1,0,0)} \right)^{-1} \\ &\quad * \left( \bar{\alpha}_{\tau(0,0,1)} * \tau(0, 1-t, t) * \alpha_{\tau(0,1,0)} \right) \\ &= \bar{\alpha}_{\tau(0,1,0)} * \tau(1-t, t, 0) * \alpha_{\tau(1,0,0)} * \bar{\alpha}_{\tau(1,0,0)} * \tau(t, 0, 1-t) * \alpha_{\tau(0,0,1)} * \bar{\alpha}_{\tau(0,0,1)} * \tau(0, 1-t, t) * \alpha_{\tau(0,1,0)} \\ &= \bar{\alpha}_{\tau(0,1,0)} * \left( \tau(1-t, t, 0) * \tau(t, 0, 1-t) * \tau(0, 1-t, t) \right) * \alpha_{\tau(0,1,0)}. \end{aligned}$$

Der eingeklammerte Teilausdruck ist die „Einschränkung von  $\tau$  auf den Rand des Dreiecks  $\Delta_2$ “, aufgefasst als Schleife bei  $\tau(0, 1, 0)$  (nach Wahl einer geeigneten Parametrisierung des Dreiecksrandes). Diese Schleife ist offensichtlich mit-festen-Endpunkten-homotop zur konstanten Schleife bei  $\tau(0, 1, 0)$ , weswegen wir  $w(\partial(\tau)) = 1$  erhalten. Unsere Abbildung  $w$  oder genauer ihre Einschränkung auf  $Z_1 X$  induziert also einen Morphismus

$$\bar{w}: H_1 X \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$$

abelscher Gruppen.<sup>37</sup>

Zu zeigen bleibt, dass  $\text{can}$  und  $\bar{w}$  zueinander invers sind. Für jeden Weg  $\gamma \in \Omega(X, x)$  gilt

$$\bar{w}(\text{can}(\llbracket \gamma \rrbracket)) = \bar{w}([\gamma \circ c]) = \bar{\alpha}_{\gamma(1)} * \gamma * \alpha_{\gamma(0)} = \alpha_x^{-1} * \alpha_x * \gamma = \gamma = \llbracket \gamma \rrbracket.$$

Dies zeigt  $\bar{w} \circ \text{can} = \text{id}$ .

Sei nun  $\sigma: \Delta_1 \rightarrow X$  wie oben ein 1-Simplex. Dann ist  $w(\sigma)$  durch (3.4.6) gegeben. Durch zweimaliges Verwenden der Klammerbemerkung nach (3.4.4) für verknüpfbare Wege erhalten wir, dass die beiden singulären 1-Ketten

- $w(\sigma) \circ c$  und
- $\bar{\alpha}_{\sigma(0,1)} \circ c + \sigma + \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c$

homolog sind. Da  $\bar{\alpha}_{\sigma(0,1)} \circ c + \alpha_{\sigma(0,1)} \circ c$  nach (3.4.5) nullhomolog ist, können wir im zweiten Ausdruck  $\bar{\alpha}_{\sigma(0,1)} \circ c$  durch  $-\alpha_{\sigma(0,1)} \circ c$  ersetzen. Subtraktion von  $\sigma$  liefert dann, dass

- $w(\sigma) \circ c - \sigma$  und
- $-\alpha_{\sigma(0,1)} \circ c + \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c$

<sup>37</sup>Sogar einen Morphismus  $\bar{w}: \frac{S_1 X}{B_1 X} \rightarrow \pi_1(X, x)^{\text{ab}}$  abelscher Gruppen.

homolog sind. Definieren wir  $\delta: S_0X \rightarrow S_1X$  durch  $\delta(y) = \alpha_y \circ c$  für alle  $y \in X$  (alias 0-Simplizes) und  $\mathbb{Z}$ -lineare Fortsetzung, so sind

- $\sigma - w(\sigma) \circ c$  und
- $\alpha_{\sigma(0,1)} \circ c - \alpha_{\sigma(1,0)} \circ c = \delta(\sigma(0,1) - \sigma(1,0)) = \delta(\partial(\sigma))$

homolog. Ist nun  $a \in S_1X$  eine beliebige 1-Kette, also eine Linearkombination von 1-Simplizes  $\sigma$  wie oben, so sind also

- $a - \text{can}(w(a))$  und<sup>38</sup>
- $\delta(\partial(a))$

homolog. Ist nun  $a \in Z_1X$  ein 1-Zykel, so folgt  $[a] - \text{can}(w(a)) = 0$  in  $H_1(X)$  oder äquivalent  $\text{can}(\overline{w}([a])) = \text{can}(w(a)) = [a]$ . Dies zeigt  $\text{can} \circ \overline{w} = \text{id}$ .  $\square$

**3.4.3.** Aus dem Beweis des Satzes von Hurewicz 3.4.2 sind die folgenden Eigenschaften von 1-Simplizes merkwürdig; man kann alle auch direkt beweisen, vgl. Aufgabe 3.1.26:

- Ist  $\varepsilon_x: \Delta_1 \rightarrow X$  ein konstanter 1-Simplex mit Wert  $x \in X$ , d. h.  $\varepsilon(s, t) = x$  für alle  $(s, t) \in \Delta_1$ , so ist  $\varepsilon_x$  nullhomolog (= ein Rand). Dies haben wir bereits in Beispiel 3.1.20 nachgerechnet, alternativ folgt es aus der Tatsache, dass (3.4.1) ein Gruppenmorphismus ist.
- Sei  $\sigma: \Delta_1 \rightarrow X$  ein 1-Simplex und  $\bar{\sigma}$  der „umgedrehte“ 1-Simplex  $\bar{\sigma}(s, t) = \sigma(t, s)$ . Dann ist  $\sigma$  homolog zu  $-\bar{\sigma}$  (= die Differenz  $\sigma - (-\bar{\sigma}) = \sigma + \bar{\sigma}$  ist ein Rand) (siehe Aufgabe 3.1.26 oder (3.4.5)).
- Seien  $\sigma, \tau: \Delta_1 \rightarrow X$  zwei 1-Simplizes mit  $\sigma(0, 1) = \tau(1, 0)$ , d. h. der Endpunkt von  $\sigma$  ist der Anfangspunkt von  $\tau$ . Sei  $\tau * \sigma: \Delta_1 \rightarrow X$  der 1-Simplex, der „zuerst  $\sigma$  und dann  $\tau$  durchläuft“. Dann sind  $\tau + \sigma$  und  $\tau * \sigma$  homolog (= ihre Differenz ist ein Rand) (siehe (3.4.4)).

**Beispiel 3.4.4.** Für die Kreislinie  $S^1$  haben wir Isomorphismen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1, 1)^{\text{ab}} \xrightarrow{\sim} H_1(S^1).$$

Der erste Isomorphismus ist in [Sch20, Satz 3.2.14] erklärt – damit ist die Fundamentalgruppe insbesondere abelsch. Für jede Gruppe  $G$  ist der kanonische Morphismus  $G \xrightarrow{\sim} G^{\text{ab}}$  genau dann ein Isomorphismus, wenn  $G$  abelsch ist – dies erklärt den zweiten Isomorphismus. Der dritte ist der Hurewicz-Isomorphismus aus Satz 3.4.2.

Unter diesen Isomorphismen wird  $1 \in \mathbb{Z}$  zuerst auf die Klasse des Wegs  $\text{Exp}: [0, 1] \rightarrow S^1$  abgebildet und dann auf die Homologieklass des singulären 1-Zykels  $[\text{Exp} \circ c]$ . Mit anderen Worten ist  $H_1(S^1)$  die freie abelsche Gruppe über  $[\text{Exp} \circ c]$ , in Formeln  $H^1(S^1) = \mathbb{Z}[\text{Exp} \circ c]$ .

Analoges gilt für  $\mathbb{C}^\times$  (mit beliebigem Basispunkt, etwa 1; siehe [Sch20, Beispiel 3.2.20]).<sup>39</sup>

**Beispiel 3.4.5.** Die Fundamentalgruppe der Figur Acht  $X = \square$  in der Zeichenebene ist isomorph zur freien Gruppe  $\langle a, b \rangle$  in zwei Erzeugern (siehe [Sch20, Bsp. 3.10.7]). Wegen  $\langle a, b \rangle^{\text{ab}} = \mathbb{Z}\langle a, b \rangle$  folgt  $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^2$  aus Satz 3.4.2.

**Beispiel 3.4.6.** Sei  $n \geq 2$ . Da die Fundamentalgruppe  $\pi_1(S^n, x)$  für jeden Basispunkt trivial ist (siehe [Sch20, Satz 3.1.25]), folgt  $H_1(S^n) = \{0\}$  aus Satz 3.4.2.

Ende der 7. Vorlesung am 19.11.2020.

## 4. RELATIVE SINGULÄRE HOMOLOGIE

**4.0.1.** Relative singuläre Homologie wird sich als mächtiges Werkzeug zur Berechnung der singulären Homologie herausstellen. Singuläre Homologie ist ein Spezialfall der relativen singulären Homologie. Die wichtigsten Werkzeuge, die wir kennenlernen werden, sind gewisse lange exakte Sequenzen und Ausschneidung.

<sup>38</sup>Das Element  $\text{can}(w(a))$  lebt eigentlich in  $H_1X$ . Hier ist ein beliebiger Lift dieses Elements in  $Z_1X \subset S_1X$  gemeint.

<sup>39</sup>Wer sich allgemeiner für die erste Homologie offener Teilmengen der Zeichenebene  $\mathbb{C}$  interessiert, sei auf [Soe20, Satz 1.6.3] verwiesen.

#### 4.1. Definition der relativen singulären Homologie.

**Definition 4.1.1.** Ein **Raumpaar**  $(X, Z)$  besteht aus einem topologischen Raum  $X$  und einer Teilmenge  $Z \subset X$ .

**Definition 4.1.2.** Sei  $(X, Z)$  ein Raumpaar. Die Inklusion  $i = i_Z: Z \hookrightarrow X$  liefert einen Morphismus  $S_i: SZ \rightarrow SX$  von Komplexen (durch Anwenden des Funktors  $S: \text{Top} \rightarrow \text{Kom}(\mathbb{Z})$ ). Für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  ist seine  $q$ -te Komponente  $S_q i: S_q Z \rightarrow S_q X$  offensichtlich injektiv<sup>40</sup> ist, so dass wir  $SZ \subset SX$  als Unterkomplex auffassen können (Definition B.1.19). Der Quotientenkomplex

$$S(X, Z) := \frac{SX}{SZ} = SX/SZ$$

heißt **Komplex der singulären Ketten von  $X$  relativ zu  $Z$**  oder **Komplex der relativen singulären Ketten von  $(X, Z)$** . Seine  $q$ -te Komponente  $S(X, Z)_q$  wird meist als  $S_q(X, Z)$  notiert, in Formeln

$$S_q(X, Z) := S(X, Z)_q = \frac{S_q X}{S_q Z} = S_q X / S_q Z$$

Ihre Elemente heißen **relative singuläre  $q$ -Ketten von  $(X, Z)$**  oder genauer **singuläre  $q$ -Ketten in  $X$  relativ zu  $Z$** .

Die  $q$ -te Homologiegruppe

$$H_q(X, Z) := H_q(S(X, Z))$$

heißt  **$q$ -te relative singuläre Homologie von  $(X, Z)$**  oder  **$q$ -te singuläre Homologie von  $X$  relativ zu  $Z$** . Die Gruppen  $B_q(X, Z)$  der **relativen singulären  $q$ -Ränder** und  $Z_q(X, Z)$  der **relativen singulären  $q$ -Zykel** werden in offensichtlicher Weise definiert.

All diese Bezeichnungen sind etwas sperrig, so dass man sie oft verkürzt und etwa von relativen Ketten spricht.

**4.1.3.** Zur Illustration ein Bild des Diagramms  $SZ \subset SX \rightarrow S(X, Z) = \frac{SX}{SZ}$ , in dem man sich die Komplexe senkrecht ins unendliche ausgedehnt vorstelle.

$$\begin{array}{ccccc} S_q Z & \subset & S_q X & \longrightarrow & S_q(X, Z) \\ \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q \\ S_{q-1} Z & \subset & S_{q-1} X & \longrightarrow & S_{q-1}(X, Z) \end{array}$$

**4.1.4.** Im Fall  $Z = \emptyset \subset X$  gilt kanonisch  $SX = S(X, \emptyset)$  und  $H_q X = H_q(X, \emptyset)$ . Insbesondere verallgemeinert die gerade definierte relative Theorie (Komplexe relativer singulärer Ketten, relative singuläre Homologie) die zuvor eingeführte Theorie (Komplexe singulärer Ketten, singuläre Homologie).

**4.1.5.** Jedes Element von  $H_q(X, Z)$  kann durch eine  $q$ -Kette  $k \in S_q(X)$  mit  $\partial(k) \in S_{q-1}(Z)$  repräsentiert werden (denn solche Elemente repräsentieren relative  $q$ -Zykel).

**4.1.6.** Wir behaupten, dass  $S_q(X, Z)$  eine freie abelsche Gruppe ist und als  $\mathbb{Z}$ -Basis die Menge aller  $q$ -Simplizes  $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$  hat, deren Bild nicht in  $Z$  enthalten ist.

Dies folgt aus der Inklusion  $\text{Top}(\Delta_q, Z) \subset \text{Top}(\Delta_q, X)$  und der folgenden allgemeinen Beobachtung: Ist  $E \subset F$  die Inklusion einer Teilmenge, so gilt  $F = E \sqcup (F \setminus E)$  und somit  $\mathbb{Z}F = \mathbb{Z}E \oplus \mathbb{Z}(F \setminus E)$ . Also ist die kanonische Verknüpfung  $\mathbb{Z}(F \setminus E) \subset \mathbb{Z}F \rightarrow \frac{\mathbb{Z}F}{\mathbb{Z}E}$  ein Isomorphismus abelscher Gruppen; die Quotientengruppe ist also eine freie abelsche Gruppe mit  $\mathbb{Z}$ -Basis die Klassen aller Elemente von  $F \setminus E$ .

**Beispiel 4.1.7.** Wir werden später sehen, dass  $H_1([a, b], \{a, b\}) \cong H_1(\Delta_1, \{e_0, e_1\}) \cong \mathbb{Z}$  gilt (Beispiel 4.2.2, Satz 4.7.5). Der Leser versuche, sich diese Aussage plausibel zu machen und einen Erzeuger dieser Homologiegruppe zu finden.

**Definition 4.1.8.** Ein Morphismus von Raumpaaren  $f: (X, Z) \rightarrow (Y, T)$  ist eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  mit  $f(Z) \subset T$ . Die Kategorie der Raumpaare wird als  $\text{Top}^{\subset}$  notiert.

<sup>40</sup> Zunächst ist  $i_Z \circ: \text{Top}(\Delta_q, Z) \hookrightarrow \text{Top}(\Delta_q, X)$  injektiv. Ist  $E \hookrightarrow F$  eine injektive Abbildung von Mengen, so ist auch die induzierte Abbildung  $\mathbb{Z}E \rightarrow \mathbb{Z}F$  auf den freien abelschen Gruppen injektiv, symbolisch  $\mathbb{Z}E \hookrightarrow \mathbb{Z}F$ .

**4.1.9** (Relative Ketten und relative Homologie als Funktoren). Sei  $f: (X, Z) \rightarrow (Y, T)$  ein Morphismus von Raumpaaren. Dann gibt es genau einen Morphismus

$$(4.1.1) \quad Sf: S(X, Z) \rightarrow S(Y, T)$$

von Komplexen, der das rechte Quadrat im Diagramm

$$(4.1.2) \quad \begin{array}{ccccc} SZ & \subset & SX & \twoheadrightarrow & S(X, Z) \\ \downarrow Sf & & \downarrow Sf & & \downarrow \exists! Sf \\ ST & \subset & SY & \twoheadrightarrow & S(Y, T). \end{array}$$

kommutativ macht, denn das linke Quadrat ist offensichtlich kommutativ und somit verschwindet die Verknüpfung der beiden roten Pfeile auf  $SZ$  (universelle Eigenschaft des Quotienten [B.1.20](#)).

Anwenden des Funktors  $H_q: \text{Kom}(\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ab}$  auf [\(4.1.1\)](#) liefert die Abbildung

$$H_q f := H_q(Sf): H_q(X, Z) \rightarrow H_q(Y, T)$$

zwischen den relativen Homologien der beiden beteiligten Raumpaare.

In kategorieller Sprache erhalten wir Funktoren „Komplex der relativen Ketten“

$$S: \text{Top}^C \rightarrow \text{Kom}(\mathbb{Z})$$

und „ $q$ -te relative Homologie“

$$H_q := H_q \circ S: \text{Top}^C \xrightarrow{S} \text{Kom}(\mathbb{Z}) \xrightarrow{H_q} \text{Ab}.$$

**Aufgabe 4.1.10** (Variante von [3.1.23](#) für relative Homologie). Sei  $X$  ein topologischer Raum und gelte  $X = \bigsqcup X_w$  als Mengen, wobei jede Teilmenge  $X_w$  offen in  $X$  ist<sup>41</sup> (oder allgemeiner jedes  $X_w$  eine Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von  $X$  ist). Seien  $Z_w \subset X_w$  beliebige Teilmengen und sei  $Z := \bigsqcup Z_w \subset X$  ihre Vereinigung. Dann induzieren die Einbettungen  $X_w \hookrightarrow X$  Isomorphismen  $\bigoplus S(X_w, Z_w) \xrightarrow{\sim} S(X, Z)$  und  $\bigoplus H_q(X_w, Z_w) \xrightarrow{\sim} H_q(X, Z)$ .

Hinweis: [3.1.23](#).

**Aufgabe 4.1.11** (Homotopie-Invarianz der relativen singulären Homologie – „Relativisierung“ von Satz [3.3.1](#)). Seien  $f, g: (X, Z) \rightarrow (Y, T)$  zwei Morphismen von Raumpaaren. Eine **Homotopie von  $f$  nach  $g$**  ist ein Morphismus

$$h: (X \times [0, 1], Z \times [0, 1]) \rightarrow (Y, T)$$

von Raumpaaren mit  $h \circ i_0 = f$  und  $h \circ i_1 = g$ , wobei  $i_t: (X, Z) \rightarrow (X \times [0, 1], Z \times [0, 1])$ ,  $x \mapsto (x, t)$ , die Inklusion zur Zeit  $t \in [0, 1]$  ist. Existiert eine solche, nennt man  $f$  und  $g$  **homotop**.

Sind  $f$  und  $g$  homotop, so sind die beiden Morphismen  $Sf, Sg: S(X, Z) \rightarrow S(Y, T)$  homotop und induzieren dieselbe Abbildung

$$H_q(f) = H_q(g): H_q(X, Z) \rightarrow H_q(Y, T)$$

auf den relativen Homologien für alle  $q \in \mathbb{Z}$ .

Hinweis: Passe den Beweis von Satz [3.3.1](#) an.

Bonusaufgabe: Sind  $f, g$  sowohl homotop als Morphismen  $X \rightarrow Y$  als auch als Morphismen  $f, g: Z \rightarrow T$  (aber nicht als Morphismen von Raumpaaren), so gilt im Allgemeinen nicht  $H_q(f) = H_q(g): H_q(X, Z) \rightarrow H_q(Y, T)$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$ . (Lösung der Bonusaufgabe auskommentiert – vermutlich ist es aber nötig, Satz [4.2.1](#) zum Berechnen einige relativer Homologien zu verwenden)

**Lösung 4.1.12** (der Bonusaufgabe). Sei  $f = \text{Exp}: X := [0, 1] \rightarrow Y := \mathbb{S}^1$  und sei  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $x \mapsto 1$ . Seien  $Z := \{0, 1\} \subset X$  und  $T := \{1\} \subset \mathbb{S}^1$ . Dann sind  $f, g$  homotop als Morphismen  $X \rightarrow Y$  und (sogar gleich) als Morphismen  $Z \rightarrow T$ , aber es gilt  $H_1(f) \neq H_1(g): H_1(X, Z) \rightarrow H_1(Y, T)$  – um dies zu sehen, verwende man Beispiel [4.2.2](#) und berechne  $H_1(\mathbb{S}^1, \{1\})$  in ähnlicher Weise mit Hilfe des Hurewicz-Isomorphismus (oder mit Satz [4.5.1](#)).

<sup>41</sup>Dann ist auch jedes  $X_w$  abgeschlossen in  $X$  (und damit eine Vereinigung von Wegzusammenhangskomponenten von  $X$ ).



**Beispiel 4.2.2.** Betrachte das Raumpaard  $([a, b], \{a, b\})$  bestehend aus einem kompakten Intervall und seinem topologischen Rand. Die zugeordnete lange exakte Homologiesequenz hat die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \dots & & & \text{H}_2([a, b], \{a, b\}) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{H}_1([a, b], \{a, b\}) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{H}_0([a, b], \{a, b\}) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \dots
 \end{array}$$

Nach unseren bisherigen Erkenntnissen verschwinden in der

- linken Spalte alle Gruppen bis auf  $\text{H}_0\{a, b\} = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \cong \mathbb{Z}^2$  (Isomorphismus (3.1.6), Beispiel 3.1.21) und
- in der mittleren Spalte alle Gruppen bis auf  $\text{H}_0[a, b] = \mathbb{Z}a \cong \mathbb{Z}$  (Lemma 3.1.24, Satz 3.1.27).

Die rote Abbildung hat also  $\text{H}_0([a, b], \{a, b\})$  als Kokern und  $\text{H}_1([a, b], \{a, b\})$  als Kern (im kategoriellen Sinn, sonst kanonisch isomorph zu Kokern bzw. Kern), und es gilt  $\text{H}_q([a, b], \{a, b\}) = 0$  für alle  $q \notin \{0, 1\}$ . Die rote Abbildung ist aber in Matrixschreibweise als

$$\text{H}_0\{a, b\} = \mathbb{Z}a \oplus \mathbb{Z}b \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}} \text{H}_0[a, b] = \mathbb{Z}a$$

gegeben, hat  $\mathbb{Z}(b - a)$  als Kern und ist surjektiv. Es folgt  $\text{H}_0([a, b], \{a, b\}) = 0$  und  $\text{H}_1([a, b], \{a, b\}) \cong \mathbb{Z}(b - a) \cong \mathbb{Z}$ .

Die Klasse des relativen 1-Zykels  $\sigma: \Delta_1 \rightarrow [a, b], (x_0, x_1) \mapsto x_0a + x_1b$ , in  $\text{H}_1([a, b], \{a, b\})$  wird unter dem Randoperator  $\tilde{\partial}_1: \text{H}_1([a, b], \{a, b\}) \rightarrow \text{H}_0(\{a, b\})$  auf  $b - a$  abgebildet und ist somit eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\text{H}_1([a, b], \{a, b\})$ .

**Korollar 4.2.3.** Sei  $f: (X, Z) \rightarrow (Y, T)$  ein Morphismus von Raumpaaren. Induziert  $f$  Isomorphismen  $\text{H}_q f: \text{H}_q Z \xrightarrow{\sim} \text{H}_q T$  und  $\text{H}_q f: \text{H}_q X \xrightarrow{\sim} \text{H}_q Y$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$ , so induziert  $f$  auch Isomorphismen

$$\text{H}_q f: \text{H}_q(X, Z) \xrightarrow{\sim} \text{H}_q(Y, T)$$

auf den relativen Homologien für alle  $q \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* In dem explizit angegebenen Ausschnitt des kommutativen Diagramms (4.2.1) aus Satz 4.2.1.(b) sind die beiden äußeren Vertikalen nach Annahme Isomorphismen. Da die Zeilen exakt sind, zeigt das Fünferlemma B.4.1, dass auch die mittlere Vertikale ein Isomorphismus ist. Wer mag, kann auch Aufgabe B.3.7 auf das Diagramm (4.1.2) anwenden, in dem die beiden linken Vertikalen Quasi-Isomorphismen sind.  $\square$

**4.2.4** (Lange exakte Homologiesequenz eines Raumtripels). Sei  $X$  ein topologischer Raum mit Teilmengen  $Z \subset Y \subset X$ ; man nennt  $(X, Y, Z)$  ein **Raumtripel**. Dann liefern die offensichtlichen Abbildungen eine kurze exakte Sequenz

$$\frac{SY}{SZ} \hookrightarrow \frac{SX}{SZ} \rightarrow \frac{SX}{SY} \quad \text{alias} \quad S(Y, Z) \hookrightarrow S(X, Z) \rightarrow S(X, Y)$$

in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$  (wie man leicht komponentenweise testet; wer mag, kann allgemeiner den dritten Isomorphiesatz  $\frac{A}{U} \xrightarrow{\sim} \frac{\frac{A}{V}}{\frac{U}{V}}$  für Unterkomplexe  $V \subset U \subset A$  eines Komplexes  $A$  beweisen und verwenden) und damit nach Satz B.3.4 eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \dots & & & \text{H}_{p+1}(X, Y) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \text{H}_p(X, Y) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \dots
 \end{array}$$

Für  $Z = \emptyset$  spezialisiert diese zur langen exakten Homologisequenz des Raumpaars  $(X, Y)$  aus Satz 4.2.1.

Ende der 8. Vorlesung am 20.11.2020.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 4.1.11
- (2) Aufgabe B.3.5 (Beweis lange exakte Homologie-Sequenz, Satz B.3.4)
- (3) Aufgabe B.3.6 (Funktorialität lange exakte Homologie-Sequenz)
- (4) Aufgabe B.4.2 (Beweis Fünferlemma B.4.1)

Olaf: Erkläre auch Aufgabe B.3.7.

### 4.3. Satz über feine Ketten.

**4.3.1.** Unser Nahziel ist der eher technische Satz über feine Ketten 4.3.10, aus dem wir einerseits den Satz über die Mayer-Vietoris-Sequenz 4.4.1 und andererseits den Ausschneidungssatz 4.7.1 herleiten. Diese beiden Sätze bilden starke Hilfsmittel zur Berechnung der singulären Homologie; beispielsweise erlauben beide die Berechnung der singulären Homologie der Sphären (Satz 4.5.1 oder alternativ 4.7.8); eine weitere Anwendung ist der Fixpunktsatz von Brouwer 4.5.8. Wer Motivation benötigt, möge sich zunächst den Abschnitt 4.4 über die Mayer-Vietoris-Sequenz oder den Abschnitt 4.7 über Ausschneidung ansehen.

**4.3.2.** Wir werden im Folgenden etwas Kategorientheorie benötigen, die wir in Appendix A erklären.

**Lemma 4.3.3** (Variante des Yoneda-Lemmas A.0.13). *Für alle  $q \in \mathbb{N}$  und alle Funktoren  $G: \text{Top} \rightarrow \text{Ab} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$  (alias Objekte  $G \in \text{Ab}^{\text{Top}}$ ) ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \text{Ab}^{\text{Top}}(S_q, G) &\xrightarrow{\sim} G(\Delta_q), \\ \tau &\mapsto \tau_{\Delta_q}(\text{id}_{\Delta_q}) = \tau(\text{id}_{\Delta_q}), \end{aligned}$$

eine Bijektion. Das Element  $\text{id}_{\Delta_q} \in \text{Top}(\Delta_q, \Delta_q) \subset S_q \Delta_q$  wird als **tautologischer  $q$ -Simplex** bezeichnet. In Worten ist also eine natürliche Transformation  $\tau: S_q \rightarrow G$  eindeutig durch ihren Wert  $\tau(\text{id}_{\Delta_q})$  am tautologischen  $q$ -Simplex bestimmt und definierbar.

Die Umkehrabbildung bildet ein Element  $g \in G(\Delta_q)$  auf diejenige Transformation  $\tau: S_q \Rightarrow G$  ab, für die  $\tau_X: S_q X \rightarrow GX$  der eindeutige Gruppenmorphismus mit  $\tau_X(\sigma) = G(\sigma)(g)$  für alle topologischen Räume  $X$  und alle  $q$ -Simplizes  $\sigma: \Delta_q \rightarrow X$  ist.

*Beweis.* Betrachte das Diagramm

$$(4.3.1) \quad \begin{array}{ccc} & \text{Top} & \\ \text{Top}(\Delta_q, -) \swarrow & & \searrow G \\ \text{Set} & \xrightarrow{\mathbb{Z}-} & \text{Ab} \\ & \xleftarrow{V} & \end{array}$$

von Kategorien und Funktoren, wobei  $V$  der Vergiss-Funktor ist,  $\mathbb{Z}-$  der Freie-abelsche-Gruppe-Funktor und  $\text{Top}(\Delta_q, -)$  der durch das Objekt  $\Delta_q \in \text{Top}$  dargestellte Funktor (siehe Definition A.0.12).

Lemma A.0.22 liefert in dieser Situation wegen  $S_q = \mathbb{Z} \text{Top}(\Delta_q, -) = (\mathbb{Z}-) \circ \text{Top}(\Delta_q, -)$  die erste der beiden folgenden Bijektionen, die zweite ist eine Anwendung des Yoneda-Lemmas A.0.13.

$$\text{Ab}^{\text{Top}}(S_q, G) \xrightarrow{\sim} \text{Set}^{\text{Top}}(\text{Top}(\Delta_q, -), VG) \xrightarrow{\sim} V(G(\Delta_q)) = G(\Delta_q).$$

Ein Element  $\tau = (\tau_X)_{X \in \text{Top}}$  der linken Menge hat als Komponenten Morphismen  $\tau_X: S_q X \rightarrow G(X)$ . Sein Bild in der Mitte hat als Komponenten die Einschränkungen  $\tau_X|_{\text{Top}(\Delta_q, X)}$  entlang der Inklusionen  $\text{Top}(\Delta_q, X) \subset S_q X$ . Die Yoneda-Bijektion nimmt dann das Bild von  $\text{id}_{\Delta_q} \in \text{Top}(\Delta_q, \Delta_q)$  unter der  $\Delta_q$ -Komponente

$$\tau_{\Delta_q}|_{\text{Top}(\Delta_q, \Delta_q)}: \text{Top}(\Delta_q, \Delta_q) \rightarrow V(G(\Delta_q)) = G(\Delta_q).$$

Die Aussage über die Umkehrabbildung ist nun klar. □

**Beispiel 4.3.4.** Die natürliche Transformation  $\partial = \partial_q: S_q \Rightarrow S_{q-1}$  (siehe Beispiel A.0.7) entspricht unter der Bijektion aus Lemma 4.3.3 dem Element  $\partial_q(\text{id}_{\Delta_q}) = \partial_q^{\Delta_q}(\text{id}_{\Delta_q}) \stackrel{(3.1.2)}{=} \sum_{i=0}^q (-1)^i k_i^q \in S_{q-1}(\Delta_q)$ , also der alternierenden Summe der „Seitenflächen“ des Standard- $q$ -Simplex.

Ende der 9. Vorlesung am 26.11.2020.

**Definition 4.3.5.** Wie definieren im Folgenden natürliche Transformationen

$$U_q: S_q \Rightarrow S_q: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$$

für alle  $q \in \mathbb{Z}$  und nennen diese (**baryzentrische**) **Unterteilungsoperatoren**; diese führen bei jedem singulären Simplex eine „baryzentrische Unterteilung“ durch, vgl. [Wik20, Barycentric subdivision]. Setze  $U_q := 0$  für  $q < 0$  (einzige Möglichkeit) und  $U_0 = \text{id}_{S_0}$ . Um die Transformationen  $U_q$  für  $q > 0$  zu definieren, genügt es nach Lemma 4.3.3, die Werte  $(U_q)_{\Delta_q}(\text{id}_{\Delta_q}) \in S_q(\Delta_q)$  auf dem tautologischen Simplex vorzugeben. Induktiv definieren wir  $U_q$  durch

$$(4.3.2) \quad (U_q)_{\Delta_q}(\text{id}_{\Delta_q}) := P_{q-1} \left( \underbrace{(U_{q-1})_{\Delta_q} \left( \overbrace{\partial(\text{id}_{\Delta_q})}^{\substack{= \sum (-1)^i k_i^q \in S_{q-1} \Delta_q}} \right)}_{= \sum (-1)^i S_q(k_i^q) \left( (U_{q-1})_{\Delta_{q-1}}(\text{id}_{\Delta_{q-1}}) \right) \in S_{q-1} \Delta_q} \right) \in S_q(\Delta_q),$$

wobei

$$P_{q-1} = P(s_q, \Delta_q)_{q-1}: S_{q-1} \Delta_q \rightarrow S_q \Delta_q$$

der Prismen-Operator (3.1.8) zum Schwerpunkt  $s_q := \frac{1}{q+1}(1, 1, \dots, 1)$  der konvexen Teilmenge  $\Delta_q \subset \mathbb{R}^{q+1}$  ist.

**Beispiel 4.3.6.** Es gilt

$$\begin{aligned} (U_1)_{\Delta_1}(\text{id}_{\Delta_1}) &= P_0 \left( (U_0)_{\Delta_1}((0, 1) - (1, 0)) \right) = P_0((0, 1) - (1, 0)) \\ &= \text{„1-Simplex von } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ nach } (0, 1)\text{“} - \text{„1-Simplex von } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ nach } (1, 0)\text{“} \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} (U_1)_X(\sigma) &= S_1(\sigma) \left( (U_1)_{\Delta_1}(\text{id}_{\Delta_1}) \right) = \text{„1-Simplex in } X \text{ von } \sigma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ nach } \sigma(0, 1)\text{“} \\ &\quad - \text{„1-Simplex in } X \text{ von } \sigma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ nach } \sigma(1, 0)\text{“} \end{aligned}$$

für alle topologischen Räume  $X$  und 1-Simplizes  $\sigma: \Delta_1 \rightarrow X$ .

**Baryzentrische Unterteilungen  $U_q$  durch Bilder erklären für  $q = 1, 2$ , vgl. [Soe20, S. 60].**

**Lemma 4.3.7.** Für jeden topologischen Raum  $X \in \text{Top}$  kommutieren die Abbildungen  $(U_q)_X: S_q X \rightarrow S_q X$  mit den Differentialen  $\partial_q: S_q X \rightarrow S_{q-1} X$  und definieren somit einen Morphismus

$$U_X := ((U_q)_X)_{q \in \mathbb{Z}}: S X \rightarrow S X$$

von Komplexen. In kategorieller Sprache ist also

$$(4.3.3) \quad U := (U_q)_{q \in \mathbb{Z}}: S \Rightarrow S: \text{Top} \rightarrow \text{Kom}(\mathbb{Z})$$

eine natürliche Transformation.

*Beweis.* Zu zeigen ist, dass für alle  $q \in \mathbb{Z}$  das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S_q X & \xrightarrow{U_q} & S_q X \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ S_{q-1} X & \xrightarrow{U_{q-1}} & S_{q-1} X \end{array}$$

in  $\text{Ab}$  kommutiert (eigentlich sollte man  $(U_q)_X$  und  $\partial_q^X$  schreiben). Wir zeigen, dass das Diagramm von natürlichen Transformationen zwischen Funktoren  $\text{Top} \rightarrow \text{Ab}$

$$\begin{array}{ccc} S_q & \xrightarrow{U_q} & S_q \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ S_{q-1} & \xrightarrow{U_{q-1}} & S_{q-1} \end{array}$$

kommutiert (dieses Diagramm lebt in der Kategorie  $\text{Ab}^{\text{Top}}$ ; seine Auswertung bei  $X \in \text{Top}$  ist das vorige Diagramm).

Nach Lemma 4.3.3 reicht es zu zeigen, dass die beiden bei  $S_q$  startenden natürlichen Transformationen  $\partial \circ U_q$  und  $U_{q-1} \circ \partial$  auf dem tautologischen Simplex  $\text{id}_{\Delta_q} \in S_q \Delta_q$  übereinstimmen.

Wir zeigen dies per Induktion über  $q$ . Die Fälle  $q \leq 0$  sind trivial, der Fall  $q = 1$  folgt sofort aus Beispiel 4.3.6. Für  $q \geq 2$  haben wir

$$\begin{aligned} \partial(U_q(\text{id}_{\Delta_q})) &\stackrel{(4.3.2)}{=} \partial(P_{q-1}(U_{q-1}(\partial(\text{id}_{\Delta_q})))) \\ &= (-P_{q-2}\partial + \text{id})(U_{q-1}(\partial(\text{id}_{\Delta_q}))) && \text{wegen (3.1.9) und } q \geq 2 \\ &= -P_{q-2}U_{q-2}\partial\partial(\text{id}_{\Delta_q}) + U_{q-1}(\partial(\text{id}_{\Delta_q})) && \text{da } \partial U_{q-1} = U_{q-2}\partial \text{ per Induktionsannahme} \\ &= U_{q-1}(\partial(\text{id}_{\Delta_q})). && \square \end{aligned}$$

**Lemma 4.3.8.** *Die beiden natürlichen Transformationen  $U, \text{id}_S: S \Rightarrow S$  sind im folgenden Sinne homotop: Es gibt eine natürliche Transformationen  $T_q: S_q \Rightarrow S_{q+1}$ , für alle  $q \in \mathbb{Z}$ , mit*

$$(4.3.4) \quad \partial T_q + T_{q-1}\partial = U_q - \text{id}_{S_q}$$

<sup>42</sup>für alle  $q \in \mathbb{Z}$ .

Insbesondere sind für jeden topologischen Raum die beiden Morphismen  $U_X, \text{id}_{SX}: SX \rightarrow SX$  in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$  homotop (mit der Familie  $T_X := ((T_q)_X)_{q \in \mathbb{Z}}$  als möglicher Homotopie) und somit induziert  $U_X$  die Identität auf allen Homologien, in Formeln

$$\mathbb{H}_p(U_X) = \mathbb{H}_p(\text{id}_{SX}) = \text{id}_{\mathbb{H}_p(X)}: \mathbb{H}_p(X) \rightarrow \mathbb{H}_p(X).$$

*Beweis.* Wir definieren die  $T_q$  induktiv, so dass (4.3.4) für alle  $q \in \mathbb{Z}$  gilt.

Wir setzen  $T_q := 0$  für alle  $q < 0$  (die einzige Möglichkeit) und  $T_0 := 0$  (dann gilt (4.3.4) für  $q = 0$ ). Sei  $Q > 0$  und gelte (4.3.4) bereits für alle  $q < Q$ . Dann müssen wir  $T_Q$  definieren mit

$$\partial T_Q + T_{Q-1}\partial = U_Q - \text{id}_{S_Q}.$$

Nach Lemma 4.3.3 genügt es dafür ein Element  $t \in S_{Q+1}(\Delta_Q)$  (alias  $T_Q(\text{id}_{\Delta_Q})$ ) mit

$$\partial t = U_Q(\text{id}_{\Delta_Q}) - \text{id}_{\Delta_Q} - T_{Q-1}\partial(\text{id}_{\Delta_Q})$$

zu finden. Es ist also zu zeigen, dass die rechte Seite ein Rand ist, d.h. in  $B_Q(\Delta_Q)$  liegt. Weil  $\Delta_Q$  konvex ist und  $Q > 0$  gilt, ist dies aber äquivalent dazu, dass die rechte Seite ein Zykel ist, also in  $Z_Q(\Delta_Q)$  liegt (Satz 3.1.27). Dies stimmt aber wegen

$$\begin{aligned} \partial(U_Q(\text{id}_{\Delta_Q}) - \text{id}_{\Delta_Q} - T_{Q-1}\partial(\text{id}_{\Delta_Q})) &= U_{Q-1}(\partial(\text{id}_{\Delta_Q})) - \partial(\text{id}_{\Delta_Q}) - \partial T_{Q-1}\partial(\text{id}_{\Delta_Q}) && \text{nach Lemma 4.3.7} \\ &= (U_{Q-1} - \text{id}_{S_{Q-1}} - \partial T_{Q-1})(\partial(\text{id}_{\Delta_Q})) \\ &= T_{Q-2}\partial(\partial(\text{id}_{\Delta_Q})) && \text{per Induktion} \\ &= 0. && \square \end{aligned}$$

<sup>42</sup>Wer sich fragt, was  $+$  und  $-$  hier bedeuten: Sind  $F, G: C \rightarrow \text{Ab}$  Funktoren mit Zielkategorie  $\text{Ab}$ , so bildet die Menge aller natürlichen Transformationen  $F \Rightarrow G$  eine abelsche Gruppe: Gegeben  $\sigma, \tau: F \Rightarrow G$  ist  $\sigma + \tau$  durch  $(\sigma + \tau)_C := \sigma_C + \tau_C$  definiert. Dies verwendet, dass die Morphismenmengen in  $\text{Ab}$  selbst abelsche Gruppen sind.

**Definition 4.3.9.** Sei  $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(X)$  ein System von Teilmengen eines topologischen Raums  $X$ . Sei  $S_q^\mathcal{V}X$  die freie abelsche Gruppe über all denjenigen  $q$ -Simplizes von  $X$ , deren Bild ganz in einer der Teilmengen aus  $\mathcal{V}$  liegt, in Formeln

$$S_q^\mathcal{V} := \mathbb{Z}\{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X) \mid \text{es gibt ein } V \in \mathcal{V} \text{ mit } \text{im}(\sigma) \subset V\}.$$

Die Elemente dieser Gruppe heißen  $\mathcal{V}$ -**feine singuläre Ketten** in  $X$ . Offensichtlich gilt  $S_q^\mathcal{V}X \subset S_qX$  und  $S^\mathcal{V}X := (S_q^\mathcal{V}X)_{q \in \mathbb{Z}}$  ist ein Unterkomplex von  $SX$ . Er heißt **Komplex der  $\mathcal{V}$ -feinen Ketten** in  $X$ .

**Satz 4.3.10** (über feine Ketten). *Sei  $\mathcal{V}$  eine Überdeckung eines topologischen Raums  $X$  mit  $X = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V^\circ$ , wobei  $V^\circ$  das Innere von  $V$  in  $X$  ist (beispielsweise eine offene Überdeckung). Dann ist die Inklusion  $S^\mathcal{V}X \subset SX$  ein Quasi-Isomorphismus (Definition B.1.16)<sup>43</sup>, induziert also Isomorphismen  $H_q(S^\mathcal{V}X) \xrightarrow{\sim} H_qX$  auf allen Homologiegruppen; äquivalent: Der Quotientenkomplex  $\frac{SX}{S^\mathcal{V}X}$  ist azyklisch.*

*Insbesondere berechnet  $S^\mathcal{V}X$  bereits die singuläre Homologie.*

*Beweis.* Der Unterkomplex  $S^\mathcal{V}X \subset SX$  liefert die kurze exakte Sequenz von Komplexen  $S^\mathcal{V}X \subset SX \rightarrow \frac{SX}{S^\mathcal{V}X}$  (Beispiel B.3.3). Nach der langen exakten Homologiesequenz (Satz B.3.4) sind die beiden Aussagen

- $S^\mathcal{V}X \subset SX$  ist ein Quasi-Isomorphismus und
- $\frac{SX}{S^\mathcal{V}X}$  ist azyklisch

äquivalent.

Der Unterteilungsoperator  $U_q = (U_q)_X: S_qX \rightarrow S_qX$  bildet die Untergruppe  $S_q^\mathcal{V}X$  in sich selbst ab (nach Definition 4.3.5 und Lemma 4.3.3). Also induziert er einen Gruppenmorphismus  $\bar{U}_q: \frac{S_qX}{S_q^\mathcal{V}X} \rightarrow \frac{S_qX}{S_q^\mathcal{V}X}$ . Genauer ist  $\bar{U} := (\bar{U}_q)_{q \in \mathbb{Z}}$  ein Endomorphismus des Komplexes  $\frac{SX}{S^\mathcal{V}X}$ .

Analog induzieren die im Beweis von Lemma 4.3.8 definierten Morphismen  $T_q = (T_q)_X: S_qX \rightarrow S_{q+1}X$  Gruppenmorphismen  $\bar{T}_q: \frac{S_qX}{S_q^\mathcal{V}X} \rightarrow \frac{S_{q+1}X}{S_{q+1}^\mathcal{V}X}$  und wir folgern aus (4.3.4), dass  $\bar{U}$  homotop zur Identität von  $\frac{SX}{S^\mathcal{V}X}$  ist.

**Behauptung A:** Für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  und jede singuläre  $q$ -Kette  $\gamma \in S_qX$  gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $(U_q)^n \gamma \in S_q^\mathcal{V}X$ , d. h. es gilt  $\bar{U}_q^n(\bar{\gamma}) = 0$  in  $\frac{S_qX}{S_q^\mathcal{V}X}$ .

**Beweis der Behauptung A:** Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $\gamma: \Delta_q \rightarrow X$  ein  $q$ -Simplex ist. Wir betrachten die (nach Annahme) offene Überdeckung  $(\gamma^{-1}(V^\circ))_{V \in \mathcal{V}}$  von  $\Delta_q$ . Nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue [Sch20, 2.7.18] gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass jeder  $\varepsilon$ -Ball in  $\Delta_q$  bereits in einer Menge dieser Überdeckung enthalten ist. Lemma 4.3.13 zeigt, dass es ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass jeder Simplex der  $n$ -ten baryzentrischen Unterteilung  $U_q^n(\text{id}_{\Delta_q})$  von  $\text{id}_{\Delta_q}$  Durchmesser  $< \varepsilon$  hat, also ganz im  $\varepsilon$ -Ball um jeden seiner Punkte liegt. Daraus folgt  $U_q^n(\gamma) = (S_q\gamma)(U_q^n(\text{id}_{\Delta_q})) \in S_q^\mathcal{V}X$  (nach Lemma 4.3.3 und der Definition des Funktors  $S_q$  in Lemma 3.2.2). Dies zeigt Behauptung A.

Wir wissen somit, dass der Endomorphismus  $\bar{U}: \frac{SX}{S^\mathcal{V}X} \rightarrow \frac{SX}{S^\mathcal{V}X}$  einerseits homotop zur Identität ist und andererseits „lokal“ (= „elementweise“) „nilpotent“ in dem Sinne, ist dass für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  und jedes Element  $x \in \left(\frac{S_qX}{S_q^\mathcal{V}X}\right)^q$  ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $\bar{U}^n(x) = 0$  existiert. Daraus folgt bereits, dass der Komplex  $\frac{SX}{S^\mathcal{V}X}$  azyklisch ist, denn allgemein gilt:

**Behauptung B:** Ist  $f: A \rightarrow A$  ein lokal nilpotenter, zur Identität  $\text{id}_A$  homotoper Endomorphismus in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$ , so ist  $A$  azyklisch.

**Beweis der Behauptung B:** Da  $f$  homotop zu  $\text{id}_A$  ist, folgt  $H_p(f) = H_p(\text{id}_A) = \text{id}_{H_pA}$  für alle  $p \in \mathbb{Z}$ . Seien  $p \in \mathbb{Z}$  und  $a \in A_p$  beliebig. Lokale Nilpotenz liefert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $f^n(a) = 0$ . Ist nun  $a$  sogar ein Zykel mit Homologieklasse  $[a] \in H_pA$ , so folgt

$$[a] = \text{id}_{H_pA}^n([a]) = (H_p(f))^n([a]) = H_p(f^n)([a]) = [f^n(a)] = [0] = 0,$$

also  $H_pA = 0$  für alle  $p \in \mathbb{Z}$ . □

<sup>43</sup>Sie wird zu einem Isomorphismus in der Homotopiekategorie  $\text{Hot}(\mathbb{Z})$ , was aus einem späteren Resultat folgt (gegeben zwei in Pfeilrichtung beschränkte Komplexe  $P, Q$  projektiver Moduln, ist die kanonische Abbildung  $\text{Hot}_R(P, Q) \rightarrow D_R(P, Q)$  bijektiv (wobei  $D(R)$  die derivierte Kategorie ist).

4.3.1. Durchmesser der Simplexes der baryzentrischen Unterteilung.

**Definition 4.3.11.** Der Durchmesser  $\text{diam}(E)$  einer Teilmenge  $E \subset \mathbb{R}^m$  ist durch

$$\text{diam}(E) := \sup_{v, w \in E} \|v - w\| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\pm\infty\}$$

definiert, wobei  $\|x\| = \sqrt{\sum x_i^2}$  die euklidische Norm ist. (Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Definition des Durchmessers eines metrischen Raums.)

**Lemma 4.3.12.** Seien  $v_0, \dots, v_q \in \mathbb{R}^m$  Vektoren, wobei  $q \geq 0$ . Dann gilt für alle  $w \in \mathbb{R}^m$  und alle  $v \in \text{konv}(v_0, \dots, v_q)$

$$\|w - v\| \leq \max_{i \in \{0, \dots, q\}} \|w - v_i\|.$$

Insbesondere gilt

$$\text{diam}(\text{konv}(v_0, \dots, v_q)) = \max_{i, j \in \{0, \dots, q\}} \|v_i - v_j\|.$$

*Beweis.* Schreibe  $v = \sum_{j=0}^q t_j v_j$  für eindeutige  $t_j \in [0, 1]$  mit  $\sum_j t_j = 1$ . Dann gilt

$$\|w - v\| = \left\| \sum t_j (w - v_j) \right\| \leq \sum t_j \|w - v_j\| \leq \max_{i \in \{0, \dots, q\}} \|w - v_i\|.$$

Dies zeigt die erste Ungleichung. Zweimaliges Anwenden dieser Ungleichung zeigt

$$\|w - v\| \leq \max_{i, j \in \{0, \dots, q\}} \|v_i - v_j\|$$

für alle  $v, w \in \text{konv}(v_0, \dots, v_m)$ , woraus sofort die behauptete Gleichheit folgt.  $\square$

**Lemma 4.3.13.** Seien  $v_0, \dots, v_q \in \mathbb{R}^m$  Vektoren mit  $q \geq 0$ . Sei  $\sigma := \underbrace{(v_0, \dots, v_q)}_{\Delta_q} : \Delta_q \rightarrow \mathbb{R}^m$  der in (3.3.1) definierte singuläre  $q$ -Simplex mit Ecken  $v_0, \dots, v_q$ . Dann hat jeder Simplex der baryzentrischen Unterteilung von  $\sigma$  Durchmesser  $\leq \frac{q}{q+1} \text{diam}(\text{im}(\sigma))$ .

Formal meint dies: Sei  $\tau$  ein singulärer  $q$ -Simplex, der mit Koeffizient  $\neq 0$  in  $U_q(\sigma)$  vorkommt. Dann gilt  $\text{diam}(\text{im}(\tau)) \leq \frac{q}{q+1} \text{diam}(\text{im}(\sigma))$ .

*Beweis.* Wir beweisen dies per Induktion über  $q$ . Die Fälle  $q = 0$  und  $q = 1$  sind offensichtlich.

Sei  $s := \frac{1}{q+1}(v_0 + \dots + v_q)$  der Schwerpunkt des Bildes  $\text{konv}(v_0, \dots, v_q)$  unseres Simplex  $\sigma$ . Sei  $\tau$  ein Simplex in der baryzentrischen Unterteilung von  $\sigma$ . Dann ist  $\text{im}(\tau)$  die konvexe Hülle von  $s$  und einem „ $(q-1)$ -Simplex  $\nu$  der baryzentrischen Unterteilung einer Seitenfläche  $\mu$  von  $\sigma$ “; seien  $w_0, \dots, w_{q-1}$  die „Ecken“ von  $\nu$  in beliebiger Reihenfolge. **Bild malen.** Dann gilt nach Lemma 4.3.12 mindestens eine der beiden folgenden Aussagen:

- (a)  $\text{diam}(\text{im}(\tau)) = \|s - w_i\|$  für ein geeignetes  $i \in \{0, \dots, q-1\}$ .
- (b)  $\text{diam}(\text{im}(\tau)) = \|w_j - w_i\|$  für geeignete  $i, j \in \{0, \dots, q-1\}$ .

Die Aussage (b) impliziert  $\text{diam}(\text{im}(\tau)) = \text{diam}(\text{im}(\nu))$  (nach Lemma 4.3.12). Da  $\nu$  ein Simplex in der baryzentrischen Unterteilung des  $(q-1)$ -Simplex  $\mu$  ist, folgt per Induktion und wegen  $\text{im}(\mu) \subset \text{im}(\sigma)$

$$\text{diam}(\text{im}(\tau)) = \text{diam}(\text{im}(\nu)) \leq \frac{q-1}{q} \text{diam}(\text{im}(\mu)) \leq \frac{q}{q+1} \text{diam}(\text{im}(\sigma))$$

wie gewünscht.



*Beweis.* Sei  $\mathcal{V} = \{U, V\}$  unsere Überdeckung von  $X$ . Dann ist

$$(4.4.2) \quad S(U \cap V) \xrightarrow{\begin{pmatrix} S_{i_U} \\ S_{i_V} \end{pmatrix}} SU \oplus SV \xrightarrow{(S_{j_U} \ -S_{j_V})} S^{\mathcal{V}}X$$

eine kurze exakte Sequenz in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$  (offensichtlich bzw. Aufgabe 4.4.3). Wir erhalten eine zugehörige lange exakte Homologiesequenz (Satz B.3.4). Nach unserer Annahme  $X = U^\circ \cup V^\circ$  und dem Satz über feine Ketten 4.3.10 ist  $S^{\mathcal{V}}X \hookrightarrow SX$  ein Quasi-Isomorphismus und liefert also Isomorphismen  $H_p(S^{\mathcal{V}}X) \xrightarrow{\sim} H_pX$ , mit deren Hilfe wir unsere lange exakte Sequenz zur behaupteten Mayer-Vietoris-Sequenz umschreiben.  $\square$

**4.4.2.** Um den Wert des Verbindungsmorphismus auf einer Homologieklassse  $c \in H_pX$  zu berechnen, muss man ein Urbild von  $c$  unter dem Isomorphismus  $H_p(S^{\mathcal{V}}X) \xrightarrow{\sim} H_pX$  finden, auf das man dann das allgemeine Rezept aus Satz B.3.4.(a) anwenden kann. Eine rechnerische Möglichkeit hierfür ist baryzentrische Unterteilung: Wähle einen  $p$ -Zykel  $\gamma$  mit  $c = [\gamma]$ . Nach Behauptung A im Beweis des Satzes über feine Ketten 4.3.10 gibt es ein  $n$ , so dass die  $n$ -fache baryzentrische Unterteilung  $U^n(\gamma)$  in  $S^{\mathcal{V}}X$  liegt. Dieses Element ist wieder ein  $p$ -Zykel und es gilt  $[\gamma] = [U^n(\gamma)]$  in  $H_pX$  (denn nach (4.3.4) in Lemma 4.3.8 bildet baryzentrische Unterteilung  $U$  Zykel auf Zykel ab und erhält Homologieklassen). Also ist die Homologieklassse des  $p$ -Zykels  $U^n(\gamma) \in S_p^{\mathcal{V}}X$  das gesuchte Urbild von  $c$ .

**Aufgabe 4.4.3.** Seien  $A, B \subset X$  Teilmengen eines topologischen Raums  $X$ . Dann ist

$$S(A \cap B) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} SA \oplus SB \xrightarrow{(1 \ -1)} S^{\{A, B\}}X$$

eine kurze exakte Sequenz in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$ .

Hinweis: Verwende 4.1.6.

**Aufgabe 4.4.4** (Mayer-Vietoris-Sequenz für simpliziale Homologie). Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex und seien  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{K}$  Untersimplizialkomplexe mit  $\mathcal{K} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ . Dann gibt es eine Mayer-Vietoris-Sequenz wie in Satz 4.4.1, wobei  $U \cap V, U, V, X$  durch  $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{K}$  zu ersetzen sind und  $H_q(-)$  für simpliziale Homologie steht.

Hinweis: Verwende Proposition 2.4.21 und zeige, dass

$$\mathbb{Z}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}} \oplus \mathbb{Z}\mathcal{V}^{\text{st-mono}} \xrightarrow{(1 \ -1)} \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$$

eine kurze exakte Sequenz ist.

Bonus: Löse damit Aufgabe 2.4.26.

## 4.5. Homologie der Sphären.

**Satz 4.5.1** (singuläre Homologie der Sphären). *Die singulären Homologiegruppen der  $n$ -dimensionalen Sphäre  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  sind wie folgt gegeben: Im Fall  $n \geq 1$  gilt*

$$(4.5.1) \quad H_q(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Im Fall  $n = 0$  hat  $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$  als einzige nichtverschwindende Homologie  $H_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}[-1] \oplus \mathbb{Z}[1] \cong \mathbb{Z}^2$ . Im Fall  $n = -1$  verschwinden alle Homologien von  $\mathbb{S}^0 = \emptyset$ .*

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n$ . Die Fälle  $n = -1, 0$  sind klar.

Sei  $n \geq 1$ . Da  $\mathbb{S}^n$  wegzusammenhängend ist, gilt schon einmal  $H_0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$ . Betrachte die offene Überdeckung von  $\mathbb{S}^n$  durch die beiden offenen, etwas vergrößerten Hemisphären  $U$  und  $V$  (etwa  $U = \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$ ,  $V = \mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ ). **Bild malen.** Die beiden Räume  $U$  und  $V$  sind jeweils zusammenziehbar und haben somit nur Homologie  $\mathbb{Z}$  im Grad Null. Die Inklusion  $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \subset U \cap V$  des Äquators ist offensichtlich die eines Deformationsretrakts und somit eine Homotopieäquivalenz (siehe [Sch20, Lemma 3.5.4]), induziert also Isomorphismen auf allen Homologien nach 3.3.4. Mit diesen Erkenntnissen verwandelt sich die

Mayer-Vietoris-Sequenz aus Satz 4.4.1 in eine exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_n(\mathbb{S}^n) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{---} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{---} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_{p-1}(\mathbb{S}^{n-1}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \text{---} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_1(\mathbb{S}^n) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & H_0(\mathbb{S}^{n-1}) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \longrightarrow & H_0(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & 0.
 \end{array}$$

**Fall  $n = 1$ :** Die linke Spalte dieser exakten Sequenz lebt nur in Grad Null. Daraus folgt  $H_p(\mathbb{S}^1) = 0$  für alle  $p \geq 2$ . Es bleibt  $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$  zu zeigen (was wir schon aus Beispiel 3.4.4 wissen, aber nun noch einmal zeigen). Die obige exakte Sequenz zeigt, dass  $H^1(\mathbb{S}^1)$  isomorph zum Kern der Abbildung  $H_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z}[-1] \oplus \mathbb{Z}[+1] \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ist; diese Abbildung ist durch  $a[-1] + b[+1] \mapsto (a + b, a + b)$  gegeben und hat als Kern  $\mathbb{Z}([-1] - [+1]) \cong \mathbb{Z}$ .

**Fall  $n \geq 2$ :** Per Induktion lebt die linke Spalte des obigen Diagramms nur in den Graden 0 und  $n - 1 \geq 1$  ist dort jeweils isomorph zu  $\mathbb{Z}$ . Daraus folgt  $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  und  $H_p(\mathbb{S}^n) = 0$  für alle  $p \geq 2$  mit  $p \neq n$ . Zu bestimmen bleibt  $H_1(\mathbb{S}^n)$ , was isomorph zum Kern der Abbildung  $H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ist. Diese Abbildung ist aber offensichtlich injektiv, so dass  $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$  folgt (dies folgt auch aus Beispiel 3.4.6).  $\square$

**4.5.2.** Diese Berechnung der Homologie der Sphären ist relativ leicht merkbar, jedoch ist im Vergleich zur später erklärten Berechnung 4.7.8 mit Hilfe des Korollars 4.7.7 (und stereographischer Projektion) ziemlich unklar, was ein Erzeuger von  $H_n(\mathbb{S}^n)$  ist, jedenfalls für  $n \geq 3$ .

In Vorlesung Erzeuger von  $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$  und  $H_2(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$  erklärt per Verbindungsmorphismus MV-Sequenz. Das Resultat für  $H_1(\mathbb{S}^1)$  benötigen wir später: Jeder 1-Zykel, der sich einmal (im Uhrzeiger oder Gegenuhrzeigersinn) um die Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  aufwickelt, liefert einen Erzeuger von  $H_1(\mathbb{S}^1)$  (auch klar nach Hurewicz). Man kann einen solchen 1-Zykel auch durch homologe 1-Ketten ersetzen: Nach 3.4.3 kann man etwa die Summe  $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3$  von drei 1-Simplizes nehmen, wobei sich  $\tau_i$  „um das  $i$ -te Drittel der Kreislinie windet“. Den Summanden  $\tau_i$  kann man auch durch  $-\bar{\tau}_i$  ersetzen.

### Aufgabe 4.5.3.

- Es ist nicht möglich, die Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen  $U, V$  mit wegzusammenhängendem Schnitt  $U \cap V$  zu überdecken.
- Es ist nicht möglich, die Kugelschale  $\mathbb{S}^2$  durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen  $U, V$  zu überdecken, deren Schnitt verschwindende erste singuläre Homologie  $H_1(U \cap V) = 0$  hat.

Diejenigen, die Fundamentalgruppen kennen, dürfen folgern: Es ist nicht möglich, die Kugelschale  $\mathbb{S}^2$  durch zwei zusammenziehbare offene Teilmengen  $U, V$  mit einfach zusammenhängendem Schnitt  $U \cap V$  zu überdecken.

Hinweis: Mayer-Vietoris.

**Aufgabe 4.5.4.** Berechne mit Mayer-Vietoris die singuläre Homologie der folgenden topologischen Räume  $X$  und finde jeweils eine explizite  $\mathbb{Z}$ -Basis.

- Sei  $X$  ein Bouquet von  $n$  Kreislinien  $\mathbb{S}^1$ .<sup>46</sup>
- Sei  $X$  eine Kugelschale  $\mathbb{S}^2$ , die von einer Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  in einem Punkt berührt wird.

<sup>46</sup>D.h.  $X$  ist der Quotient der disjunkten Vereinigung von  $n$  Kopien von  $\mathbb{S}^1$  modulo der Äquivalenzrelation, die die  $n$  Basispunkte  $1 \in \mathbb{S}^1$  dieser Kreislinien zu einem Punkt identifiziert. Im Fall  $n = 1$  gilt  $X = \mathbb{S}^1$ , im Fall  $n = 2$  ist  $X$  eine Figur Acht „ $\infty$ “, im Fall  $n = 3$  sind es drei Kreislinie, die sich in einem Punkt berühren (der Rand einer Blume mit drei Blättern), usw.

- (c) Bonus: Seien  $A$  und  $B$  topologischer Räume mit Punkten  $a \in A$  und  $b \in B$ . Sei  $X$  die Verklebung von  $A$  und  $B$  in diesen ausgezeichneten Punkten, also der Quotient von  $A \sqcup B$  modulo der Identifizierung  $a = b$ . Ergänze und beweise (eventuell modulo mengentheoretischer Details): Falls ... gilt, so kann man  $H_q(X)$  wie folgt durch  $H_q(A)$  und  $H_q(B)$  ausdrücken: ...

Bemerkung: Wir haben hier *Einpunktvereinigungen* oder *Wedge-Produkte* betrachtet, siehe [Wik20, Wedge-Produkt (Topologie)].

**4.5.5.** Der topologische Rand der  $n$ -dimensionalen abgeschlossenen Vollkugel/Disk  $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  als Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  ist

$$\mathbb{S}^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}.$$

Spezialfälle sind  $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$  und  $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$ .

**4.5.6.** Das folgende Korollar 4.5.7 verallgemeinert [Sch20, Satz 3.3.6].

**Korollar 4.5.7** (Nicht-Existenz einer Retraktion der Vollkugel auf ihren Rand). *Für  $n \geq 0$  gibt es keine stetige Abbildung  $D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  der Vollkugel auf ihren Rand, deren Einschränkung auf  $\mathbb{S}^{n-1}$  die Identität ist.*

*In anderen Worten gibt es keine Retraktion von  $D^n$  auf ihren Rand  $\mathbb{S}^{n-1}$  (siehe Definition [Sch20, 3.3.1]).*

*Beweis.* Der Fall  $n = 0$  ist wegen  $D^0 = \{0\}$  und  $\mathbb{S}^{-1} = \emptyset$  trivial. Gelte  $n \geq 1$ . Nehmen wir an, dass  $r: D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  eine stetige Abbildung mit  $r|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$  ist. In anderen Worten ist das linke der beiden folgenden Diagramme kommutativ.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow D^n & & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} H_{n-1}(D^n) \\ \searrow \text{id} \quad \downarrow r & & \searrow \text{id} \quad \downarrow H_{n-1}(r) \\ \mathbb{S}^{n-1} & & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{array}$$

Das rechte Diagramm entsteht aus dem linken durch Anwenden des Funktors  $H_{n-1}: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$  und ist deswegen ebenfalls kommutativ. Dies widerspricht aber Satz 4.5.1, denn

- im Fall  $n \geq 2$  gilt  $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  und  $H_{n-1}(D^n) = 0$ ;
- im Fall  $n = 1$  gilt  $H_0(\mathbb{S}^0) \cong \mathbb{Z}^2$  und  $H_0(D^1) \cong \mathbb{Z}$ , es gibt aber keinen surjektiven Gruppenmorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}^2$ . □

**Satz 4.5.8** (Fixpunktsatz von Brouwer). *Jede stetige Selbstabbildung  $f: D^n \rightarrow D^n$  der abgeschlossenen Vollkugel besitzt einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Wie im Beweis von [Sch20, Satz 3.3.7] erhalten wir sonst eine Retraktion  $D^n \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ , was Korollar 4.5.7 widerspricht.

(In [Mun84, Theorem 21.2] findet sich ein Alternativbeweis, der nur das elementare Lemma 4.15.2 benutzt und wohl etwas einfacher ist: Die Stetigkeit der obigen Retraktion muss nicht bewiesen werden.) □

**4.5.9.** An dieser Stelle schließt sich Abschnitt 4.15 ebenfalls sinnvoll an (von den drei Beweisen von Satz 4.15.5 ist jedoch dann nur derjenige mit Mayer-Vietoris mit dem aktuellen Wissen verständlich).

## 4.6. Homologie von Flächen.

**Definition 4.6.1.** Eine Fläche ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension zwei.

**4.6.2.** Wir erinnern an die Klassifikation zusammenhängender kompakter (= geschlossener) Flächen [Sch20, Satz 3.10.22] durch zwei abzählbare Familien. Jede solche Fläche ist zu genau einer aus der folgenden Liste homöomorph:

- einer 2-Sphäre mit  $g \geq 0$  Henkeln<sup>47</sup>;
- die verbundene/zusammenhängende Summe von  $g \geq 1$  reell projektiven Ebenen  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  (siehe [Wik20, Verbundene Summe])<sup>48</sup>. Für  $g = 1$  erhält man die Kleinsche Flasche.

<sup>47</sup>Es geht hier nur um die Oberfläche. Wie man die Henkel einklebt ist unerheblich, da alle Möglichkeiten homöomorphe Flächen liefern.

<sup>48</sup>Auch hier ist es unerheblich, wie man die verbundenen Summen bildet: Alle Möglichkeiten liefern homöomorphe Flächen.

Eine Sphäre mit  $g \geq 1$  Henkeln ist homöomorph zur verbundenen Summe von  $g$  Tori  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  und zum topologischen Raum, der dem Flächenwort  $w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$  zugeordnet ist (siehe [Sch20, Definition 3.10.17]). Die verbundene Summe von  $g \geq 1$  reell projektiven Ebenen ist homöomorph zum topologischen Raum des Flächenworts  $a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$ .

**Satz 4.6.3** (singuläre Homologie zusammenhängender kompakter Flächen).

(a) Ist  $X$  eine 2-Sphäre mit  $g \geq 0$  Henkeln, so gilt

$$H_q(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 2, \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{falls } q = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Ist  $X$  eine verbundene Summe von  $g \geq 1$  reell projektiven Ebenen  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ , so gilt

$$H_q(X) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } q = 2, \\ \frac{\mathbb{Z}^g}{\mathbb{Z}(2, \dots, 2)} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } q = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Achtung, arbeitet man hier statt mit ganzzahligen Koeffizienten mit Koeffizienten in einem beliebigen Modul  $M$  über einem Ring  $R$ , wie in 4.9.1 beschrieben, so gilt*

$$H_q(X; M) \cong \begin{cases} \{m \in M \mid 2m = m + m = 0\} & \text{falls } q = 2, \\ \frac{M^{\oplus g}}{\{(2m, \dots, 2m) \mid m \in M\}} & \text{falls } q = 1, \\ M & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

*die zweite Homologie ist also die 2-Torsionsuntergruppe von  $M$ .*

**Kleine Beispiele hier oder nach/während Beweis explizit erklären:**

- Henkelsphäre:  $g = 0$  Sphäre,  $g = 1$  Torus,  $g = 2$  verbundene Summe zweier Tori (Schneide Fundamentalpolygon in zwei Teile, jeder Teil liefert Torus mit Loch, verklebe).
- Verbundene Summe von  $g$  reell projektiven Ebenen:  $g = 1$  reell projektive Ebene,  $g = 2$  Kleinsche Flasche.

*Beweis.* Der folgende Beweis ähnelt dem Beweis von [Sch20, Satz 3.10.22], jedoch verwenden wir statt des Satzes von Seifert-van Kampen den Satz über die Mayer-Vietoris-Sequenz (die Menge  $Z^\circ$  dort nennen wir unten  $V$ , die Menge  $F(w) \setminus z$  dort ist ein mögliches  $U$  unten).

(Die Aussage über  $H_0$  ist jeweils klar, die über  $H_1$  folgt aus dem Hurewicz-Isomorphismus (Satz 3.4.2) zusammen mit den Isomorphismen (3.10.4) und (3.10.5) vom Ende des Beweises von [Sch20, Satz 3.10.22], sobald man  $X = F(w)$  wie unten annimmt. Wir geben jedoch einen direkteren Beweis.)

(a): Der Fall der Sphäre ohne Henkel wurde bereits in Satz 4.5.1 bewiesen. Gelte also  $g \geq 1$ . **Male Bilder für  $g = 1, 2$ .** Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $X = F(w)$  für ein Flächenwort

$$w = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$$

gilt (siehe [Sch20, Satz 3.10.22]). Der Raum  $X = F(w)$  entsteht aus dem „Fundamentalpolygon“ durch geeignete Identifizierung von Kanten; die Bilder der Kanten des Fundamentalpolygons bezeichnen wir als „Kantengerüst“. Seien

- $U$  das „zu einer offenen Teilmenge verdickte Kantengerüst“ (welches das Kantengerüst als Deformationsretrakt hat) und
- $V$  das Komplement des Kantengerüsts.

Dann ist  $X = F(w) = U \cup V$  eine offene Überdeckung. Wir bilden die zugehörige Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 4.4.1).

Weil  $V$  homöomorph zum Inneren des Fundamentalpolygons und somit zusammenziehbar ist, lebt  $H(V)$  nur im Grad Null und ist dort  $\mathbb{Z}$ . Weil  $U$  das Kantengerüst als Deformationsretrakt hat, ist dessen Inklusion nach  $U$  eine Homotopieäquivalenz, induziert also Isomorphismen auf allen singulären Homologien. Das Kantengerüst ist ein Bouquet von  $2g$  Kreislinien  $S^1$  (denn das Alphabet unseres Flächenworts besteht aus den  $2g$  Buchstaben  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  und alle Ecken des Fundamentalpolygons gehen auf denselben Punkt in  $X$ ), so dass wir seine Homologie nach Aufgabe 4.5.4 kennen: Sie ist  $\mathbb{Z}$  in Grad Null, isomorph zu  $\mathbb{Z}^{2g}$  in Grad Eins und verschwindet in allen anderen Graden. Genauer ist  $[a_1], [b_1], [a_2], [b_2], \dots, [a_g], [b_g]$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis der ersten Homologie, wobei wir die mit  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  markierten Kanten unseres Fundamentalpolygons in offensichtlicher Weise als 1-Zykel im Kantengerüst auffassen. Ausserdem ist  $U \cap V$  offensichtlich homotopieäquivalent zu  $S^1$ . Mit diesen Erkenntnissen wird unsere Mayer-Vietoris-Sequenz zu einer exakten Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_2 X & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \tilde{\partial}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{H_1(i_U)} & \mathbb{Z}[a_1] \oplus \mathbb{Z}[b_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[a_g] \oplus \mathbb{Z}[b_g] & \xrightarrow{H_1(j_V)} & H_1 X \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \tilde{\partial}_1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_0(j_U) & -H_0(j_V) \end{pmatrix}} & H_0 X & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Die linke Abbildung in der unteren Zeile ist injektiv, weshalb  $\tilde{\partial}_1 = 0$  folgt. Weiter gilt  $H_1(i_U) = 0$ , denn der „Gegenuhrzeigersinn“-Erzeuger von  $\mathbb{Z} \cong H_1(S^1) \cong H_1(U \cap V)$  wird auf  $[a_1] + [b_1] - [a_1] - [b_1] + \dots - [a_g] - [b_g] = 0$  abgebildet, denn er kann in  $U$  nach außen auf das Kantengerüst geschoben werden (die Homologiekategorie ändert sich dabei nicht wegen Homotopieinvarianz); (**hier verwenden wir den roten Text in 4.5.2, der einerseits einen Erzeuger beschreibt und andererseits erklärt, wie man einen solchen aufsplitten und verändern darf**). Also sind  $\tilde{\partial}_2$  und  $H_1(j_V)$  Isomorphismen. Natürlich gilt  $H_0 X \cong \mathbb{Z}$ . Da in der obigen Sequenz in den linken beiden Spalten in allen Graden  $\geq 2$  nur Nullen stehen, folgt  $H_p(X) = 0$  für alle  $p \geq 3$ .

**Male Bild im Fall  $g = 2$ , sowohl als verbundene Summe zweier Tori als auch als Sphäre mit zwei Henkeln. Erkläre, wo die Erzeuger liegen.**

**Erkläre auch den Fundamentalzykel! D.h. rate ihn und zeige (per feine Ketten), dass er unter  $\tilde{\partial}_2$  wie gewünscht abgebildet wird. War gar nicht so leicht: Man zerlegt das Fundamentalpolygon in Kuchenstücke alias 2-Simplizes (im Video Quadrat in vier Dreiecke zerlegt). Um das Bild unter dem MV-Verbindungsmorphismus auszurechnen, muss man einmal baryzentrisch unterteilen (habe dies skizziert, dabei zuerst Nummerierungsfehler gemacht, den ich später bemerkt habe), vgl. 4.4.2, dann aufteilen in Summand, der von  $U$  kommt, und Summand, der von  $V$  kommt...**

(b) Der Beweis geht analog wie oben. Wir können ohne Einschränkung  $X = F(w)$  für  $w = a_1 a_1 a_2 a_2 \dots a_g a_g$  annehmen. **Mal Bild für  $g = 1$ , reell projektive Ebene, und  $g = 2$ , Kleinsche Flasche.** Der Schnitt  $U \cap V$  ist nun ein Bouquet von  $g$  Kreislinien. Die Mayer-Vietoris-Sequenz liefert die folgende exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_2 X & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \tilde{\partial}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{H_1(i_U)} & \mathbb{Z}[a_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[a_g] & \xrightarrow{H_1(j_V)} & H_1 X \\
 \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 \tilde{\partial}_1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_0(j_U) & -H_0(j_V) \end{pmatrix}} & H_0 X & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Die linke Abbildung in der unteren Zeile ist injektiv, weshalb  $\tilde{\partial}_1 = 0$  folgt. Weiter gilt (für  $1 \in \mathbb{Z} \cong H_1(U \cap V)$  den Gegenuhrzeigersinn-Erzeuger)

$$H_1(i_U)(1) = [a_1] + [a_1] + [a_2] + [a_2] + \dots + [a_g] + [a_g].$$

Wir folgern einerseits  $H_2X = 0$ , weil  $H_1(i_U)$  injektiv ist, und andererseits

$$\mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \frac{\mathbb{Z}^g}{\mathbb{Z}\langle 2, \dots, 2 \rangle} \cong \frac{\mathbb{Z}[a_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[a_g]}{\langle 2[a_1] + 2[a_2] + \dots + 2[a_g] \rangle} \xrightarrow{\sim} H_1X,$$

da  $\tilde{\partial}_1 = 0$ . Natürlich gilt  $H_0X \cong \mathbb{Z}$ . Da in der obigen Sequenz in den linken beiden Spalten in allen Graden  $\geq 2$  nur Nullen stehen, folgt  $H_p(X) = 0$  für alle  $p \geq 3$ .

Bei Koeffizienten in einem  $R$ -Modul  $M$  ist  $H_1(i_U)$  die Abbildung

$$H_1(i_U): M \rightarrow M[a_1] \oplus \dots \oplus M[a_g] \cong M^{\oplus g} := M^g, \\ m \mapsto (2m, 2m, \dots, 2m).$$

Sie ist im allgemeinen nicht injektiv (etwa für  $M = \mathbb{F}_2 = R$ ). Ihr Kern ist (isomorph zu)  $H_2(X; M)$ , ihr Kokern ist (isomorph zu)  $H_1(X; M)$ .

Male Bild im Fall  $g = 1$  und  $g = 2$ . Erkläre jeweils Erzeuger. Erkläre 2-Torsion!

Erkläre, warum es keinen Fundamentarzykel gibt! □

**4.6.4.** Sei  $w = a(1)^{\varepsilon(1)}a(2)^{\varepsilon(2)} \dots a(2r)^{\varepsilon(2r)}$  ein Flächenwort über einem  $r$ -elementigen Alphabet  $A$ . Die wesentliche Idee des obigen Beweises funktioniert, falls beim Übergang vom Fundamentalpolygon zum topologischen Raum  $X = F(w)$  alle Ecken auf denselben Punkt gehen und somit das Kantengerüst von  $X$  ein Bouquet von Kreislinien ist (wir hätten den Beweis auch in dieser Allgemeinheit beginnen können): Dann erhalten wir eine Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H_2X & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \tilde{\partial}_2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \xrightarrow{H_1(i_U)} \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}[a] \xrightarrow{H_1(j_U)} H_1X \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \tilde{\partial}_1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_0(j_U) & -H_0(j_V) \end{pmatrix}} H_0X \longrightarrow 0. \end{array}$$

Die linke Abbildung in der unteren Zeile ist injektiv, weshalb  $\tilde{\partial}_1 = 0$  folgt. Also ist  $H_2X$  der Kern bzw.  $H_1X$  ist der Kokern der Abbildung

$$H_1(i_U): \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_{a \in A} \mathbb{Z}[a] \cong \mathbb{Z}^A \cong \mathbb{Z}^r, \\ 1 \mapsto \varepsilon(1)[a(1)] + \varepsilon(2)[a(2)] + \dots + \varepsilon(2r)[a(2r)].$$

Das Element rechts unten ist die „additive Version“ von  $w$ . Natürlich gilt  $H_0X = \mathbb{Z}$  und  $H_{\geq 3}X = 0$ .

Kleinsche Flasche, anschauliche Darstellung mit Quadrat, dann Zylinder und dann Randkreise falsch herum verkleben. Erklärt  $\mathbb{Z}$ -Basis  $H_1$  besonders anschaulich.

**Aufgabe 4.6.5.** Berechne die singuläre Homologie einer Sphäre mit  $g = 2$  Henkeln direkt mit Mayer-Vietoris (ohne Darstellung dieser Fläche durch ein Flächenwort)! Beschreibe  $\mathbb{Z}$ -Basen der Homologiegruppen  $H_0$ ,  $H_1$  und  $H_2$  geometrisch. Hm, mir schwebte da eigentlich sowas wie in 4.8.14 beschrieben vor, was aber an dieser Stelle noch nicht verfügbar ist ...

Hinweis: Starte mit der Sphäre; entferne vier offene Kreisscheiben und klebe zwei Zylinder an, indem deren Ränder mit den Rändern der offenen Kreisscheiben identifiziert werden. Nimm als Menge  $U$  eine offene Verdickung der Sphäre ohne die Kreisscheiben und als Menge  $V$  eine offene Verdickung der disjunkten Vereinigung der beiden Zylinder. Bestimme explizit die „linken horizontalen“ Morphismen in der Mayer-Vietoris-Sequenz. Spalte die lange exakte Sequenz in kurze exakte Sequenzen auf (was könnte damit gemeint sein?). Dies liefert eine kurze exakte Sequenz  $\mathbb{Z}^g \hookrightarrow H_1 \rightarrow \mathbb{Z}^g$ . Folgere  $H_1 \cong \mathbb{Z}^{2g}$  (beispielsweise kann man eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $H_1$  konstruieren, indem man die Standard- $\mathbb{Z}$ -Basis der Untergruppe  $\mathbb{Z}^g$  mit Lifts der Elemente der Standard- $\mathbb{Z}$ -Basis des Quotienten  $\mathbb{Z}^g$  kombiniert).<sup>49</sup>

<sup>49</sup>Abstrakter folgt dies aus der Tatsache, dass jede kurze exakte Sequenz  $A \hookrightarrow B \rightarrow C$  abelscher Gruppen mit  $C$  einer freien (oder allgemeiner projektiven) abelschen Gruppe spaltet.

Beschreibe explizit 1-Zykel, die eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $H_1$  bilden (hierzu ist der Verbindungsmorphismus mit Hilfe des Satze über feine Ketten zu analysieren).

Bemerkung: Dasselbe Verfahren funktioniert für  $g \geq 1$  Henkel.

**Aufgabe 4.6.6.** Berechne die singuläre Homologie der Kleinschen Flasche mit Mayer-Vietoris und der in [Wik20, Mayer-Vietoris sequence, Klein bottle] erklärten Überdeckung durch zwei Möbiusbänder.

Hier <http://www.math.tu-dresden.de/modellsammlung/karte.php?ID=9> ein nettes Modell.

Ende der 11. Vorlesung am 03.12.2020. Ende der 12. Vorlesung am 04.12.2020 (war eher eine lange Vorlesung...).

Hausaufgaben:

- (1) (a) Aufgabe 4.4.3
- (b) Aufgabe 4.4.4 (Mayer-Vietoris simplizial)
- (2) (a) Aufgabe 4.5.3 (gewisse Überdeckungen von  $\mathbb{S}^1$  und  $\mathbb{S}^2$  existieren nicht)
- (b) Aufgabe 4.5.4 (Bouquet von Kreislinien und ähnliches)
- (3) mein Favorit diese Woche (beim Rechnen nicht die Geometrie vergessen!): Aufgabe 4.6.5 (singuläre Homologie der Sphäre mit zwei Henkeln, direkt ohne Flächenwort)
- (4) Aufgabe 4.6.6 (singuläre Homologie der Kleinschen Flasche, ebenfalls direkt ohne Flächenwort)

#### 4.7. Ausschneidung.

**Satz 4.7.1** (Ausschneidung). Seien  $(X, Z)$  ein Raumpaar und  $E \subset Z$  eine Teilmenge mit  $\overline{E} \subset Z^\circ$ , wobei Abschluss und Inneres in  $X$  gebildet werden. Dann liefert die Inklusion  $X \setminus E \hookrightarrow X$  oder genauer der entsprechende Morphismus  $(X \setminus E, Z \setminus E) \hookrightarrow (X, Z)$  von Raumpaaaren Isomorphismen

$$(4.7.1) \quad H_q(X \setminus E, Z \setminus E) \xrightarrow{\sim} H_q(X, Z)$$

auf den relativen Homologiegruppen für alle  $q \in \mathbb{Z}$ .

**4.7.2.** Gleichzeitiges „Ausschneiden“ von  $E$  aus  $X$  und  $Z$  ändert die relative Homologie nicht. In Anwendungen sind oft  $Z$  offen in  $X$  und  $E$  abgeschlossen in  $X$ . Dann vereinfacht sich die Bedingung  $\overline{E} \subset Z^\circ$  zu  $E \subset Z$ .

*Beweis.* Betrachte die Überdeckung  $\mathcal{V} = \{Z, X \setminus E\}$  von  $X$ . Dann gilt  $X = Z^\circ \cup (X \setminus E)^\circ$  wegen  $(X \setminus E)^\circ = X \setminus \overline{E}$  (siehe [Sch20, Lemma 2.5.6]) und unserer Annahme  $\overline{E} \subset Z^\circ$ , so dass der Satz über feine Ketten 4.3.10 anwendbar ist und zeigt, dass  $S^\mathcal{V}X \subset SX$  ein Quasi-Isomorphismus ist.

Zunächst die gestrichelten Pfeile ignorierend, betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 S(Z \setminus E) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & SZ \oplus S(X \setminus E) & \xrightarrow{(1 \ -1)} & S^\mathcal{V}X \\
 \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \\
 S(X \setminus E) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & SX \oplus S(X \setminus E) & \xrightarrow{(1 \ -1)} & SX \\
 \downarrow & & \downarrow (1 \ 0) & & \downarrow \\
 S(X \setminus E, Z \setminus E) & \cdots \cdots \cdots & S(X, Z) & \cdots \cdots \cdots & \frac{SX}{S^\mathcal{V}X}
 \end{array}$$

in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$  mit hoffentlich offensichtlichen, teilweise in Matrixschreibweise gegebenen Abbildungen, wobei wir Elemente der direkten Summen als Spaltenvektoren schreiben; die horizontale Abbildung links oben bildet etwa  $s$  auf  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} s = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix}$  ab. Die Spalten dieses Diagramms sind offensichtlich kurze exakte Sequenzen. Dies samt Kommutativität zeigt, dass die mittleren horizontalen Abbildungen die gestrichelten horizontalen Abbildungen induzieren, so dass die beiden unteren Quadrate kommutativ sind. Die linke horizontale Abbildung ist die in 4.1.9 erklärte Abbildung für unseren Morphismus von Raumpaaaren.

Die oberen beiden Zeilen dieses Diagramms sind ebenfalls kurze exakte Sequenzen (offensichtlich bzw. Aufgabe 4.4.3 für die Überdeckungen  $\mathcal{V}$  und  $\{X, X \setminus E\}$ ).

Das komponentenweise angewandte Neunerlemma B.4.3 (oder seine Version B.4.5 für Komplexe) zeigt nun, dass auch die dritte Zeile eine kurze exakte Sequenz ist. Da nach dem Satz über feine Ketten 4.3.10 der Komplex  $\frac{SX}{S^\mathcal{V}X}$  azyklisch ist, zeigt die lange exakte Homologiesequenz (Satz B.3.4) zur dritten Zeile, dass

$S(X \setminus E, Z \setminus E) \hookrightarrow S(X, Z)$  ein Quasi-Isomorphismus ist. Die induzierten Isomorphismen auf den Homologien sind die behaupteten Isomorphismen (4.7.1).  $\square$

4.7.1. *Anwendungen der Ausschneidung.*

4.7.3. Bezeichne  $\partial\Delta_n$  den topologischen Rand des  $n$ -ten Standardsimplex  $\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in [0, 1]^{n+1} \mid \sum x_i = 1\}$  als Teilmenge des  $\mathbb{R}^{n+1}$ , d. h.

$$\partial\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \Delta_n \mid x_i = 0 \text{ für ein } i\}.$$

4.7.4. Offensichtlich gibt es einen Homöomorphismus  $\Delta_n \xrightarrow{\sim} D^n$ , der einen Homöomorphismus  $\partial\Delta_n \xrightarrow{\sim} \partial D^n = \mathbb{S}^{n-1}$  induziert (stereographische Projektion).<sup>50</sup> Jeder solche Homöomorphismus induziert Isomorphismen  $H_q(\partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} H_q(\mathbb{S}^{n-1})$  auf den Homologiegruppen bzw.  $H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} H_q(D^n, \mathbb{S}^{n-1})$  auf den relativen Homologiegruppen (3.2.4, 4.1.9). Dies sorgt für die „doppelte Formulierung desselben Resultats“ in Satz 4.7.5.

**Satz 4.7.5.** *Sei  $n \geq 0$ . Die singulären Homologiegruppen der Standardsimplizes relativ zu ihrem Rand sind durch*

$$H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}[\text{id}_{\Delta_n}] \cong \mathbb{Z} & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben, wobei  $\text{id}_{\Delta_n}$  der tautologische  $n$ -Simplex ist.

Analog sind die singulären Homologiegruppen der Vollkugeln relativ zu ihrem Rand durch

$$H_q(D^n, \mathbb{S}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

gegeben.

4.7.6. Den Fall  $n = 1$  haben wir in Beispiel 4.2.2 von Hand erledigt.

*Beweis.* Wir zeigen dies durch vollständige Induktion über  $n$ . Für  $n = 0$  gilt  $\Delta_0 = \{1\} \supset \partial\Delta_0 = \emptyset$  und somit  $H_q(\Delta_0, \partial\Delta_0) = H_q(\{1\}, \emptyset) = H_q(\{1\})$ , die Aussage ist also trivial nach Beispiel 3.1.21.

Induktionsschritt von  $n \geq 0$  auf  $n + 1$ : Wir fassen  $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$  als Teilmenge auf vermöge der  $(n + 1)$ -ten Seiteninklusion  $k_{n+1}: \Delta_n \rightarrow \Delta_{n+1}$ ,  $(x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, x_n, 0)$ . Die Ecke  $p := e_{n+1}$  von  $\Delta_{n+1}$  liegt dann  $\Delta_n$  gegenüber. Sei  $\Lambda_{n+1}$  die Vereinigung aller Seitenflächen von  $\Delta_{n+1}$ , die  $p$  enthalten. **Male Bilder!**

Die Beweisidee wird durch Abbildung 2 (und die Isomorphismen in (4.7.5)) illustriert: Die Inklusionen der drei rechts untereinanderstehenden Raumtripel induzieren Isomorphismen auf der relativen Homologie. Im Raumtripel in der obersten Zeile verschwindet die relative Homologie des äußeren Paares, weswegen die  $q + 1$ -te relative Homologie des linken Paares unter dem Randoperator isomorph auf die  $q$ -te des rechten Paares geht.

<sup>50</sup> Wer dies konkret sehen möchte: Betrachte den Homöomorphismus

$$\underbrace{(-e_1 - e_2 - \dots - e_n, e_1, e_2, \dots, e_n)}_{\Delta_n} : \Delta_n \xrightarrow{\sim} K := \text{konv}(- (e_1 + e_2 + \dots + e_n), e_1, e_2, \dots, e_n) \subset \mathbb{R}^n,$$

wobei die Koordinaten von  $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  von 0 bis  $n$  durchnummeriert sind und die von  $\mathbb{R}^n$  von 1 bis  $n$ . Weiter sei

$$\varphi: K \xrightarrow{\sim} D_n$$

die „stereographische Projektion“ vom Ursprung  $0 = -\frac{1}{n+1}(e_1 + \dots + e_n) + \frac{1}{n+1}e_1 + \dots + \frac{1}{n+1}e_n$ , der im Inneren unserer konvexen Hülle liegt, auf die  $n$ -dimensionale Kreisscheibe  $D^n$ . Die Stetigkeit dieser Abbildung sieht man wie folgt. Zunächst ist  $\varphi' := \varphi|_{\partial K}: \partial D_n = \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ , sicherlich stetig und bijektiv, also ein Homöomorphismus nach [Sch20, Satz 2.7.15]. Damit kennen wir den Streckfaktor in jeder Richtung und es gilt

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{\left\| \varphi'^{-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|} & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist offensichtlich in  $x$  stetig, insbesondere im Ursprung. Damit ist  $\varphi$  stetig und bijektiv, also ein Homöomorphismus nach dem soeben zitierten Resultat. Die Verknüpfung unsere beiden Homöomorphismen ist der gesuchte Homöomorphismus  $\Delta_n \xrightarrow{\sim} D_n$ .

Allgemeiner gilt (Übung 1.4.12 in Soergel, Topologie und kompakte Gruppen): Sind  $K, L \subset \mathbb{R}^n$  zwei nichtleere offene konvexe Teilmengen, so gibt es einen Homöomorphismus  $K \xrightarrow{\sim} L$ . Sind  $K$  und  $L$  zusätzlich beschränkt, so gibt es sogar einen Homöomorphismus  $\overline{K} \xrightarrow{\sim} \overline{L}$  zwischen ihren Abschlüssen, der einen Homöomorphismus zwischen ihren Rändern induziert.

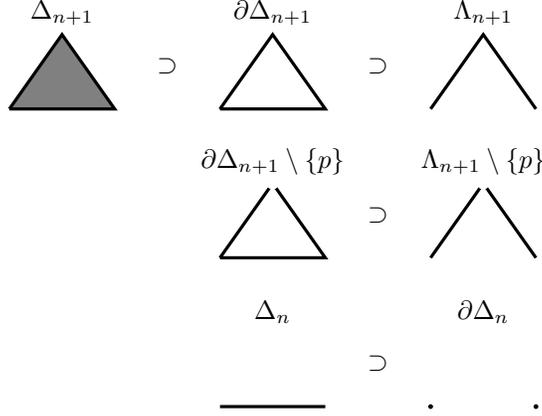


ABBILDUNG 2. Illustration zum Beweis von Satz 4.7.5 im Fall  $n = 1$

Wir geben zwei Begründungen, warum die Inklusion  $(\Delta_n, \partial\Delta_n) \subset (\partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}, \Lambda_{n+1} \setminus \{p\})$  von Raumpaaren Isomorphismen

$$(4.7.2) \quad H_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}, \Lambda_{n+1} \setminus \{p\})$$

auf allen relativen Homologien induziert:<sup>51</sup>

- (a) Beide (an unserer Inklusion von Raumpaaren beteiligten) Inklusionen  $\Delta_n \subset \partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}$  und  $\partial\Delta_n \subset \Lambda_{n+1} \setminus \{p\}$  sind Inklusionen von Deformationsretrakten, somit Homotopieäquivalenzen (siehe [Sch20, Lemma 3.5.4]), und induzieren also Isomorphismen auf der singulären Homologie nach 3.3.4. Nun verwende Korollar 4.2.3
- (b) (Gefällt mir eigentlich besser, aber streng genommen ist nicht alles definiert.) Mit den naheliegenden Definitionen ist das Raumpaar  $(\Delta_n, \partial\Delta_n)$  ein „Deformationsretrakt von Raumpaaren“ des Raumpaares  $(\partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}, \Lambda_{n+1} \setminus \{p\})$ , somit ist unsere Inklusion von Raumpaaren eine „Homotopieäquivalenz von Raumpaaren“ und induziert somit Isomorphismen auf der relativen Homologie nach Aufgabe 4.1.11.

Ausschneiden von  $\{p\}$  aus dem Raumpaar  $(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$  liefert nach Satz 4.7.1 Isomorphismen

$$(4.7.3) \quad H_q(\partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}, \Lambda_{n+1} \setminus \{p\}) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

auf allen Homologien. Schließlich liefert das Raumtripel  $(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$  nach 4.2.4 eine lange exakte Homologiesequenz

$$(4.7.4) \quad \begin{array}{c} \dots \longrightarrow H_{q+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \longrightarrow \\ \xrightarrow{\tilde{\partial}_{q+1}} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1}) \longrightarrow H_q(\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1}) \longrightarrow H_q(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \longrightarrow \\ \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} H_{q-1}(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1}) \longrightarrow \dots \end{array}$$

in der alle Terme der mittleren Spalte Null sind, also  $H_q(\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1}) = 0$  für alle  $q \in \mathbb{Z}$  gilt: Dies folgt aus der langen exakten Homologie-Sequenz 4.2.1 für das Raumpaar  $(\Lambda_{n+1}, \Delta_{n+1})$ , denn alle Morphismen  $H_q(\Lambda_{n+1}) \rightarrow H_q(\Delta_{n+1})$  sind Isomorphismen, denn  $\Lambda_{n+1}$  und  $\Delta_{n+1}$  sind zusammenziehbar, vgl. Beispiel 3.3.2. Die lange exakte Sequenz (4.7.4) schrumpft deswegen zu Isomorphismen

$$\tilde{\partial}_{q+1}: H_{q+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \xrightarrow{\sim} H_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$$

<sup>51</sup>Ausschneidung 4.7.1 ist hier nicht anwendbar!

zusammen. Zusammengefasst haben wir Isomorphismen

$$(4.7.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{H}_q(\Delta_n, \partial\Delta_n) & \xrightarrow[\sim]{(4.7.2)} & \mathbb{H}_q(\partial\Delta_{n+1} \setminus \{p\}, \Lambda_{n+1} \setminus \{p\}) & \xrightarrow[\sim]{(4.7.3)} & \mathbb{H}_q(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1}) \\ & & & & \uparrow \tilde{\partial}_{q+1} \sim \\ & & & & \mathbb{H}_{q+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1}) \end{array}$$

Per Induktion zeigt dies, dass die Homologie rechts unten nur für  $q + 1 = n + 1$  von Null verschieden und dann isomorph zu  $\mathbb{Z}$  ist.

Im Fall  $q = n$  wird der Erzeuger  $[\text{id}_{\Delta_n}]$  von  $\mathbb{H}_n(\Delta_n, \partial\Delta_n)$  unter der Verknüpfung der beiden horizontalen Abbildungen auf  $[k_{n+1}] \in \mathbb{H}_n(\partial\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$  abgebildet. Der potentielle Erzeuger  $[\text{id}_{\Delta_{n+1}}]$  von  $\mathbb{H}_{n+1}(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1})$  wird unter dem Randisomorphismus  $\tilde{\partial}_{q+1}$  auf die Homologiekategorie von  $\partial\text{id}_{\Delta_{n+1}} = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i k_i$  abgebildet, welche mit der Homologiekategorie von  $(-1)^{n+1} k_{n+1}$  übereinstimmt (die beiden Elemente stimmen genauer schon in  $S_n(\Delta_{n+1}, \Lambda_{n+1})$  überein), denn die anderen Summanden haben Bild in  $\Lambda_{n+1}$ , und ist somit in der Tat ein Erzeuger.

Die Behauptung für  $\mathbb{H}_q(D^n, S^{n-1})$  folgt aus 4.7.4.  $\square$

**Korollar 4.7.7.** Die singulären Homologiegruppen des „ $n$ -dimensionalen“ Randes  $\partial\Delta_{n+1}$  des  $(n + 1)$ -ten Standardsimplex  $\Delta_{n+1}$  sind wie folgt gegeben: Im Fall  $n \geq 1$  gilt

$$\mathbb{H}_q(\partial\Delta_{n+1}) = \begin{cases} \mathbb{Z}[\partial\text{id}_{\Delta_{n+1}}] \cong \mathbb{Z} & \text{falls } q = n, \\ \mathbb{Z}[e_0] \cong \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hier ist  $\text{id}_{\Delta_{n+1}} \in \text{Top}(\Delta_{n+1}, \Delta_{n+1}) \subset S_{n+1}(\Delta_{n+1})$  der tautologische  $(n + 1)$ -Simplex; wir fassen seinen Rand als Element von  $S_n(\partial\Delta_{n+1})$  auf.

Im Fall  $n = 0$  besteht der Rand  $\partial\Delta_1 = \{e_0, e_1\}$  des 1-Simplex aus zwei Punkten und seine einzige nichtverschwindende Homologie ist  $\mathbb{H}_0(\partial\Delta_1) = \mathbb{Z}[e_0] \oplus \mathbb{Z}[e_1] \cong \mathbb{Z}^2$ .

**4.7.8 (Homologie der Sphären).** Satz 4.5.1 folgt sofort aus Korollar 4.7.7 mit Hilfe von 4.7.4. Als Zusatzinformation bekommt man einen Erzeuger von  $\mathbb{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ : Sei  $p: \partial\Delta_{n+1} \xrightarrow{\sim} S^n$  ein Homöomorphismus (beispielsweise herrührend von dem Homöomorphismus stereographische Projektion  $\Delta_{n+1} \xrightarrow{\sim} D^{n+1}$  aus Fußnote 50). Setze  $e := S_n(p)(\partial\text{id}_{\Delta_{n+1}})$ . Dann gilt  $\mathbb{H}_n(S^n) = \mathbb{Z}[e]$ .

*Beweis.* Der Fall  $n = 0$  ist klar. Im Fall  $n \geq 1$  folgt dies aus Satz 4.7.5 und der langen exakten Homologie-Sequenz 4.2.1 des Raumpaars  $(\Delta_{n+1}, \partial\Delta_{n+1})$  (die mittlere Spalte lebt nur im Grad Null, die rechte nur in den beiden Graden 0 und  $n + 1 \geq 2$ ).  $\square$

**Definition 4.7.9.** Ist  $x$  ein Punkt eines topologischen Raums, so heißt

$$\mathbb{H}_q(X, X \setminus \{x\})$$

$q$ -te lokale Homologie von  $X$  bei  $x$  (vgl. [Wik20, Relative homology, Local homology]). Ich führe (vorerst?) keine eigenständige Notation dafür ein.

**Korollar 4.7.10.** Für alle  $n \geq 0$  und  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt für die lokale Homologie von  $\mathbb{R}^n$  bei  $x$

$$\mathbb{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

<sup>52</sup>Invarianz der Dimension: Insbesondere sind  $\mathbb{R}^m$  und  $\mathbb{R}^n$  für  $m \neq n$  nicht homöomorph.

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung  $x = 0$  annehmen. Die Inklusion  $D^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  konvexer Mengen liefert Isomorphismen auf den singulären Homologien (die beide nur in Grad Null leben und dort isomorph zu  $\mathbb{Z}$  sind). Da  $S^{n-1}$  ein Deformationsretrakt von  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ist, liefert die Inklusion  $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

<sup>52</sup>Der Beweis zeigt auch, wie man einen Erzeuger von  $\mathbb{H}_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\})$  bekommt.

Isomorphismen zwischen den singulären Homologien. Die Inklusion  $(D^n, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  liefert somit nach Korollar 4.2.3 Isomorphismen

$$H_q(D^n, \mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\sim} H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

für alle  $q \in \mathbb{Z}$ . Nun verwende Satz 4.7.5.

Die letzte Aussage ist klar, denn jeder Homöomorphismus  $\varphi: \mathbb{R}^m \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$  induziert einen Isomorphismus  $\varphi: (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{x\}) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{\varphi(x)\})$  von Raumpaaren für beliebiges  $x \in \mathbb{R}^m$ . Nimm die  $m$ -te relative Homologie.  $\square$

**Aufgabe 4.7.11.** Die (im Beweis von Korollar 4.7.10 betrachtete) Inklusion  $i: (D^n, \mathbb{S}^{n-1}) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  ist keine „Homotopieäquivalenz von Raumpaaren“, denn es gibt nicht einmal einen Morphismus  $g: (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \rightarrow (D^n, \mathbb{S}^{n-1})$  von Raumpaaren, so dass  $g \circ i$  homotop zur Identität von  $(D^n, \mathbb{S}^{n-1})$  ist (*homotop* ist hier im Sinne von Aufgabe 4.1.11 zu verstehen).

(Lösung auskommentiert)

### Aufgabe 4.7.12.

- (a) Ist  $u$  ein Punkt einer (nichtleeren) offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$ , so gilt

$$H_q(U, U \setminus \{u\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hinweis: Ausschneidungssatz 4.7.1 und Korollar 4.7.10.

- (b) Wenn nichtleere Teilmengen  $U \subset \mathbb{R}^m$  und  $V \subset \mathbb{R}^n$  homöomorph sind, so gilt  $m = n$ .  
(c) Sind allgemeiner  $M$  und  $N$  homöomorphe nichtleere topologische Mannigfaltigkeit der Dimensionen  $m$  und  $n$  (siehe [Sch20, Definition 3.10.18]), so gilt  $m = n$ .  
(d) In jeder Triangulierung einer nichtleeren  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit kommen nur Simplex der Dimension  $\leq m$  vor: Sei  $f: \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} M$  eine Triangulierung einer nichtleeren  $m$ -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit  $M$ . Wer mag, darf zusätzlich annehmen, dass es ein  $s \in \mathbb{N}$  mit  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\leq s}$  gibt. Dann gilt  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\leq m}$ .

Bemerkung: Wer dies mit den aktuellen Mitteln ohne die Zusatzannahme beweisen kann, bekommt Bonuspunkte! Wir werden die allgemeine Aussage später als Korollar ?? beweisen.

**Aufgabe 4.7.13** (Relative Homologie als (reduzierte) Homologie der Einpunktidentifizierung). Sei  $(X, A)$  ein Raumpaar. Sei  $X/A$  die Menge, die aus  $X$  entsteht, indem man  $A$  zu einem Punkt identifiziert.<sup>53</sup> Wir versehen  $X/A$  mit der Finaltopologie bezüglich der offensichtlichen Abbildung  $X \twoheadrightarrow X/A$ .

Sei  $A \subset X$  abgeschlossen und existiere eine Teilmenge  $U \subset X$  mit  $A \subset U^\circ$ , so dass die Inklusionen  $A \hookrightarrow U$  und  $A/A \hookrightarrow U/A$  Isomorphismen auf allen singulären Homologien induzieren (diese Inklusionen könnten beispielsweise Homotopieäquivalenzen sein – dies ist beispielsweise der Fall, wenn  $A$  ein Deformationsretrakt von  $U$  ist<sup>54</sup>). Dann ist für alle  $q \in \mathbb{Z}$  die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$H_q(X, A) \xrightarrow{\sim} H_q(X/A, A/A).$$

Folgere für alle  $q \neq 0$  kanonische Isomorphismen

$$H_q(X, A) \cong H_q(X/A).$$

Bemerkung: Der letzte kanonische Isomorphismus gilt auch für  $q = 0$ , wenn wir die rechte Seite durch die später definierte reduzierte singuläre Homologie  $\tilde{H}_q(X/A)$  von  $X/A$  ersetzen. **Referenz einfügen (Definition + kanonischer Iso).**

<sup>53</sup> Formal betrachtet man die Äquivalenzrelation  $x \sim y \iff (x = y \text{ oder } (x \in A \text{ und } y \in A))$  und setzt  $X/A := X/\sim$ .

<sup>54</sup> Dies wird im Beweis von [Hat02, Proposition 2.22] einfach behauptet: „The deformation retraction of  $V$  onto  $A$  induces a deformation retraction of  $V/A$  onto  $A/A$  ...“. Das stimmt zwar, scheint mir aber nicht so offensichtlich – ich denke, man sollte dafür ein Resultat wie Proposition C.0.4 zitieren, aus dem es in offensichtlicher Weise folgt.

Hinweis: Betrachte das folgende kommutative Diagramm von Raumpaaren (für implizit verwendete topologische Feinheiten beachte [Sch20, Aufgabe 2.8.50]).

$$\begin{array}{ccccc} (X, A) & \longrightarrow & (X, U) & \longleftarrow & (X \setminus A, U \setminus A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (X/A, A/A) & \longrightarrow & (X/A, U/A) & \longleftarrow & (X/A \setminus A/A, U/A \setminus A/A) \end{array}$$

Bemerkung: Ein gutes Beispiel zur Veranschaulichung ist  $X = D^2 \supset A = \mathbb{S}^1$  und  $U$  eine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $A$ .

Ende der 13. Vorlesung am 10.12.2020.

#### 4.8. Vergleichsisomorphismus zwischen simplizialer Homologie eines Simplizialkomplexes und singulärer Homologie seiner geometrischen Realisierung.

**4.8.1.** Ziel dieses Abschnitts ist Satz 4.8.18: Die simpliziale Homologie eines Simplizialkomplexes  $\mathcal{K}$  stimmt bis auf einen kanonischen natürlichen Isomorphismus mit der singulären Homologie seiner geometrischen Realisierung  $\Delta(\mathcal{K})$  überein. (Wer bereit ist, auf die Worte *kanonisch* und *natürlich* zu verzichten, kann den Beweis abkürzen, wie in 4.8.12 erklärt.)

Um dies zu sehen, betrachten wir einen weiteren Komplex  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$  abelscher Gruppen, der zwischen den beiden Komplexen  $SK$  (zur Berechnung der simplizialen Homologie) und  $S\Delta(\mathcal{K})$  (zur Berechnung der singulären Homologie) vermittelt.

**Definition 4.8.2.** Sei  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, E)$  ein Simplizialkomplex. Für  $q \geq 0$  definiere<sup>55</sup>

$$(4.8.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}_q^{\text{bel}} &:= \{s: \{0, \dots, q\} \rightarrow E \text{ beliebige Abbildung} \mid (\text{im } s) \in \mathcal{K}\} \\ &= \{(s_0, \dots, s_q) \in E^{q+1} \mid \{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}\} \end{aligned}$$

**4.8.3.** Ist  $e \in E$  eine Ecke von  $\mathcal{K}$ , so gilt beispielsweise  $(e, e, \dots, e) \in \mathcal{K}_q^{\text{bel}}$  für alle  $q \geq 0$ .

**4.8.4.** Sei  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex. Ersetzen wir in Definition 2.4.4 und Proposition 2.4.6 samt Beweis  $\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$  durch  $\mathcal{K}^{\text{bel}}$  (und natürlich (2.4.1) durch (4.8.1)), so erhalten wir einen Komplex

$$(4.8.2) \quad \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} := (\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}, \partial) := \left( \dots \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\mathcal{K}_0^{\text{bel}} \xrightarrow{\partial_0=0} \underbrace{\mathbb{Z}\mathcal{K}_{-1}}_{=\{0\}} \rightarrow \dots \right)$$

abelscher Gruppen. Dieser Komplex lebt (im Gegensatz zu  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ ) wegen 4.8.3 in *allen* nichtnegativen Graden, falls  $E \neq \emptyset$  gilt. Man beachte, dass wir zur Definition von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$  keine Ordnung auf  $E$  benötigen. Fixieren wir aber eine solche, so induzieren die Inklusionen  $\mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \subset \mathcal{K}_q^{\text{bel}}$  einen komponentenweise injektiven Morphismus

$$(4.8.3) \quad \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$$

von Komplexen, der sich im Beweis von Proposition 4.8.5 als Quasi-Isomorphismus erweisen wird.

**Proposition 4.8.5.** Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex. Dann definieren die (offensichtlich surjektiven) Gruppenmorphisamen

$$\begin{aligned} \Phi_q &: \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{bel}} \rightarrow S_q\mathcal{K}, \\ \mathcal{K}_q^{\text{bel}} \ni s = (s_0, \dots, s_q) &\mapsto \begin{cases} (s_0, \dots, s_q) & \text{falls } \{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}_q \text{ (äquivalent: } s \text{ injektiv, d. h. } s \in \mathcal{K}_q^{\text{ang}}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

für  $q \geq 0$  und  $\Phi_q := 0$  für  $q < 0$  einen Quasi-Isomorphismus

$$(4.8.4) \quad \Phi = \Phi_{\mathcal{K}}: \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} \rightarrow SK$$

in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$ .<sup>56</sup> Insbesondere berechnet  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$  die simpliziale Homologie von  $\mathcal{K}$ .

<sup>55</sup> Diese Definition tauchte bereits in 2.4.30.(a) auf, dort jedoch nur für einen maximalen Simplizialkomplex.

<sup>56</sup> Diese Aussage ist im Wesentlichen [Mun84, Theorem 13.6, S. 77] oder [Spa81, Theorem 8, S. 171], wo der Komplex  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$  als *ordered chain complex* und der Komplex  $SK$  als *oriented chain complex* bezeichnet werden.

*Beweis. Behauptung 1:*  $\Phi: \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} \rightarrow \mathcal{SK}$  ist ein Morphismus von Komplexen.<sup>57</sup> Die Verträglichkeit der  $\Phi_q$  mit den Differentialen ist zu zeigen. Für beliebiges  $q \geq 1$  und  $s = (s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{bel}}$  ist also  $\Phi(\partial(s)) = \partial(\Phi(s))$  zu zeigen. Nur im Fall  $\{s_0, \dots, s_q\} \in \mathcal{K}_{q-1}$  ist dies nicht offensichtlich. In diesem Fall gibt es genau zwei verschiedene Indizes  $a < b$  mit  $s_a = s_b$ . Wegen  $\Phi(s) = 0$  ist nur zu zeigen, dass  $\Phi(\partial(s))$  verschwindet (die vorletzte Gleichung verwendet die Definition (2.4.6)):

$$\begin{aligned} \Phi(\partial(s)) &= \Phi\left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (s_0, \dots, s_{i-1}, \widehat{s}_i, s_{i+1}, \dots, s_q)\right) \\ &= (-1)^a (s_0, \dots, s_{a-1}, \widehat{s}_a, s_{a+1}, \dots, s_{b-1}, s_b, s_{b+1}, \dots, s_q) \\ &\quad + (-1)^b (s_0, \dots, s_{a-1}, s_a, s_{a+1}, \dots, s_{b-1}, \widehat{s}_b, s_{b+1}, \dots, s_q) \\ &= (-1)^a (s_0, \dots, s_{a-1}, \widehat{s}_a, s_{a+1}, \dots, s_{b-1}, s_b, s_{b+1}, \dots, s_q) \\ &\quad + (-1)^b (-1)^{b-a-1} (s_0, \dots, s_{a-1}, \widehat{s}_a, s_{a+1}, \dots, s_{b-1}, s_a, s_{b+1}, \dots, s_q) \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Behauptung 2:**  $\Phi: \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} \rightarrow \mathcal{SK}$  ist ein Quasi-Isomorphismus. Sei  $E$  die Eckenmenge von  $\mathcal{K}$  und  $\leq$  eine Ordnung auf  $E$  (existiert stets). Dann ist das Diagramm

$$(4.8.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} & \xrightarrow{\Phi = \Phi_{\mathcal{K}}} & \mathcal{SK} \\ \uparrow \Theta_{\mathcal{K}} & \nearrow \sim & \\ \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} & & \end{array} \quad (2.4.10)$$

offensichtlich kommutativ.<sup>58</sup> Da der diagonale Pfeil nach Proposition 2.4.21 ein Isomorphismus (und insbesondere ein Quasi-Isomorphismus) ist, ist  $\Phi$  genau dann ein Quasi-Isomorphismus, wenn der vertikale Pfeil  $\Theta_{\mathcal{K}}$  ein solcher ist. Wir zeigen letzteres mit einer Art Induktion.

- Im Fall  $\mathcal{K} = \emptyset$  ist  $\Theta_{\mathcal{K}}$  offensichtlich ein Quasi-Isomorphismus.
- Ist  $\mathcal{K}$  ein maximaler Simplicialkomplex mit nichtleerer Eckenmenge<sup>59</sup>, so leben sowohl die Homologie von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$  als auch die von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$  nur in Grad Null und sind dort isomorph zu  $\mathbb{Z}$  (nach Lemma 2.4.29 und 2.4.30.(a) und dem Argument im Beweis von Korollar 2.4.31.(a)). Da  $H_0(\Theta_{\mathcal{K}})$  offensichtlich ein Isomorphismus ist, ist  $\Theta_{\mathcal{K}}$  ein Quasi-Isomorphismus.
- Sind  $\mathcal{U} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{K}$  beliebige Unterkomplexe von  $\mathcal{K}$ , so ist das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{bel}} & \subset & \mathbb{Z}\mathcal{W}^{\text{bel}} \\ \uparrow \Theta_{\mathcal{U}} & & \uparrow \Theta_{\mathcal{W}} \\ \mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}} & \subset & \mathbb{Z}\mathcal{W}^{\text{st-mono}} \end{array}$$

offensichtlich kommutativ, wobei die in der unteren Zeile verwendeten Ordnungen auf den Eckenmengen die Einschränkungen der Ordnung  $\leq$  auf  $E$  sind.<sup>60</sup>

- Seien  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{K}$  zwei Untersimplicialkomplexe. Dann ist das Diagramm

$$(4.8.6) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})^{\text{bel}} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{bel}} \oplus \mathbb{Z}\mathcal{V}^{\text{bel}} & \xrightarrow{(1 \ -1)} & \mathbb{Z}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V})^{\text{bel}} \\ \uparrow \Theta_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}} & & \uparrow \Theta_{\mathcal{U}} \oplus \Theta_{\mathcal{V}} & & \uparrow \Theta_{\mathcal{U} \cup \mathcal{V}} \\ \mathbb{Z}(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & \mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}} \oplus \mathbb{Z}\mathcal{V}^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{(1 \ -1)} & \mathbb{Z}(\mathcal{U} \cup \mathcal{V})^{\text{st-mono}} \end{array}$$

<sup>57</sup>Der Beweis erinnert mich an die Lösung von Aufgabe 2.4.27.

<sup>58</sup>Daraus folgt, dass  $\mathcal{SK}$  ein direkter Summand von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$  ist ( $\Phi_{\mathcal{K}}$  ist eine spaltende Surjektion/ein spaltender Epimorphismus).

<sup>59</sup>Diese darf sogar unendlich sein, auch wenn wir im aktuellen Beweis nur den endlichen Fall benötigen.

<sup>60</sup>Kategorisch gesagt ist  $\Theta$  eine natürliche Transformation zwischen Funktoren, die auf der Kategorie der Unterkomplexe von  $\mathcal{K} = (\mathcal{K}, E, \leq)$  (samt Inklusionen als Morphismen) definiert sind.

von Komplexen kommutativ und seine Zeilen sind kurze exakte Sequenzen (für die untere Zeile wurde dies vermutlich in der Lösung von Aufgabe 4.4.4 gezeigt, der Beweis für die obere Zeile geht analog). Aufgabe B.3.7 zeigt somit:<sup>61</sup>

(4.8.7) Sind  $\Theta_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}}$ ,  $\Theta_{\mathcal{U}}$  und  $\Theta_{\mathcal{V}}$  Quasi-Isomorphismen, so ist auch  $\Theta_{\mathcal{U} \cup \mathcal{V}}$  ein Quasi-Isomorphismus.

- Ist  $\mathcal{K}$  endlich, so ist  $\Theta_{\mathcal{K}}$  ein Quasi-Isomorphismus. Dies folgt per Induktion über die Kardinalität  $|\mathcal{K}|$  aus den vorherigen Überlegungen: Genauer kann man  $\mathcal{K}$ , ausgehend vom leeren Simplizialkomplex, durch sukzessives Hinzufügen neuer Simplizes (samt aller nichtleeren Teilmengen) in endlich vielen Schritten aufbauen. Im Induktionsschritt verwendet man (4.8.7): Dabei sei  $\mathcal{U}$  der bisher aufgebaute Unterkomplex und  $\mathcal{V}$  der maximale Simplizialkomplex des neu hinzugefügten Simplex, aufgefasst als Unterkomplex von  $\mathcal{K}$ . Dann sind  $\Theta_{\mathcal{V}}$  nach dem obigen und  $\Theta_{\mathcal{U}}$  und  $\Theta_{\mathcal{U} \cap \mathcal{V}}$  per Induktion Quasi-Isomorphismen; also ist nach (4.8.7) auch  $\Theta_{\mathcal{U} \cup \mathcal{V}}$  ein Quasi-Isomorphismus.
- Sei nun  $\mathcal{K}$  unendlich. Zu zeigen ist, dass für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  die induzierte Abbildung

$$(4.8.8) \quad H_q(\Theta_{\mathcal{K}}): H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}) \rightarrow H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}})$$

bijektiv ist.<sup>62</sup> Sowohl bei der Surjektivität als auch bei der Injektivität kann man sich dabei auf den Fall eines endlichen Unterkomplexes  $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$  zurückziehen, den wir bereits behandelt haben. Im Detail:

- Surjektivität: Sei  $c \in H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}})$  eine Homologiekategorie. Gelte  $c = [z]$  für einen  $q$ -Zykel  $Z_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}})$ . Da  $z$  eine (endliche) Linearkombination ist, gibt es einen endlichen Untersimplizialkomplex  $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$  mit  $z \in \mathbb{Z}\mathcal{U}_q^{\text{bel}}$  und genauer mit  $z \in Z_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{bel}})$ . Also können wir  $[z]$  als Element von  $H_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{bel}})$  auffassen. Da  $H_q(\Theta_{\mathcal{U}})$  surjektiv ist, gibt es ein Urbild  $e \in H_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}})$  von  $[z]$ . Das Bild von  $e$  in  $H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$  ist dann das gesuchte Urbild von  $c = [z] \in H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}})$ .
- Injektivität: Sei  $c \in H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$  eine Homologiekategorie, die auf Null geht. Gelte  $c = [z]$  für einen  $q$ -Zykel  $z \in Z_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$ . Dann ist  $\Theta(z)$  ein Rand, d.h. es gibt eine  $(q+1)$ -Kette  $k \in \mathbb{Z}\mathcal{K}_{q+1}^{\text{bel}}$  mit  $\partial(k) = z$ . Da sowohl  $k$  als auch  $z$  (endliche) Linearkombinationen sind, gibt es einen endlichen Untersimplizialkomplex  $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ , mit  $k \in \mathbb{Z}\mathcal{U}_{q+1}^{\text{bel}}$  und  $z \in \mathbb{Z}\mathcal{U}_q^{\text{st-mono}}$ . Sicherlich gelten  $\partial^{\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{bel}}}(k) = z$  und  $z \in Z_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}})$ . Dies bedeutet, dass  $[z]$ , nun aufgefasst als Element von  $H_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}})$  unter der bereits als injektiv bekannten Abbildung  $H_q(\Theta_{\mathcal{U}})$  nach Null geht, also Null ist. Dann gilt aber erst recht  $c = [z] = 0$  in  $H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$ .  $\square$

**Aufgabe 4.8.6.** Nach Aufgabe 2.4.27 ist  $S: \text{SimpKomp} \rightarrow \text{Kom}(\mathbb{Z})$  ein Funktor. In naheliegender Weise (und schrecklicher Notation) fassen wir  $\mathcal{K} \mapsto \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$  als Funktor  $\mathbb{Z}(-)^{\text{bel}}: \text{SimpKomp} \rightarrow \text{Kom}(\mathbb{Z})$  auf. Zeige,

<sup>61</sup>Wir verwenden auch: Sind  $f: A \rightarrow B$  und  $g: A' \rightarrow B'$  zwei Quasi-Isomorphismen von Komplexen, so ist auch  $f \oplus g: A \oplus A' \rightarrow B \oplus B'$  ein Quasi-Isomorphismus, denn  $H_q(f \oplus g): H_q(A \oplus A') \rightarrow H_q(B \oplus B')$  und  $H_q(f) \oplus H_q(g): H_q(A) \oplus H_q(A') \rightarrow H_q(B) \oplus H_q(B')$  stimmen modulo der naheliegenden Isomorphismen überein, vgl. Aufgabe B.1.24. (Der Funktor  $H_q$  ist *additiv*.)

<sup>62</sup>Formal ist das eine Konsequenz aus der Exaktheit filtrierter Kolimiten in der Kategorie  $\text{Ab}$  der abelschen Gruppen, die wir möglicherweise später behandeln **Referenz einfügen**: Die Kategorie  $I$  aller endlichen Unterkomplexe  $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$  (mit Inklusionen als Morphismen) ist filtriert. Für jeden Unterkomplex  $\mathcal{U}$  haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}\mathcal{U}_{q-1}^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}\mathcal{U}_q^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{Z}\mathcal{U}_{q+1}^{\text{st-mono}} \\ & \searrow \text{blau} & \nearrow \text{rot} & & \\ & Z_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}}) & & & \\ 0 & \xrightarrow{\text{rot}} & & \xrightarrow{\text{blau}} & 0 \\ & & & H_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}}) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

in Ab. Die rote Sequenz (vier Objekte, drei Morphismen) ist exakt (d.h. exakt bei  $Z_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}})$  und  $\mathbb{Z}\mathcal{U}_q^{\text{st-mono}}$ ). Ebenso ist die blaue Sequenz exakt. Geht man zum Kolimes dieses  $I$ -Diagramms über, so erhält man das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{colim } \mathbb{Z}\mathcal{U}_{q-1}^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\quad} & \text{colim } \mathbb{Z}\mathcal{U}_q^{\text{st-mono}} & \xrightarrow{\quad} & \text{colim } \mathbb{Z}\mathcal{U}_{q+1}^{\text{st-mono}} \\ & \searrow \text{blau} & \nearrow \text{rot} & & \\ & \text{colim } Z_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}}) & & & \\ 0 & \xrightarrow{\text{rot}} & & \xrightarrow{\text{blau}} & 0 \\ & & & \text{colim } H_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}}) & \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten roten und blauen Sequenzen, weil filtrierte Kolimiten exakt sind. Die oberste Zeile ist kanonisch isomorph zu  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ . Es folgt  $\text{colim } H_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}}) \xrightarrow{\sim} H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$  (analoges gilt auch für Zykel und Bilder). Analoges gilt, wenn man überall den oberen Index *st-mono* durch *bel* ersetzt; alles ist kompatibel mit den Morphismen  $\Theta_{\mathcal{U}}$ . Sind nun alle  $H_q(\Theta_{\mathcal{U}}): H_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{st-mono}}) \rightarrow H_q(\mathbb{Z}\mathcal{U}^{\text{bel}})$  Isomorphismen, so ist auch ihr Kolimes ein Isomorphismus, also  $H_q(\Theta_{\mathcal{K}})$ .

dass die Familie  $\Phi := (\Phi_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \text{SimpKomp}}$  der (Quasi-Iso)Morphismen (4.8.4) eine natürliche Transformation

$$\Phi: \mathbb{Z}(-)^{\text{bel}} \Rightarrow \mathbb{S}$$

definiert.

Ende der 14. Vorlesung am 11.12.2020.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 4.7.12 (lokale Homologie von offener Teilmenge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  an einem Punkt)
- (2) Aufgabe 4.7.13 (relative Homologie versus reduzierte Homologie von „Einpunktidentifizierung“)
- (3) Aufgabe 4.8.6 (natürliche Trafo  $\Phi: \mathbb{Z}(-)^{\text{bel}} \Rightarrow \mathbb{S}$ )
- (4) Aufgabe 4.7.11

**4.8.7.** Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex. Jedem Element  $s = (s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{bel}}$  ordnen wir mit Hilfe der in (3.3.1) erklärten Notation einen singulären  $q$ -Simplex

$$\tilde{s} := \underbrace{(s_0, \dots, s_q)}_{\text{singulärer } q\text{-Simplex}}: \Delta_q \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$$

der geometrischen Realisierung  $\Delta(\mathcal{K})$  zu. Diese Zuordnung definiert eine offensichtlich injektive Abbildung<sup>63</sup>

$$\mathcal{K}_q^{\text{bel}} \hookrightarrow \text{Top}(\Delta_q, \Delta(\mathcal{K}))$$

und per  $\mathbb{Z}$ -linearer Ausdehnung einen injektiven Gruppenmorphismus

$$(4.8.9) \quad \Psi_q: \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{bel}} \hookrightarrow \mathbb{S}_q\Delta(\mathcal{K})$$

**Proposition 4.8.8.** Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex. Die Abbildungen  $\Psi_q$  aus (4.8.9) definieren einen (komponentenweise injektiven) Quasi-Isomorphismus

$$(4.8.10) \quad \Psi = \Psi_{\mathcal{K}} := (\Psi_q)_{q \in \mathbb{Z}}: \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} \hookrightarrow \mathbb{S}\Delta(\mathcal{K})$$

in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$ . Insbesondere rechnet  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$  die singuläre Homologie der geometrischen Realisierung  $\Delta(\mathcal{K})$  unseres Simplicialkomplexes aus.

*Beweis.* Dass die  $\Psi_q$  mit den Differentialen kommutieren und somit einen Morphismus  $\Psi$  von Komplexen definieren, ist offensichtlich. Sei  $\leq$  eine Ordnung auf der Eckenmenge von  $\mathcal{K}$  (existiert stets). Wir expandieren das kommutative Diagramm (4.8.5) aus dem Beweis von Proposition 4.8.5 zu

$$(4.8.11) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbb{S}\Delta(\mathcal{K}) & \xleftarrow{\Psi_{\mathcal{K}}} & \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{K}}} & \mathbb{S}\mathcal{K} \\ & \swarrow \Gamma_{\mathcal{K}} := \Psi_{\mathcal{K}} \circ \Theta_{\mathcal{K}} & \uparrow \Theta_{\mathcal{K}} & \nearrow \sim & \\ & & \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} & & \end{array} \quad \begin{array}{l} (4.8.3) \\ (2.4.10) \end{array}$$

Es genügt zu zeigen, dass die linke diagonale Verknüpfung

$$(4.8.12) \quad \Gamma_{\mathcal{K}} = \Psi_{\mathcal{K}} \circ \Theta_{\mathcal{K}}: \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \mathbb{S}\Delta(\mathcal{K}),$$

$$s = (s_0, \dots, s_q) \mapsto \tilde{s} := \underbrace{(s_0, \dots, s_q)},$$

ein Quasi-Isomorphismus ist, denn  $\Theta_{\mathcal{K}}$  ist ein Quasi-Isomorphismus, wie wir im Beweis von Proposition 2.4.21 gezeigt haben (wer nicht in den Beweis schauen möchte: Nach der zitierten Proposition ist  $\Phi_{\mathcal{K}}$  ein Quasi-Isomorphismus; da der rechte diagonale Pfeil (2.4.10) ein Isomorphismus ist, ist  $\Theta_{\mathcal{K}}$  ein Quasi-Isomorphismus)

Für  $m \in \mathbb{Z}$  sei  $\mathcal{K}_{\leq m}$  das  $m$ -Skelett von  $\mathcal{K}$  (Beispiel 2.1.14). Diese Skelette bilden eine aufsteigende Folge  $\emptyset = \mathcal{K}_{\leq -1} \subset \mathcal{K}_{\leq 0} \subset \mathcal{K}_{\leq 1} \subset \dots$  von Untersimplicialkomplexen von  $\mathcal{K}$ , deren Vereinigung ganz  $\mathcal{K}$  ist.

Analog bilden die geometrischen Realisierungen

$$X_{\leq m} := \Delta(\mathcal{K}_{\leq m}) = \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}_{\leq m}} \Delta(\sigma)$$

dieser Skelette eine aufsteigende Folge  $\emptyset = X_{\leq -1} \subset X_{\leq 0} \subset X_{\leq 1} \subset \dots$  von nach 2.2.6 abgeschlossenen Teilmengen von  $X := \Delta(\mathcal{K})$ , deren Vereinigung ganz  $X$  ist.

<sup>63</sup>Elemente im Bild könnte man als **simplicialsinguläre  $q$ -Simplizes** von  $\Delta(\mathcal{K})$  bezeichnen.

**Behauptung 1: Für alle  $m \in \mathbb{Z}$  ist**

$$\Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}} : \mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}} \hookrightarrow \text{SX}_{\leq m}$$

**ein Quasi-Isomorphismus.**<sup>64</sup>

Wir zeigen dies per Induktion über  $m$ . Für  $m \leq -1$  sind Start- und Zielkomplex Null, so dass die Behauptung trivial ist. Für  $m \in \mathbb{Z}$  betrachte das Diagramm (es ist nur für  $m \geq -1$  interessant)

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}} & \hookrightarrow & \mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m+1})^{\text{st-mono}} & \twoheadrightarrow & \frac{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m+1})^{\text{st-mono}}}{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}} \\ \Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}} \downarrow & & \Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m+1}} \downarrow & & \bar{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}} \downarrow \\ \text{SX}_{\leq m} & \hookrightarrow & \text{SX}_{\leq m+1} & \twoheadrightarrow & \underbrace{\frac{\text{SX}_{\leq m+1}}{\text{SX}_{\leq m}}}_{\text{S}(X_{\leq m+1}, X_{\leq m})} \end{array}$$

in  $\text{Kom}(\mathbb{Z})$  mit offensichtlichen kurzen exakten Zeilen, dessen linkes Quadrat offensichtlich kommutativ ist (abstrakt ist  $\Gamma$  natürlich auf Unterkomplexen von  $\mathcal{K}$ ), und dessen rechte Vertikale  $\bar{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}}$  der eindeutige Morphismus ist, der das rechte Quadrat kommutativ macht (diese Vertikale ist injektiv (= komponentenweise injektiv), was uns aber hier nicht weiter interessiert).

Per Induktion können wir annehmen, dass die linke Vertikale  $\Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}}$  ein Quasi-Isomorphismus ist. Um wie gewünscht zu zeigen, dass die mittlere Vertikale  $\Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m+1}}$  ein Quasi-Isomorphismus ist, genügt es somit nach Aufgabe B.3.7, die folgende Hilfsbehauptung zu zeigen:

**Hilfsbehauptung: Für alle  $m \in \mathbb{Z}$  ist**

$$\bar{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}} : \frac{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m+1})^{\text{st-mono}}}{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}} \rightarrow \text{S}(X_{\leq m+1}, X_{\leq m})$$

**ein Quasi-Isomorphismus.**<sup>65</sup>

Für  $m \leq -2$  ist die Aussage trivial, denn Start- und Zielkomplex von  $\bar{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}}$  sind Null. Gelte  $m \geq -1$ . Wir analysieren zuerst den Start- und dann den Zielkomplex.

Analyse des Startkomplexes: Der Komplex  $\frac{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m+1})^{\text{st-mono}}}{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}}$  lebt nur in Grad  $m+1$  und hat dort (die Klassen der Elemente von)  $\mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}}$  als  $\mathbb{Z}$ -Basis. Seine totale Homologie hat somit dieselbe Eigenschaft, in Formeln

$$(4.8.13) \quad \text{H}_q \left( \frac{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m+1})^{\text{st-mono}}}{\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}} \right) = \begin{cases} \mathbb{Z}\mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}} = \bigoplus_{s \in \mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}}} \mathbb{Z}s & \text{falls } q = m+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analyse des Zielkomplexes: Sei  $U_m$  die „Verdickung“ der geometrischen Realisierung  $X_{\leq m}$  des  $m$ -Skeletts, die wir erhalten, indem wir aus  $X_{\leq m+1}$  die „Schwerpunkte“ aller  $(m+1)$ -Simplizes entfernen.

Wir behaupten, dass die beiden Einbettungen

$$(X_{\leq m+1}, X_{\leq m}) \hookrightarrow (X_{\leq m+1}, U_m) \longleftarrow (X_{\leq m+1} \setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m})$$

von Raumpaaren Isomorphismen auf der relativen singulären Homologie induzieren. Für die rechte Einbettung ist dies klar nach Ausschneidung (Satz 4.7.1 –  $U_m \circlearrowleft X_{\geq m+1}$  ist eine offene Teilmenge,  $X_{\leq m} \circlearrowleft X_{\leq m+1}$  ist eine abgeschlossene Teilmenge,  $X_{\leq m} \subset U_m$ ). Für die linke Einbettung sieht man dies folgendermaßen. Da  $X_{\leq m} \hookrightarrow U_m$  eine Homotopieäquivalenz ist (anschaulich ist klar, dass  $X_{\leq m}$  ein Deformationsretrakt von  $U_m$  ist, jedoch ist die Stetigkeit des naheliegenden Kandidaten für eine Deformationsretraktion etwas subtil – wir zeigen diese in 4.8.9), induziert sie Isomorphismen auf der singulären Homologie (Satz 3.3.1), und wir können Korollar 4.2.3 anwenden.

<sup>64</sup>Die Klammersetzung soll deutlich machen, dass  $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}$  ein Komplex ist (und nicht etwa der „ $m$ -Teil“ des Komplexes  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ ). Seine  $q$ -te Komponente ist  $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})_q^{\text{st-mono}}$ . Auf der rechten Seite ist das nicht so kritisch, da man den Grad-Index hier traditionell meist als Index bei S notiert: Die  $q$ -te Komponente von  $\text{SX}_{\leq m}$  ist  $\text{S}_q X_{\leq m}$ .

<sup>65</sup>Der Beweis wird zeigen, dass die linke Seite ein Komplex mit verschwindendem Differential ist (der deswegen mit seiner Homologie „übereinstimmt“), der isomorph auf die Homologie des rechten Komplexes geht. Insbesondere ist unsere Abbildung komponentenweise injektiv und wir können den linken Komplex als Unterkomplex des rechten auffassen.

Das rechte Raumpaare  $(X_{\leq m+1} \setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m})$  ist aber die disjunkte Vereinigung Raumpaare  $(\Delta(\sigma)', \Delta(\sigma)' \setminus b(\sigma))$ , wobei  $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$  alle abstrakten  $(m+1)$ -Simplizes durchläuft,  $\Delta(\sigma)'$  den offenen Simplex zu  $\sigma$  bezeichnet (siehe 2.2.13) und  $b(\sigma)$  der Schwerpunkt/das Baryzentrum von  $\Delta(\sigma)$  ist, in Formeln<sup>66</sup>

$$(4.8.14) \quad (X_{\leq m+1} \setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m}) = \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}} (\Delta(\sigma)', \Delta(\sigma)' \setminus b(\sigma)).$$

Das obige Diagramm von Raumpaaren können wir für jeden abstrakten Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$  zum kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} (\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma)) & \hookrightarrow & (\Delta(\sigma), \Delta(\sigma) \setminus b(\sigma)) & \longleftarrow & (\Delta(\sigma)', \Delta(\sigma)' \setminus b(\sigma)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (X_{\leq m+1}, X_{\leq m}) & \hookrightarrow & (X_{\leq m+1}, U_m) & \longleftarrow & (X_{\leq m+1} \setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m}) \end{array}$$

ergänzen, wobei  $\partial\Delta(\sigma)$  die offensichtliche Bedeutung hat<sup>67</sup>. Wir wenden darauf den Funktor relative Homologie  $H_q: \text{Top}^c \rightarrow \text{Ab}$  an und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} H_q(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma)) & \xrightarrow{\sim} & H_q(\Delta(\sigma), \Delta(\sigma) \setminus b(\sigma)) & \xleftarrow{\sim} & H_q(\Delta(\sigma)', \Delta(\sigma)' \setminus b(\sigma)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_q(X_{\leq m+1}, X_{\leq m}) & \xrightarrow{\sim} & H_q(X_{\leq m+1}, U_m) & \xleftarrow{\sim} & H_q(X_{\leq m+1} \setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m}). \end{array}$$

Wir haben bereits erklärt, dass seine unteren Horizontalen Isomorphismen sind. Dasselbe Argument zeigt auch (hier ist es einfacher, man benötigt 4.8.9 nicht), dass seine oberen Horizontalen Isomorphismen sind.

Indem wir die direkte Summe der oberen Zeile dieses Diagramms für variables  $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$  nehmen und die untere Zeile beibehalten, erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}} H_q(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma)) & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}} H_q(\Delta(\sigma), \Delta(\sigma) \setminus b(\sigma)) & \xleftarrow{\sim} & \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}} H_q(\Delta(\sigma)', \Delta(\sigma)' \setminus b(\sigma)) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sim \\ H_q(X_{\leq m+1}, X_{\leq m}) & \xrightarrow{\sim} & H_q(X_{\leq m+1}, U_m) & \xleftarrow{\sim} & H_q(X_{\leq m+1} \setminus X_{\leq m}, U_m \setminus X_{\leq m}), \end{array}$$

dessen Horizontalen natürlich immer noch Isomorphismen sind (jede Vertikale ist auf der  $\sigma$ -Komponente die Vertikale des obigen Diagramms). Die rechte Vertikale ist wegen (4.8.14) und Aufgabe 4.1.10 (offensichtlich ist jedes  $\Delta(\sigma)'$  sogar offen in  $X_{\leq m+1}$ ) ebenfalls ein Isomorphismus.

Folglich ist auch die linke Vertikale ein Isomorphismus

$$\bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}} H_q(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma)) \xrightarrow{\sim} H_q(X_{\leq m+1}, X_{\leq m}).$$

Für jedes  $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$  gibt es ein eindeutiges Element  $(\sigma_0, \dots, \sigma_{m+1}) \in \mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}}$  mit  $\sigma = \{\sigma_0, \dots, \sigma_{m+1}\}$ . Die Abbildung  $(\sigma_0, \dots, \sigma_{m+1}): \Delta_{m+1} \xrightarrow{\sim} \Delta(\sigma)$  ist ein Homöomorphismus und restringiert zu einem Homöomorphismus zwischen den Rändern dieser vollen Simplizes, ist also ein Isomorphismus  $(\Delta_{m+1}, \partial\Delta_{m+1}) \xrightarrow{\sim} (\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma))$  von Raumpaaren. Nach Satz 4.7.5 gilt

$$H_q(\Delta(\sigma), \partial\Delta(\sigma)) = \begin{cases} \mathbb{Z}[(\sigma_0, \dots, \sigma_{m+1})] \cong \mathbb{Z} & \text{falls } q = m+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

<sup>66</sup>Formal haben wir nicht definiert, was eine disjunkte Vereinigung von Raumpaaren ist: Man nehme in beiden Komponenten die disjunkte Vereinigung und versehe diese jeweils mit der Finaltopologie. (Kategorisch beschreibt dies das Koprodukt in der Kategorie der Raumpaare.)

<sup>67</sup>Es ist der Rand von  $\Delta(\sigma)$  (im umgebenden Raum  $\mathbb{R}\sigma$ ) oder äquivalent die geometrische Realisierung des  $m$ -Skeletts von  $\sigma$ , wobei  $\sigma$  als maximaler Simplizialkomplex aufgefasst wird.

Wir folgern, dass die totale relative Homologie  $H(X_{\leq m+1}, X_{\leq m})$  nur in Grad  $m+1$  lebt und dort die  $\mathbb{Z}$ -Basis  $((\sigma_0, \dots, \sigma_{m+1}))_{\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}}}$  hat, in Formeln

$$H_q(X_{\leq m+1}, X_m) = \begin{cases} \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}} \mathbb{Z}(\sigma_0, \dots, \sigma_{m+1}) & \text{falls } q = m+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Vergleichen wir dies mit (4.8.13) und beachten, dass  $H_{m+1}(\bar{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}})$  bezüglich der durch  $\mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}}$  indizierten  $\mathbb{Z}$ -Basen  $(s)_{s \in \mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}}}$  des Startbereichs bzw.  $((s_0, \dots, s_{m+1}))_{(s_0, \dots, s_{m+1}) \in \mathcal{K}_{m+1}^{\text{st-mono}}}$  des Zielbereichs durch die Einheitsmatrix dargestellt wird (was nur bedeutet, dass  $H_{m+1}(\bar{\Gamma}_{\mathcal{K}_{\leq m+1}})$  das Element  $s$  auf das Element  $\underline{s} := (s_0, \dots, s_q)$  abbildet (vgl. 4.8.7) und diese Elemente jeweils  $\mathbb{Z}$ -Basen bilden), so zeigt dies die Hilfsbehauptung. Insgesamt ist damit Behauptung 1 bewiesen; damit ist der Beweis der Propositin für alle endlichen Simplicialkomplexe und allgemeiner für all solche Simplicialkomplexe  $\mathcal{K}$ , die  $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\leq m}$  für ein geeignetes  $m \in \mathbb{N}$  erfüllen, erledigt.

**Behauptung 2: Die Abbildung (4.8.12) ist ein Quasi-Isomorphismus.**

Zu zeigen ist, dass

$$H_q(\Gamma_{\mathcal{K}}): H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}) \rightarrow H_q(S\Delta(\mathcal{K})) = H_q(\Delta(\mathcal{K}))$$

bijektiv ist. Dies folgern wir aus Behauptung 1 in ähnlicher Weise, wie wir die Bijektivität von (4.8.8) gezeigt haben – statt endlicher Unterkomplexe betrachten wir jedoch geeignete  $m$ -Skelette  $\mathcal{K}_{\leq m}$ . Sowohl bei Surjektivität wie auch bei Injektivität muss man jedoch etwas aufpassen.

Surjektivität: Ist  $c \in H_q(\Delta(\mathcal{K}))$  eine beliebige Homologiekategorie, so kann man diese natürlich durch einen singulären  $q$ -Zykel  $z \in Z_q(\Delta(\mathcal{K}))$  repräsentieren. Da  $z$  eine (endliche) Linearkombination von singulären  $q$ -Simplizes  $\tau$  ist und jeder solche kompaktes Bild  $\tau(\Delta_q)$  hat (Bilder von Kompakta unter stetigen Abbildungen sind kompakt), gibt es nach Proposition 2.2.15 ein  $m \in \mathbb{N}$ , so dass die endlich vielen beteiligten  $\tau$  bereits in  $\Delta(\mathcal{K}_{\leq m})$  landen. Dies zeigt, dass  $z$  bereits als Element von  $S_q(\Delta(\mathcal{K}_{\leq m}))$  und genauer als Element von  $Z_q(\Delta(\mathcal{K}_{\leq m}))$  aufgefasst werden kann.

Injektivität: Sei  $z$  ein  $q$ -Zykel von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ , dessen Homologiekategorie  $[z] \in H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$  unter  $H_q(\Gamma_{\mathcal{K}})$  auf Null abgebildet wird, d. h. es gilt  $[\Gamma_{\mathcal{K}}(z)] = 0$ . Dann gibt es eine Kette  $x \in S_{q+1}\Delta(\mathcal{K})$  mit  $\partial(x) = \Gamma_{\mathcal{K}}(z)$ . Wie oben finden wir mit Proposition 2.2.15 ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $x \in S_{q+1}\Delta(\mathcal{K}_{\leq m})$ .

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $m \geq q$  gilt. Dann können wir  $z$  bereits als  $q$ -Zykel in  $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}$  auffassen (beachte, dass der Unterkomplex  $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}$  von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$  mit letzterem (samt Differentialen) in allen Graden  $\leq m$  übereinstimmt.<sup>68</sup> Es gilt dann bereits  $\partial(x) = \Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}}(z)$  in  $S_q\Delta(\mathcal{K}_{\leq m})$ , d. h.  $[\Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}}(z)] = 0$ . Da  $H_q(\Gamma_{\mathcal{K}_{\leq m}})$  aber bereits als Isomorphismus bekannt ist, folgt  $[z] = 0$  in  $H_q(\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}})$  und dann erst recht in  $H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}})$ .  $\square$

**4.8.9.** Wir erklären, warum die Inklusion  $X_{\leq m} \hookrightarrow U_m$  aus dem vorhergehenden Beweis eine Homotopieäquivalenz ist. Genauer zeigen wir, dass  $X_{\leq m}$  ein Deformationsretrakt von  $U_m$  ist. Dazu benötigen wir einige Aussagen aus der mengentheoretischen Topologie, die wir in Appendix C bereitstellen.

Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex. Dann ist die offensichtliche Abbildung

$$(4.8.15) \quad \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}} \Delta(\sigma) \twoheadrightarrow \Delta(\mathcal{K})$$

surjektiv und final (letzteres ist nur eine Umformulierung der Tatsache, dass  $\Delta(\mathcal{K})$  die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\Delta(\sigma) = \Delta(\mathcal{K})_{\sigma} \subset \Delta(\mathcal{K})$  trägt). Proposition C.0.4 samt dem banalen Lemma C.0.1 zeigt dann, dass auch

$$(4.8.16) \quad \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (\Delta(\sigma) \times [0, 1]) \twoheadrightarrow \Delta(\mathcal{K}) \times [0, 1]$$

final und surjektiv ist.<sup>69</sup>

<sup>68</sup>Der Komplex  $\mathbb{Z}(\mathcal{K}_{\leq m})^{\text{st-mono}}$  ist eine „dumme Abschneidung“ (*stupid truncation*) von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}$ .

<sup>69</sup>Die beiden Abbildungen (4.8.15) und (4.8.16) sind sogar abgeschlossen (was für surjektive Abbildungen Finalität impliziert, siehe [Sch20, 2.8.81]). Dies sieht man für (4.8.16) wie folgt (der Beweis für (4.8.15) geht analog):

Ersetzen wir  $\mathcal{K}$  in (4.8.16) durch  $\mathcal{K}_{\leq m+1}$  und restringieren diese Abbildung im Zielraum zur offenen Teilmenge  $U_m \times [0, 1] \Subset \Delta(\mathcal{K}_{\leq m+1}) \times [0, 1] = X_{\leq m+1} \times [0, 1]$ , so zeigt Lemma C.0.3, dass

$$(4.8.17) \quad \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}_{\leq m}} (\Delta(\sigma) \times [0, 1]) \sqcup \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}} ((\Delta(\sigma) \setminus \{s_\sigma\}) \times [0, 1]) \rightarrow U_m \times [0, 1]$$

final (und natürlich weiterhin surjektiv) ist, wobei  $s_\sigma$  der Schwerpunkt von  $\Delta(\sigma)$  ist. Sei nun  $H$  die eindeutige Abbildung von der disjunkten Vereinigung auf der linken Seite nach  $U_m$  mit den folgenden Eigenschaften:

- Für alle  $\sigma \in \mathcal{K}_{\leq m}$  ist  $H_{\Delta(\sigma) \times [0, 1]}$  die Verknüpfung

$$\Delta(\sigma) \times [0, 1] \xrightarrow{\text{pr}} \Delta(\sigma) \hookrightarrow X_{\leq m} \hookrightarrow U_m$$

der Projektion mit den offensichtlichen Inklusionen.

- Für alle  $\sigma \in \mathcal{K}_{m+1}$  ist  $H_{(\Delta(\sigma) \setminus \{s_\sigma\}) \times [0, 1]}$  die Verknüpfung

$$(\Delta(\sigma) \setminus \{s_\sigma\}) \times [0, 1] \rightarrow \Delta(\sigma) \setminus \{s_\sigma\} \hookrightarrow U_m$$

der naheliegenden „stereographischen“ (oder einer beliebigen) Deformationsretraktion auf den „Rand“  $\bigcup_{\tau \in \sigma, |\tau| = |\sigma| - 1} \Delta(\tau)$  von  $\Delta(\sigma)$  mit der offensichtliche Inklusion.

Die so definierte Abbildung faktorisiert eindeutig über (4.8.17) zu einer Abbildung  $\bar{H}: U_m \times [0, 1] \rightarrow U_m$ . Da  $H$  offensichtlich stetig ist, ist  $\bar{H}$  wegen der Finalität von (4.8.17) ebenfalls stetig. Nach Konstruktion ist  $\bar{H}$  eine Deformationsretraktion von  $U_m$  auf  $X_{\leq m}$ . Somit ist  $X_{\leq m} \hookrightarrow U_m$  eine Homotopieäquivalenz (siehe [Sch20, Lemma 3.5.4]).

**4.8.10.** Die Familie  $\Psi := (\Psi_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \text{SimpKomp}}$  der (Quasi-Is-)Morphismen (4.8.10) definiert eine natürliche Transformation

$$\Psi: \mathbb{Z}(-)^{\text{bel}} \Rightarrow \text{S} \circ \Delta: \text{SimpKomp} \rightarrow \text{Kom}(\mathbb{Z}),$$

wobei der Funktor  $\mathbb{Z}(-)^{\text{bel}}$  wie in Aufgabe 4.8.6 definiert ist.

**Satz 4.8.11** (Vergleichs-isomorphismus zwischen simplizialer Homologie eines Simplizialkomplexes und singulärer Homologie seiner geometrischen Realisierung). *Für jeden Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$  liefern die Quasi-Isomorphismen<sup>70</sup>*

$$\text{SK} \xleftarrow[(4.8.4)]{\Phi_{\mathcal{K}}} \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} \xrightarrow[(4.8.10)]{\Psi_{\mathcal{K}}} \text{S}\Delta(\mathcal{K})$$

kanonische Isomorphismen

$$(4.8.18) \quad \text{H}_q \mathcal{K} \xleftarrow[\sim]{\text{H}_q(\Phi_{\mathcal{K}})} \text{H}_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}) \xrightarrow[\sim]{\text{H}_q(\Psi_{\mathcal{K}})} \text{H}_q(\Delta(\mathcal{K}))$$

für alle  $q \in \mathbb{Z}$ .

*Genauer sind diese Quasi-Isomorphismen bzw. Isomorphismen natürlich in  $\mathcal{K}$  (in dem Sinne, dass sie natürliche Transformationen bzw. Isotransformationen zwischen den offensichtlichen Funktoren definieren).*

*Beweis.* Dies ist schlicht die Zusammenfassung der Propositionen 4.8.5 und 4.8.8. Natürlichkeit folgt aus Aufgabe 4.8.6 und 4.8.10.  $\square$

**4.8.12** (Kurze Beweisalternative für eine Teilaussage von Satz 4.8.18). Sei  $(E, \mathcal{K})$  ein Simplizialkomplex. Fixiere eine Ordnung  $\leq$  auf der Eckenmenge  $E$  und betrachte die Morphismen

$$(4.8.19) \quad \text{SK} \xleftarrow[\sim]{(2.4.10)} \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}} \xrightarrow{\Gamma_{\mathcal{K}}} \text{S}\Delta(\mathcal{K})$$

von Komplexen. Diese tauchen „gespiegelt“ als „untere“ Zeile des Diagramms (4.8.11) auf. Der linke Pfeil ist nach Proposition 2.4.21 ein Isomorphismus (und insbesondere ein Quasi-Isomorphismus), der rechte Pfeil  $\Gamma_{\mathcal{K}}$ ,

Sei  $A \Subset \bigsqcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (\Delta(\sigma) \times [0, 1])$  abgeschlossen. Dann gilt  $A = \bigsqcup A_\sigma$  mit  $A_\sigma := A \cap (\Delta(\sigma) \times [0, 1]) \Subset \Delta(\sigma) \times [0, 1]$ . Für jedes  $\sigma \in \mathcal{K}$  gilt

$$\pi(A) \cap (\Delta(\sigma) \times [0, 1]) = \bigcup_{\emptyset \neq \tau \subset \sigma} A_\tau$$

wobei wir  $A_\tau$  via  $\Delta(\tau) \times [0, 1] \subset \Delta(\sigma) \times [0, 1]$  als Teilmenge von  $\Delta(\sigma) \times [0, 1]$  auffassen. Die rechte Seite ist als endliche Vereinigung abgeschlossener Teilmengen abgeschlossen in  $\Delta(\sigma) \times [0, 1]$ . Da (4.8.16) final ist, ist  $\pi(A)$  abgeschlossen in  $\Delta(\mathcal{K})$ .

<sup>70</sup> und sogar Homotopieäquivalenzen, wie aus ... folgen wird.

der in (4.8.12) erklärt ist, ist nach Behauptung 2 im Beweis von Proposition 4.8.8 ein Quasi-Isomorphismus. Wir erhalten somit Isomorphismen

$$(4.8.20) \quad H_q \mathcal{K} \xleftarrow{\sim} H_q(\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{st-mono}}) \xrightarrow[\sim]{H_q(\Gamma_{\mathcal{K}})} H_q(\Delta(\mathcal{K}))$$

für alle  $q \in \mathbb{Z}$ . Hierfür wurde weder die Definition von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}}$  noch Proposition 4.8.5 benötigt.

A priori hängt der Vergleichs-Isomorphismus (4.8.20) (:= die „Verknüpfung“ von links nach rechts) von der Wahl der Ordnung  $\leq$  auf  $E$  ab und es ist auch nicht klar, dass er natürlich in  $\mathcal{K}$  ist. Da aber im kommutativen Diagramm (4.8.11) das dortige  $\Theta_{\mathcal{K}}$  nach (dem Beweis von) Proposition 4.8.5 ebenfalls ein Quasi-Isomorphismus ist, stimmt der Vergleichs-Isomorphismus (4.8.20) mit dem kanonischen natürlichen Vergleichs-Isomorphismus (4.8.18) überein und ist somit unabhängig von der Ordnung  $\leq$  auf  $E$  und natürlich in  $\mathcal{K}$ .

**4.8.13.** Mit Satz 4.8.18 und 2.4.28 kann man die singuläre Homologie aller topologischen Räume  $X$  ausrechnen, die zur geometrischen Realisierung  $\Delta(\mathcal{K})$  eines endlichen Simplizialkomplexes homöomorph sind.

**Beispiel 4.8.14.** Die Homologie der Sphären haben wir bereits zweimal berechnet (Satz 4.5.1 und Korollar 4.7.7 bzw. 4.7.8). Eine dritte Berechnung folgt nun aus Korollar 2.4.31.(b).

Wer fleißig genug Flächen (2-Sphäre, Torus, . . . , reell projektive Ebene, Kleinsche Flasche, . . . ) trianguliert, kann nun endlich viele (oder gar alle?) Ergebnisse aus Satz 4.6.3 bestätigen. Für meinen Geschmack sind etwa die beiden Erzeuger der zweiten Homologie eines Torus (mit Triangulierung) im simplizialen Bild viel leichter vorstellbar als im singulären: Die Summe der „kompatibel orientierten Dreiecke der Triangulierung“ ist ein Erzeuger; der andere Erzeuger ist sein negatives, was auch die Summe der andersherum orientierten Dreiecke ist. Analoges gilt für die anderen „orientierbaren“ Flächen, also die Sphären mit Henkeln. Bei den „nicht orientierbaren“ Flächen (reell projektive Ebene, Kleinsche Flasche, . . . ) ist es in keiner Triangulierung möglich, für jedes Dreieck eine Orientierung so zu wählen, dass die Summe (oder auch eine positive Linearkombination) über all diese orientierten Dreiecke ein Zykel ist (denn nach Satz 4.6.3 und Satz 4.8.18 verschwindet die zweite simpliziale Homologie); in Beispielen mag man sich explizit davon überzeugen: Man orientiert ein beliebiges Dreieck; damit ist die Orientierung aller Nachbardreiecke festgelegt usw.; jedoch geht es am Ende nicht auf.

**4.8.15** (Verschiedene Triangulierungen liefern kanonisch isomorphe simpliziale Homologien). Trägt ein topologischer Raum verschiedene Triangulierungen, so war vor den Resultaten dieses Abschnitts keineswegs klar, was die Beziehung zwischen den entsprechenden simplizialen Homologien ist. Die Hoffnung war vermutlich, dass sie isomorph sind. Dies ist in der Tat der Fall, wie wir nun mit Hilfe der singulären Homologie zeigen können.<sup>71</sup>

Sei  $X$  ein topologischer Raum und seien  $(\mathcal{K}, f: \Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} X)$  und  $(\mathcal{L}, g: \Delta(\mathcal{L}) \xrightarrow{\sim} X)$  zwei Triangulierungen von  $X$ . Sei  $q \in \mathbb{Z}$ . Dann ist

$$\gamma_{\mathcal{L}, \mathcal{K}} = \gamma_{(\mathcal{L}, g), (\mathcal{K}, f)}^q := H_q(\Phi_{\mathcal{L}}) \circ H_q(\Psi_{\mathcal{L}})^{-1} \circ H_q(\Psi_{\mathcal{K}}) \circ H_q(\Phi_{\mathcal{K}})^{-1}: H_q \mathcal{K} \xrightarrow{\sim} H_q \mathcal{L}$$

nach Satz 4.8.18 ein Isomorphismus zwischen den  $q$ -ten singulären Homologien von  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$ .<sup>72</sup>

Insbesondere gilt: Haben zwei Simplizialkomplexe homöomorphe geometrische Realisierungen, so stimmen ihre simplizialen Homologien bis auf Isomorphismus überein.

Ende der 15. Vorlesung am 17.12.2020.

**Korollar 4.8.16.** Seien  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex und  $q \in \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl. Ist  $\mathcal{K}_q$  endlich, so kann die abelsche Gruppe  $H_q(\Delta(\mathcal{K}))$  stets von  $|\mathcal{K}_q|$  Elementen erzeugt werden.

Insbesondere gilt für jeden endlichen Simplizialkomplex  $\mathcal{K}$ : Alle  $H_q(\Delta(\mathcal{K}))$  sind endlich erzeugt und nur endlich viele davon sind von Null verschieden.

<sup>71</sup>Alternativ könnte man versuchen, zu je zwei Triangulierungen eine gemeinsame „Verfeinerung“ zu konstruieren und über diese die simplizialen Homologien zu vergleichen, vgl. aber [Triangulierung \(Topologie\) Hauptvermutung](#). Siehe auch [Pachner-Zug](#).

<sup>72</sup>Ist  $(\mathcal{M}, h: \Delta(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sim} X)$  eine weitere Triangulierung von  $X$ , so gelten  $\gamma_{\mathcal{M}, \mathcal{L}} \circ \gamma_{\mathcal{L}, \mathcal{K}} = \gamma_{\mathcal{M}, \mathcal{K}}$  und  $\gamma_{\mathcal{K}, \mathcal{K}} = \text{id}$ . Die Familie  $(\gamma_{\mathcal{L}, \mathcal{K}})_{(\mathcal{K}, f), (\mathcal{L}, g)}$  all dieser Isomorphismen ist also bestmöglich kompatibel.

*Beweis.* Nach Satz 4.8.18 genügt es zu zeigen, dass  $H_q\mathcal{K}$  von  $|\mathcal{K}_q|$  Elementen erzeugt werden kann. Nach 2.4.22 ist  $S_q\mathcal{K}$  durch  $|\mathcal{K}_q|$  Elemente erzeugbar. Wegen Lemma 4.8.17 ist die Untergruppe  $B_q\mathcal{K}$  von  $|\mathcal{K}_q|$  Elementen erzeugbar, und dies überträgt sich offensichtlich auf den Quotienten  $H_q\mathcal{K} = \frac{B_q\mathcal{K}}{Z_q\mathcal{K}}$ .  $\square$

**Lemma 4.8.17.** *Ist eine abelsche Gruppe  $A$  durch  $n$  Elemente erzeugbar, so ist jede Untergruppe von  $A$  auch durch  $n$  Elemente erzeugbar.*

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $n$ . Der Fall  $n = 0$  ist trivial.

Im Fall  $n = 1$  ist  $A$  zyklisch, also isomorph zu  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ , und die Aussage ist wohlbekannt: Jede Untergruppe von  $\mathbb{Z}$  (auch die triviale) ist durch ein Element erzeugbar, und dies überträgt sich auf jeden Quotienten  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ , denn die Untergruppen von  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$  stehen (per Urbildnehmen) in kanonischer Bijektion zu den Untergruppen von  $\mathbb{Z}$ , die  $m\mathbb{Z}$  enthalten.

Gelte  $n > 1$ . Gelte  $A = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$  (die Klammern meinen hier „Erzeugnis als abelsche Gruppe“ – man könnte auch  $A = \mathbb{Z}a_1 + \dots + \mathbb{Z}a_n$  schreiben) für geeignete Elemente  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Sei  $U \subset A$  eine Untergruppe. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \langle a_1 \rangle & \hookrightarrow & A & \twoheadrightarrow & \frac{A}{\langle a_1 \rangle} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ U \cap \langle a_1 \rangle & \hookrightarrow & U & \twoheadrightarrow & U' \end{array}$$

abelcher Gruppen, wobei  $U'$  per Definition das Bild von  $U$  in  $\frac{A}{\langle a_1 \rangle}$  ist. Beide Zeilen sind kurze exakte Sequenzen. Da  $\frac{A}{\langle a_1 \rangle}$  durch die  $n-1$  Elemente  $\bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$  erzeugt ist, gibt es per Induktion Elemente  $u_2, \dots, u_n \in U$  mit  $U' = \langle \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \rangle$ . Die Untergruppe  $U \cap \langle a_1 \rangle$  der zyklischen Gruppe  $\langle a_1 \rangle$  ist (nach dem Fall  $n = 1$ ) von einem Element  $u_1$  erzeugt. Dann sind die Elemente  $u_1, u_2, \dots, u_n$  Erzeuger von  $U$ , wie man sofort mit Hilfe der unteren exakten Sequenz beweist.  $\square$

## 4.9. Euler-Charakteristik.

**4.9.1.** Wir haben in 3.1.19 erklärt, wie man die singuläre Homologie  $H_q(X; A)$  eines topologischen Raums  $X$  mit Koeffizienten in einer abelschen Gruppe  $A$  definiert; sie ist funktoriell in  $X \in \text{Top}$ : Jede stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  induziert Gruppenmorphismen  $H_q(f): H_q(X; A) \rightarrow H_q(Y; A)$ .

Ähnlich kann man simpliziale Homologie  $H_q(\mathcal{K}; A)$  eines Simplizialkomplexes  $\mathcal{K}$  mit Koeffizienten in  $A$  definieren; sie ist funktoriell in  $\mathcal{K} \in \text{SimpKomp}$ , vgl. Aufgabe 2.4.27. Fast alle bisherigen Behauptungen samt ihrer Beweise gelten mutatis mutandis auch in diesem Kontext (folgende Ausnahmen sind mir bisher aufgefallen: Bei Satz 4.6.3 sind in Teil (b) Formulierung und Beweis anzupassen, was nun in blauer Farbe geschehen ist; Korollar 4.8.16 sei ausgenommen, jedoch gilt die analoge Aussage für Koeffizienten in einem Körper (und auch etwas allgemeiner), wie wir in 4.9.3 erklären); wenn wir sie in Zukunft zitieren, meinen wir oft die entsprechende Variante, ohne dies explizit zu sagen. Beispielsweise liefert die entsprechende Variante von Satz 4.8.18 Isomorphismen

$$(4.9.1) \quad H_q(\mathcal{K}; A) \cong H_q(\Delta(\mathcal{K}); A)$$

Habe in 3.1.19 roten Text ergänzt. Dann hier besser: Seien  $R$  ein Ring und  $M$  ein  $R$ -Modul. Dann gilt obiges sinngemäß und wir erhalten etwa  $R$ -Moduln  $H_q(X; M)$  und  $H_q(\mathcal{K}; M)$ , beides funktoriell in  $X$  (und auch in  $M \in \text{Mod}(R)$ ). Ist insbesondere  $k$  ein Körper, so ist  $H_q(X; k)$  ein  $k$ -Vektorraum.

**Beispiel 4.9.2.** Wir illustrieren die allgemeine blaue Version in Satz 4.6.3.(b). Sei  $X$  wie dort eine verbundene Summe von  $g \geq 1$  reell projektiven Ebenen  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ . Ihre singuläre Homologie mit Koeffizienten in verschiedenen Körpern ist wie folgt gegeben:

- Sei  $k$  ein Körper der Charakteristik  $\neq 2$  (also  $2 \neq 0$  in  $k$ ), etwa  $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder ein endlicher Körper  $\mathbb{F}_p$  oder  $\mathbb{F}_{p^r}$  mit  $p \neq 2$  eine Primzahl):

$$H_q(X; k) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } q = 2, \\ \frac{k^{\oplus g}}{\{(2x, \dots, 2x) | x \in k\}} = \frac{k^{\oplus g}}{\{(x, \dots, x) | x \in k\}} \cong k^{g-1} & \text{falls } q = 1, \\ k & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Sei  $k$  ein Körper der Charakteristik 2, etwa  $\mathbb{F}_2$ :

$$H_q(X; k) \cong \begin{cases} k & \text{falls } q = 2, \\ \frac{k^{\oplus g}}{\{(0x, \dots, 0x) | x \in k\}} = k^{\oplus g} = k^g & \text{falls } q = 1, \\ k & \text{falls } q = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**4.9.3.** Ist  $k$  ein Körper und  $\mathcal{K}$  ein endlicher Simplicialkomplex, so gilt für seine geometrische Realisierung  $X = \Delta(\mathcal{K})$ : Alle Homologien  $H_q(X; k)$  sind endlich-dimensionale  $k$ -Vektorräume und nur endlich viele davon sind von Null verschieden. Der Beweis geht analog zu dem von Korollar 4.8.16, jedoch verwendet man statt Lemma 4.8.17 die wohlbekanntere Aussage, dass jeder Untervektorraum eines endlichdimensionalen Vektorraums kleiner-gleiche Dimension hat.<sup>73</sup>

Dieselbe Aussage stimmt dann automatisch auch für jeden kompakten, triangulierbaren topologischen Raum (siehe Definition 2.2.17 und 2.2.18) und allgemeiner für jeden topologischen Raum, der zu einem kompakten, triangulierbaren topologischen Raum homotopieäquivalent ist (wegen Satz 3.3.1 über die Homotopie-Invarianz der singulären Homologie).

**Definition 4.9.4.** Ist  $X$  ein topologischer Raum, so heißt

$$b_q(X) := b_q(X; \mathbb{Q}) := \dim_{\mathbb{Q}} H_q(X; \mathbb{Q}) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

**$q$ -te Betti-Zahl von  $X$ .** Sind alle Betti-Zahlen endlich und verschwinden für hinreichend großes  $q$ , so heißt die alternierende Summe

$$\chi(X) := \chi(X; \mathbb{Q}) := \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q b_q(X) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q \dim_{\mathbb{Q}} H_q(X; \mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}$$

die (**topologische**) **Euler-Charakteristik von  $X$**  und man sagt, dass  $X$  eine „wohldefinierte Euler-Charakteristik hat“.

Statt mit  $\mathbb{Q}$  kann man hier mit einem beliebigen Körper  $k$  arbeiten und analog die  **$q$ -te Betti-Zahl (über  $k$ )**

$$b_q(X; k) := \dim_k H_q(X; k) \in \mathbb{N} \sqcup \{\infty\}$$

und, falls die folgende Summe sinnvoll ist, die **Euler-Charakteristik (über  $k$ )**

$$\chi(X; k) := \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q b_q(X; k) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q \dim_k H_q(X; k) \in \mathbb{Z}$$

betrachten.

**4.9.5.** Euler-Charakteristik und Betti-Zahlen sind invariant unter Homotopieäquivalenzen (und insbesondere unter Homöomorphismen) (nach Satz 3.3.1): Ist  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, die in  $\text{hTop}$  invertierbar wird, so gelten  $\chi(X; k) = \chi(Y; k)$  und  $b_q(X; k) = b_q(Y; k)$  für alle Körper  $k$  und alle  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Ausblick 4.9.6.** Aus dem universellen Koeffiziententheorem der Homologie, Satz ??, (und etwas Wissen über Tensorprodukte (Flachheit)) wird folgen:

<sup>73</sup>Lemma 4.8.17 gilt sinngemäß für jeden Hauptidealring  $R$  (mit „demselben“ Beweis): Ist ein  $R$ -Modul durch  $n$  Elemente erzeugbar (also  $M = Rm_1 + \dots + Rm_n$  für geeignete  $m_1, \dots, m_n \in M$ ), so ist jeder Untermodul ebenfalls durch  $n$  Elemente erzeugbar.

Somit gilt auch Korollar 4.8.16 ebenfalls in diesem Kontext: Ist  $\mathcal{K}_q$  endlich, so kann der  $R$ -Modul  $H_q(\Delta(\mathcal{K}); R)$  stets von  $|\mathcal{K}_q|$  Elementen erzeugt werden.

- Man kann  $b_q(X) = b_q(X; \mathbb{Q})$  alternativ als Rang der abelschen Gruppe  $H_q(X) = H_q(X, \mathbb{Z})$  definieren.<sup>74</sup>
- Betti-Zahlen und Euler-Charakteristik hängen nur von der Charakteristik des Körpers ab: Sind  $k$  und  $l$  zwei Körper derselben Charakteristik (die Null oder eine Primzahl ist), so gilt  $b_q(X; k) = b_q(X; l)$  für alle  $q$  und insbesondere  $\chi(X; k) = \chi(X; l)$ .

Kennt man also die Betti-Zahlen bzw. Euler-Charakteristiken für alle Primkörper  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{F}_p$ , so kennt man sie für alle Körper.

**Nachträglich Verbesserung eingefügt:** Ist für jedes  $n$  die abelsche Gruppe  $H_n(X)$  endlich erzeugbar und verschwinden alle bis auf endlich viele der  $H_n(X)$ , so hängt die Euler-Charakteristik gar nicht vom Körper ab, siehe Proposition ???. Eventuell brauche ich diese (bei uns meist erfüllte) Voraussetzung auch für die anderen Aussagen in diesem Ausblick...

- Sind alle  $H_q(X)$  torsionsfrei, so stimmen alle Betti-Zahlen und die Euler-Charakteristik für alle Körper überein, denn ein  $\mathbb{Z}$ -Modul ist genau dann torsionsfrei, wenn er flach ist (siehe [Sta18, 0AUW], was wohl eine Overkill-Referenz ist, noch allgemeiner stimmt das wohl für Prüfer-Ringe).

#### Beispiele 4.9.7.

- Die  $n$ -Sphäre  $\mathbb{S}^n$  nichtverschwindende Bettizahlen  $b_0(\mathbb{S}^n) = 1 = b_n(\mathbb{S}^n)$  und Euler-Charakteristik  $\chi(\mathbb{S}^n) = 1 + (-1)^n$  (nach Satz 4.5.1). Die Sphären gerader Dimension haben also Euler-Charakteristik 2, die ungerader Dimension Euler-Charakteristik 0. Dasselbe gilt für Betti-Zahlen bzw. Euler-Charakteristik bezüglich einem beliebigen Körper  $k$  statt  $\mathbb{Q}$ .
- Eine Sphäre  $X$  mit  $g$  Henkeln hat nichtverschwindende Bettizahlen  $b_0(X) = 1$ ,  $b_1(X) = 2g$  und  $b_2(X) = 1$  und Euler-Charakteristik  $\chi(X) = 1 - 2g + 1 = 2 - 2g$  (nach Satz 4.6.3). Dasselbe gilt für Betti-Zahlen bzw. Euler-Charakteristik bezüglich einem beliebigen Körper  $k$  statt  $\mathbb{Q}$ .
- Eine verbundene Summe  $X$  von  $g \geq 1$  reell projektiven Ebenen hat nach 4.9.2
  - über jedem Körper  $k$  der Charakteristik  $\neq 2$  nichtverschwindende Bett-Zahlen  $b_0(X; k) = 1$  und  $b_1(X; k) = g - 1$  und
  - über jedem Körper  $k$  der Charakteristik zwei nichtverschwindende Bett-Zahlen  $b_0(X; k) = 1 = b_2(X; k)$  und  $b_1(X; k) = g$

und über jedem Körper  $k$  Euler-Charakteristik  $\chi(X; k) = 1 - (g - 1) = 1 - g + 1 = 2 - g$ .

Die Betti-Zahlen hängen hier also vom Körper  $k$  ab, die Euler-Charakteristik aber nicht (vgl. das spätere Korollar 4.9.9).

**4.9.8.** Nach 4.9.3 hat die geometrische Realisierung jedes endlichen Simplicialkomplexes wohldefinierte Euler-Charakteristik  $\chi(\Delta(\mathcal{K}))$ . Genauer ist  $\chi(\Delta(\mathcal{K}); k)$  für jeden Körper  $k$  wohldefiniert. Die analoge Aussage gilt für jeden kompakten, triangulierbaren topologischen Raum und jeden zu einem solchen homotopieäquivalenten Raum.

**Korollar 4.9.9** (von Satz 4.8.18). *Für jeden endlichen Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  und jeden Körper  $k$  gilt*

$$\chi(\Delta(\mathcal{K}); k) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q |\mathcal{K}_q| = \#\{\text{Simplizes gerader Dimension}\} - \#\{\text{Simplizes ungerader Dimension}\}.$$

*Insbesondere ist die Euler-Charakteristik von  $\Delta(\mathcal{K})$  unabhängig vom Körper, in Formeln*

$$(4.9.2) \quad \chi(\Delta(\mathcal{K}); k) = \chi(\Delta(\mathcal{K}); \mathbb{Q}) = \chi(\Delta(\mathcal{K})).$$

*Man bezeichnet  $\chi(\mathcal{K}) := \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q |\mathcal{K}_q| = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q |\mathcal{K}_q|$  als (**simpliciale**) **Euler-Charakteristik von  $\mathcal{K}$** . Damit verkürzt sich die obige Gleichheit zu*

$$\chi(\Delta(\mathcal{K}); k) = \chi(\mathcal{K})$$

<sup>74</sup>Der Rang einer beliebigen abelschen Gruppe  $A$  ist definiert als der Rang der torsionsfreien abelschen Gruppe  $A/T(A)$ , wobei  $T(A) := \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}_{>0} : na = 0\}$  die Torsionsuntergruppe von  $A$  ist. Ist  $A$  eine torsionsfreie abelsche Gruppe (d. h.  $T(A) = 0$ ), so definieren wir den Rang von  $A$  als

$$\text{rg}(A) := \begin{cases} r & \text{falls es ein } r \in \mathbb{N} \text{ mit } A \cong \mathbb{Z}^r \text{ gibt;} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(es gibt höchstens ein solches  $r$ ; es gibt ein solches  $r$ , falls  $A$  endlich erzeugt ist (vgl. Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen)).

und besagt in Worten, dass topologische Euler-Charakteristik von  $\Delta(\mathcal{K})$  und simpliziale Euler-Charakteristik von  $\mathcal{K}$  übereinstimmen.

*Beweis.* Wir betrachten den Komplex  $S(\mathcal{K}; k)$  der Simplizialketten von  $\mathcal{K}$  mit Koeffizienten in  $k$ , der in offensichtlicher Weise definiert ist (ersetze  $\mathbb{Z}$  durch  $k$  in Definition 2.4.10 und Proposition 2.4.15). Da  $S_q(\mathcal{K}; k)$  Dimension  $|\mathcal{K}_q|$  hat (wegen 2.4.22 mit  $\mathbb{Z}$  ersetzt durch  $k$ ), gilt

$$\sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q |\mathcal{K}_q| = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q |\mathcal{K}_q| = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \dim S_q(\mathcal{K}; k)$$

(da  $\mathcal{K}$  endlich ist, sind nur endlich viele Summanden von Null verschieden). Zu zeigen ist, dass dies mit

$$\chi(\Delta(\mathcal{K}); k) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \dim_k H_q(\Delta(\mathcal{K}); k) \stackrel{(4.9.1)}{=} \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \dim_k H_q(\mathcal{K}; k) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \dim_k H_q(S(\mathcal{K}; k))$$

übereinstimmt, wobei wir Satz 4.8.18 (mit  $\mathbb{Z}$  ersetzt durch  $k$ ) für die markierte Gleichheit verwenden. Zu zeigen ist also für den Komplex  $S(\mathcal{K}; k)$ , dass die alternierende Summe der Dimensionen seiner Komponenten mit der alternierenden Summe der Dimensionen seiner Homologien übereinstimmt. Das nachfolgende Lemma 4.9.13 (zusammen mit Definition 4.9.11) zeigt genau diese Aussage.  $\square$

**Definition 4.9.10.** Eine Familie  $A = (A_p)_p$  von Moduln über eine Ring  $R$  heißt **beschränkt**, wenn nur endlich viele  $A_p$  von Null verschieden sind. Ein Komplex  $A = ((A_p)_p, (d_p)_p)$  von Moduln über eine Ring heißt **beschränkt**, wenn die Familie  $(A_p)_p$  beschränkt ist.

**Definition 4.9.11.** Sei  $k$  ein Körper. Sei  $A = (A_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  eine beschränkte Familie endlichdimensionaler  $k$ -Vektorräumen.<sup>75</sup> Dann heißt

$$\chi(A) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} \dim_k A_p$$

**(algebraische) Euler-Charakteristik von  $A$ .** Dieselbe Formel definiert die **Euler-Charakteristik** eines beschränkten Komplexes  $A$  endlichdimensionaler  $k$ -Vektorräume. (Letztere hängt also nicht von den Differentialen  $d_p$  des Komplexes ab.)

**4.9.12.** Ist  $X$  ein topologischer Raum, so gilt

$$(4.9.3) \quad \chi(X; k) = \chi(H(X; k)),$$

falls beide Seiten wohldefiniert sind, falls also die (totale) singuläre Homologie  $H(X; k)$  von  $X$  mit Koeffizienten in  $k$  beschränkt ist und alle  $H_p(X; k)$  endlichdimensional sind.

**Lemma 4.9.13** (Homologische Berechnung der Euler-Charakteristik). *Für jeden beschränkten Komplex endlichdimensionaler  $k$ -Vektorräume  $A$  gilt*

$$\chi(A) = \chi(H(A))$$

*In Worten hat also  $A$  dieselbe Eulercharakteristik wie seine totale Homologie  $H(A)$ .*

*Insbesondere gilt: Ist  $A$  azyklisch, so gilt  $\chi(A) = 0$ .*

*Beweis.* Das rote bzw. blaue Teildiagramm des kommutativen Diagramms

$$(4.9.4) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A_{p+1} & \longrightarrow & A_p & \longrightarrow & \dots \\ & & \searrow & & \swarrow & & \\ & & B_p(A) & \xrightarrow{\text{rot}} & Z_p(A) & & B_{p-1}(A) \\ & & & & \searrow & & \\ & & & & & & H_p(A) \end{array}$$

<sup>75</sup>Man könnte eine Familie  $A = (A_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  von Vektorräumen *endlichdimensional* nennen, wenn  $\bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A_p$  endliche Dimension hat. Dies ist äquivalent zur Forderung, dass die Familie beschränkt ist und aus endlichdimensionalen Vektorräumen besteht. Zur Zeit bleibe ich bei der langen Variante...

ist eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen; alle beteiligten Vektorräume sind endlichdimensional. Da die  $k$ -Dimension  $\dim = \dim_k$  offensichtlich additiv<sup>76</sup> auf kurzen exakten Sequenzen von endlichdimensionalen Vektorräumen ist, folgt

$$\begin{aligned}\dim(A_p) &= \dim(Z_p(A)) + \dim(B_{p-1}(A)), \\ \dim(Z_p(A)) &= \dim(B_p(A)) + \dim(H_p(A))\end{aligned}$$

für alle  $p \in \mathbb{Z}$ . Für hinreichend großes  $|p|$  verschwinden alle  $A_p, Z_p(A), B_p(A), H_p(A)$ , so dass die folgenden unendlichen Summen nur endlich viele Summanden ungleich Null haben.

(4.9.5)

$$\begin{aligned}\chi(A) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \dim(A_p) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \dim(Z_p(A)) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \dim(B_{p-1}(A)) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \dim(B_p(A)) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \dim(H_p(A)) + \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \dim(B_{p-1}(A)) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \dim(H_p(A)) = \chi(H(A)).\end{aligned}\quad \square$$

**Aufgabe 4.9.14** (Additivität der topologischen Euler-Charakteristik). Sei  $X = U \cup V$  eine offene Überdeckung eines topologischen Raums. Seien die Euler-Charakteristiken  $\chi(U)$ ,  $\chi(V)$  und  $\chi(U \cap V)$  wohldefiniert. Dann ist auch die Euler-Charakteristik  $\chi(X)$  wohldefiniert und es gilt

$$(4.9.6) \quad \chi(X) + \chi(U \cap V) = \chi(U) + \chi(V).$$

Hinweis: Mayer-Vietoris und Lemma 4.9.13.

Bemerkung: Für endliche topologische Räume  $D$  mit der diskreten Topologie gilt  $\chi(D) = |D|$ , weswegen man die Euler-Charakteristik als Verallgemeinerung der „Zahl der Punkte“ auffassen kann. Ist eine endliche Menge  $X$  die Vereinigung zweier Teilmengen  $U$  und  $V$ , so gilt die Formel  $|X| + |U \cap V| = |U| + |V|$ . Die verallgemeinerte „Zahl der Punkte“  $\chi$  hat nach (4.9.6) die analoge Additivitätseigenschaft.

**Aufgabe 4.9.15** (Additivität der Euler-Charakteristik für Komplexe). Sei  $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$  eine kurze exakte Sequenz von beschränkten Komplexen (oder Familien) endlichdimensionaler Vektorräume. Dann gilt  $\chi(B) = \chi(A) + \chi(C)$ .

**Korollar 4.9.16.** Sei  $\Delta(\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} M$  eine Triangulierung einer kompakten topologischen Mannigfaltigkeit der Dimension  $m$ . Dann gilt<sup>77</sup>

$$\chi(M) = \sum_{q=0}^m (-1)^q |\mathcal{K}_q|.$$

*Beweis.* Nach Korollar 2.2.16 muss  $\mathcal{K}$  endlich sein. Somit zeigen 4.9.5 und Korollar 4.9.9

$$\chi(M) = \chi(\Delta(\mathcal{K})) = \chi(\mathcal{K}) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q |\mathcal{K}_q| = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q |\mathcal{K}_q|.$$

Es bleibt also  $\mathcal{K}_q = \emptyset$  für alle  $q > m$  zu zeigen. Dies stimmt nach Aufgabe 4.7.12.(d) (die dortige Zusatzannahme ist hier erfüllt). Alternativ folgt dies aus dem späteren, unabhängig bewiesenen Korollar ??.

**Beispiel 4.9.17.** Besonders anschaulich ist der Fall  $m = 2$  von Korollar 4.9.16: Ist  $F$  eine triangulierte kompakte Fläche, so gilt

$$\chi(F) = |\text{Ecken}| - |\text{Kanten}| + |\text{Flächen}|.$$

Der Leser mag sich dies an einigen Triangulierungen der Flächen in Beispiele 4.9.7 veranschaulichen (vgl. Satz 4.6.3 und 4.6.2). Beispielsweise gelten:

- Eulerscher Polyedersatz<sup>78</sup>: Für jede Triangulierung der Kugelschale  $\mathbb{S}^2$  gilt

$$2 = |\text{Ecken}| - |\text{Kanten}| + |\text{Flächen}|.$$

<sup>76</sup>Eine Funktion  $f: \text{Mod}(k) = \text{Obj}(\text{Mod}(k)) \rightarrow \mathbb{Z}$  heißt **additiv**, wenn  $f(M) = f(M') + f(M'')$  für jede kurze exakte Sequenz  $M' \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M''$  von Vektorräumen gilt (das geht natürlich allgemeiner für  $\text{Mod}(R)$ ).

<sup>77</sup>Wegen (4.9.2) kann man  $\chi(M) = \chi(M; \mathbb{Q})$  durch  $\chi(M; k)$  für einen beliebigen Körper  $k$  ersetzen.

<sup>78</sup>Klassisch wird der Eulersche Polyedersatz für konvexe Polyeder formuliert, siehe [Wik20, Eulerscher Polyedersatz].

- Oft schreibt man dies kurz als  $E + F = K + 2$ .
- Für jede Triangulierung des 2-Torus  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  gilt

$$|\text{Ecken}| + |\text{Flächen}| = |\text{Kanten}|.$$

**Aufgabe 4.9.18.** Zunächst eine etwas vage<sup>79</sup> Definition: Ein konvexer regulärer Polyeder ist eine kompakte Teilmenge des euklidischen Raums  $\mathbb{R}^3$ , die durch reguläre  $n$ -Ecke derart begrenzt wird, dass der Durchschnitt je zweier verschiedener regulärer begrenzender  $n$ -Ecke leer ist oder aus genau einem gemeinsamen Eckpunkt oder aus genau einer gemeinsamen Kante besteht; außerdem sollen an jeder Ecke genau  $m$  Kanten zusammenstoßen; hier sind  $m, n \geq 3$  geeignete natürliche Zahlen.

- Gib für die fünf platonischen Körper (welche reguläre konvexe Polyeder sind) in einer Tabelle die Werte von  $m, n, E$  (= Anzahl der Ecken),  $K$  (= Anzahl der Kanten),  $F$  (= Anzahl der Flächen) an und bestätige den klassischen Eulerschen Polyedersatz  $E + F = K + 2$ .
- Verwende den klassischen Eulerschen Polyedersatz  $E + F = K + 2$  um zu zeigen, dass es keine weiteren regulären konvexen Polyeder gibt (bis auf den offensichtlichen<sup>80</sup> Isomorphiebegriff).  
Hinweis: Finde zwei weitere Abhängigkeiten zwischen  $m, n, E, F, K$ .

#### 4.10. Super-Spur.

**4.10.1.** Sei  $R$  ein Ring. Dann können wir die Kategorie  $\text{Mod}(R)^{\mathbb{Z}}$  aller Funktoren  $A: \mathbb{Z} \rightarrow \text{Mod}(R)$  betrachten (siehe Definition A.0.4), wobei wir  $\mathbb{Z}$  als diskrete Kategorie auffassen (siehe [Sch20, Beispiel A.1.5.(f)]). Dies klingt vielleicht kompliziert, ist aber eigentlich ganz einfach: Ein Objekt  $A \in \text{Mod}(R)^{\mathbb{Z}}$  ist nichts anderes als eine (durch  $\mathbb{Z}$ -indizierte) Familie  $A = (A_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  von  $R$ -Moduln  $A_p$ . Ein Morphismus  $f: A \rightarrow B$  ist eine Familie  $f = (f_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  von  $R$ -Modulmorphismen  $f_p: A_p \rightarrow B_p$ . Die Verknüpfung von Morphismen ist die offensichtliche.

Die Kategorie  $\text{Mod}(R)^{\mathbb{Z}}$  mag man als **Kategorie  $\mathbb{Z}$ -indizierter  $R$ -Moduln** bezeichnen.

**4.10.2.** Der offensichtliche Vergiss-Funktor  $\text{Kom}(R) \rightarrow \text{Mod}(R)^{\mathbb{Z}}$  bildet einen Komplex  $((A_p)_p, (d_p)_p)$  auf die unterliegende Familie  $(A_p)_p$  von  $R$ -Moduln ab. Ein solcher Komplex ist genau dann beschränkt, wenn seine unterliegende Familie beschränkt ist (siehe Definition 4.9.10).

**4.10.3.** Wenn wir im Folgenden von Vektorräumen und Morphismen (= linearen Abbildungen) von Vektorräumen und Dimensionen von Vektorräumen sprechen, fixieren wir implizit einen Körper.

**4.10.4.** Ich erinnere an die Spur (englisch *trace*)

$$\text{tr}(f) = \text{tr}_k(f) = \text{tr}(f|_V) = \text{tr}(f: V \rightarrow V)$$

eines Endomorphismus  $f: V \rightarrow V$  eines endlichdimensionalen Vektorraums über einem Körper  $k$ .<sup>81</sup> Ist ist  $f$  bezüglich einer Basis von  $V$  durch eine Matrix  $M$  dargestellt, so ist  $\text{tr}(f) = \sum M_{ii}$  die Summe der Diagonalelemente. Abstrakter ist die offensichtliche Abbildung  $\varphi: V \otimes_k V^* = V \otimes \text{Hom}_k(V, k) \rightarrow \text{End}(V)$  ein Isomorphismus, da  $V$  endlichdimensional ist, und die Spur ist die Verknüpfung  $\text{End}(V) \xrightarrow{\varphi^{-1}} V \otimes V^* \xrightarrow{v \otimes \lambda \mapsto \lambda(v)} k$  des Inversen dieser Abbildung mit der Verjüngung.

**4.10.5.** Es gilt  $\dim(V) = \text{tr}(\text{id}_V)$  für endlichdimensionales  $V$ .

- Unsere Version impliziert die klassische Version: Zerlege die (konvexen) Seitenflächen eines gegebenen konvexen Polyeders durch geeignete Diagonalen in Dreiecke (dabei ändert sich die Größe  $E - K + F$  nicht); außerdem liefert dies eine Triangulierung der Polyederoberfläche nach Proposition 2.2.8. Die Polyederoberfläche ist homöomorph zur 2-Sphäre (stereographische Projektion).
- Die klassische Version sollte auch unsere implizieren: Eine Triangulierung der  $\mathbb{S}^2$  liefert wie folgt einen konvexen Polyeder. Behalte die Ecken, plätze alle gebogenen Kanten bzw. Dreiecke auf der Kugelschale zu gerade Segmenten bzw. flachen Dreiecken. Dadurch erhalten wir einen Polyeder, dessen Seitenflächen Dreiecke sind (manche Dreiecke sind eventuell in derselben Ebene – man könnte diese zusammenfassen, wobei sich  $E - K + F$  nicht ändert). Leider ist dieser Polyeder im Allgemeinen nicht konvex – man muss also wohl noch ein bisschen basteln, was ich mir jetzt nicht genauer überlege.

<sup>79</sup>Vgl. [Wik20, Polyeder] und [Wik20, Polyhedron, Definition und Regular polyhedron]

<sup>80</sup>Skalierung, Translation, Rotation

<sup>81</sup>Bei uns wird wohl immer klar sein, über welchem Körper wir arbeiten, aber genau genommen hängt die Spur vom Körper ab. Beispielsweise hat Multiplikation  $i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $i$  über den komplexen Zahlen Spur  $i$ , über den reellen Zahlen Spur 0.

**Definition 4.10.6.** Ist  $f = (f_p)_{p \in \mathbb{Z}}: A \rightarrow A$  ein Endomorphismus einer beschränkten Familie  $A = (A_p)_{p \in \mathbb{Z}}$   $\mathbb{Z}$ -indizierter endlichdimensionaler Vektorräume, so heißt die alternierende Summe

$$\text{str}(f) = \text{str}(f|A) = \text{str}(f: A \rightarrow A) := \sum_{p \in \mathbb{Z}} (-1)^p \text{tr}(f_p)$$

die **Super-Spur von  $f$** <sup>82</sup>. Dieselbe Formel definiert die **Super-Spur** eines Endomorphismus  $f: A \rightarrow A$  eines beschränkten Komplexes endlichdimensionaler  $k$ -Vektorräume. (Man könnte auch sagen, dass wir die Definition mit Hilfe des Vergiss-Funktors  $\text{Kom}(k) \rightarrow \text{Mod}(k)^{\mathbb{Z}}$  auf solche Endomorphismen ausdehnen.)

**4.10.7.** Ist  $A$  ein beschränkter Komplex (oder eine beschränkte Familie) endlichdimensionaler Vektorräume, so gilt<sup>83</sup>

$$(4.10.1) \quad \chi(A) = \text{str}(\text{id}_A).$$

Lemma 4.9.13 besagt also  $\text{str}(\text{id}_A) = \text{str}(\text{id}_{H(A)}) = \text{str}(H(\text{id}_A))$ . Dies verallgemeinern wir nun in Lemma 4.10.8 zu beliebigen Endomorphismen.

**Lemma 4.10.8** (Homologische Berechnung der Super-Spur; Hopfsche Spurformel). *Ist  $f: A \rightarrow A$  ein Endomorphismus eines beschränkten Komplexes endlichdimensionaler Vektorräume, so gilt*

$$\text{str}(f) = \text{str}(H(f)).$$

Hier ist  $H(f) = (H_p(f))_{p \in \mathbb{Z}}$  der von  $f$  induzierte Endomorphismus der totalen Homologie  $H(A)$ , welche offensichtlich ebenfalls beschränkt ist und aus endlichdimensionalen Vektorräumen besteht.

Insbesondere gilt: Ist  $A$  azyklisch, so gilt  $\text{str}(f) = 0$ .

*Beweis.* Sei  $U \hookrightarrow V \twoheadrightarrow W$  eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen. Sei  $g: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus mit  $g(U) \subset U$ , so dass wir mit den induzierten Abbildungen  $g': U \rightarrow U$  und  $g'': W \rightarrow W$  ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} U & \hookrightarrow & V & \twoheadrightarrow & W \\ g' \downarrow & & g \downarrow & & g'' \downarrow \\ U & \hookrightarrow & V & \twoheadrightarrow & W \end{array}$$

von Vektorräumen erhalten; äquivalent sind einfach lineare Abbildungen  $g, g', g''$  gegeben, so dass dieses Diagramm kommutativ ist. Ist  $V$  endlichdimensional, so gilt die folgende „Additivität der Spur auf Endomorphismen kurzer exakten Sequenzen“

$$\text{tr}(g) = \text{tr}(g') + \text{tr}(g'').$$

Dies zeigt man, indem man eine Basis von  $U$  zu einer Basis von  $V$  ergänzt und  $g$  bezüglich dieser Basis als Matrix darstellt.

In der Situation des Lemmas wenden wir diese Erkenntnis auf die beiden kommutativen Diagramme

$$(4.10.2) \quad \begin{array}{ccccc} Z_p(A) & \hookrightarrow & A_p & \twoheadrightarrow & B_{p-1}(A) \\ Z_p(f) \downarrow & & f_p \downarrow & & \downarrow B_{p-1}(f) \\ Z_p(A) & \hookrightarrow & A_p & \twoheadrightarrow & B_{p-1}(A) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccccc} B_p(A) & \hookrightarrow & Z_p(A) & \twoheadrightarrow & H_p(A) \\ B_p(f) \downarrow & & Z_p(f) \downarrow & & \downarrow H_p(f) \\ B_p(A) & \hookrightarrow & Z_p(A) & \twoheadrightarrow & H_p(A) \end{array}$$

(siehe Lemma B.1.13) endlichdimensionaler Vektorräume mit kurzen exakten Zeilen an (vgl. (4.9.4)) und erhalten

$$\begin{aligned} \text{tr}(f_p) &= \text{tr}(Z_p(f)) + \text{tr}(B_{p-1}(f)), \\ \text{tr}(Z_p(f)) &= \text{tr}(B_p(f)) + \text{tr}(H_p(f)) \end{aligned}$$

für alle  $p \in \mathbb{Z}$ . Analog wie in (4.9.5) folgt daraus sofort die behauptete Gleichheit. □

<sup>82</sup>In [Lüc05, Definition 4.15] wir diese Zahl *Lefschetz-Zahl von  $f$*  genannt, vgl. Definition 4.14.1.

<sup>83</sup>Motiviert durch 4.10.5 könnte man  $\chi(A)$  auch als *Super-Dimension* von  $A$  bezeichnen (oder die rechte Seite als Euler-Spur?).

**Aufgabe 4.10.9** (Eigenschaften der Super-Spur und Folgerungen). Seien  $A, B, C$  beschränkte Komplexe endlichdimensionaler  $k$ -Vektorräume.

- (a) Invarianz unter (zyklischer<sup>84</sup>) Vertauschung: Sind  $f: A \rightarrow B$  und  $g: B \rightarrow A$  Morphismen von Komplexen, so gilt  $\text{str}(f \circ g) = \text{str}(g \circ f)$ .
- (b) „Isomorphe Endomorphismen haben dieselbe Super-Spur:“ Sind  $f: A \rightarrow A$  und  $g: B \rightarrow B$  Endomorphismen und existiert ein Isomorphismus  $v: A \xrightarrow{\sim} B$ , so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ v \downarrow \sim & & v \downarrow \sim \\ B & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

kommutiert, so gilt  $\text{str}(g) = \text{str}(f)$ . (Die „undigrammatische“ Version benötigt nur  $f$  und  $v$  und behauptet  $\text{str}(v \circ f \circ v^{-1}) = \text{str}(f)$ .)

- (c) Linearität:  $\text{str}: \text{Kom}(A, A) \rightarrow k$  ist eine  $k$ -lineare Abbildung.
- (d) Additivität: Seien  $A \hookrightarrow B \twoheadrightarrow C$  eine kurze exakte Sequenz und

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C \\ f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \twoheadrightarrow & C \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Komplexen (also ein Endomorphismus unserer kurzen exakten Sequenz). Dann gilt  $\text{str}(g) = \text{str}(f) + \text{str}(h)$ .

- (e) Folgere Aufgabe 4.9.15 aus (d).
- (f) Sei  $f: A \rightarrow A$  ein Endomorphismus von Komplexen und  $f': A' \rightarrow A'$  die seine „Verschiebung um eins gegen die Pfeilrichtung“, d. h.  $A'_p := A_{p-1}$  und  $f'_p := f_{p-1}$  für alle  $p \in \mathbb{Z}$ <sup>85</sup>. Dann gilt  $\text{str}(f') = -\text{str}(f)$ .
- (g) Homologische Berechnung; Hopfsche Spurformel: Folgere Lemma 4.10.8 aus (d) und (f).  
Hinweis: Verwende die Diagramme in (4.10.2).
- (h) Invarianz unter Homotop-Sein: Sind  $A \xrightleftharpoons[f]{g} B$  homotope Morphismen von Komplexen, so gilt  $\text{str}(f) = \text{str}(g)$ .

Bemerkung: Somit ist  $\text{str}: \text{Hot}_k(A, A) \rightarrow k$  wohldefiniert (und  $k$ -linear).

Bemerkung: Bis auf die beiden Punkte (g) und (h) (die sinnlos würden) gelten alle Aussagen analog für beschränkte Familien  $A, B, C$  endlichdimensionaler Vektorräume und Morphismen solcher Familien.

Ende der 16. Vorlesung am 18.12.2020.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 4.9.14 (Additivität der topologischen Euler-Charakteristik)
- (2) Aufgabe 4.9.18 (platonische Körper)
- (3) 8 Punkte: Aufgabe 4.10.9 (Eigenschaften der Super-Spur)
- (4) Wiederhole den Stoff! Melde jeden noch so kleinen Fehler im Skript!
- (5) Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr und gute Gesundheit!

#### 4.11. Simplicialer Fixpunktsatz.

**Satz 4.11.1** (Simplicialer Fixpunktsatz - rein kombinatorische Aussage!). Sei  $\varphi: (E, \mathcal{K}) \rightarrow (E, \mathcal{K})$  ein Endomorphismus (eine simpliciale Selbstabbildung) eines endlichen Simplicialkomplexes. Seien  $k$  ein Körper und

$$\mathbf{H}(\varphi; k) = \mathbf{H}(\varphi) = (\mathbf{H}_q(\varphi))_{q \in \mathbb{Z}}: \mathbf{H}(\mathcal{K}; k) \rightarrow \mathbf{H}(\mathcal{K}; k)$$

die induzierte Abbildung auf der (totalen) simplicialen Homologie von  $\mathcal{K}$  mit Koeffizienten in  $k$  (siehe Aufgabe 2.4.27).

<sup>84</sup>Weil beispielsweise  $\text{str}(e \circ f \circ g \circ h \circ j) = \text{str}(f \circ g \circ h \circ j \circ e)$  folgt.

<sup>85</sup>und üblicherweise dem Differential  $d_p^{A'} := -d_{p-1}^A$ , was aber in dieser Aufgabe keine Rolle spielt.

(a) Für beliebiges  $\varphi$  gilt

$$(4.11.1) \quad \text{str}(\mathbf{H}(\varphi; k)) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{K}_q \\ \varphi(\sigma) = \sigma}} \text{sgn}(\varphi: \sigma \rightarrow \sigma),$$

in  $k$  wobei hier  $\text{sgn}(\varphi: \sigma \rightarrow \sigma)$  die Signatur der Permutation (= bijektiven Selbstabbildung) der endlichen Menge  $\sigma = \varphi(\sigma)$  meint.

Insbesondere gilt  $\text{str}(\mathbf{H}(\varphi; \mathbb{Q})) \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  und für jeden Körper  $k$  ist  $\text{str}(\mathbf{H}(\varphi; k))$  das Bild dieser ganzen Zahl unter dem eindeutigen Ringmorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow k$ . Insbesondere folgt aus  $\text{str}(\mathbf{H}(\varphi; k)) \neq 0$  bereits  $\text{str}(\mathbf{H}(\varphi; \mathbb{Q})) \neq 0$ .

(b) Fixiert  $\varphi$  keinen Simplex der Dimension  $\geq 1$  fixiert, in Formeln  $\varphi(\sigma) \neq \sigma$  für alle  $\sigma \in \mathcal{K}_{\geq 1}$ , so gilt

$$\text{str}(\mathbf{H}(\varphi; k)) = |E^\varphi|$$

wobei  $E^\varphi = \{e \in E \mid \varphi(e) = e\}$  die Menge der Fixpunkte von  $\varphi$  ist.

Ist insbesondere die Super-Spur von  $\mathbf{H}(\varphi; \mathbb{Q})$  von Null verschieden, in Formeln  $\text{str}(\mathbf{H}(\varphi; \mathbb{Q})) \neq 0$ , so hat  $\varphi: E \rightarrow E$  einen Fixpunkt, d. h.  $\varphi$  fixiert eine Ecke.

*Beweis.* Da  $\mathcal{K}$  endlich ist, ist  $\mathbf{S}(\mathcal{K}; k)$  nach 2.4.22 ein beschränkter Komplex endlichdimensionaler Vektorräume. Also zeigt die Hopfsche Spurformel aus Lemma 4.10.8

$$\text{str}(\mathbf{H}(\varphi)) = \text{str}(\mathbf{S}(\varphi)) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q \text{tr}(\mathbf{S}_q(\varphi) | \mathbf{S}_q(\mathcal{K}; k)).$$

(a) Seien eine Ordnung  $\leq$  auf  $E$  und ein  $q \in \mathbb{N}$  fixiert. Nach 2.4.22 ist  $((s_0, \dots, s_q))_{(s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{st-mono}}}$  eine  $k$ -Basis von  $\mathbf{S}_q(\mathcal{K}; k)$ . Die lineare Abbildung  $\mathbf{S}_q(\varphi)$  ist bezüglich dieser Basis nach (2.4.14) durch eine Matrix dargestellt, die in jeder Spalte maximal einen Eintrag  $\pm 1$  hat. Wir erhalten

$$\text{tr}(\mathbf{S}_q(\varphi)) = \sum_{\substack{(s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{st-mono}} \\ (\{\varphi(s_0), \dots, \varphi(s_q)\} = \{s_0, \dots, s_q\})}} \text{sgn}(\varphi: \{s_0, \dots, s_q\} \rightarrow \{s_0, \dots, s_q\}).$$

Daraus folgt sofort (4.11.1).

(b) Die Annahme, dass kein Simplex der Dimension  $\geq 1$  fixiert wird, zeigt, dass auf der rechten Seite von (4.11.1) alle Summanden für  $q > 0$  verschwinden. Der Summand für  $q = 0$  ist aber  $|E^\varphi|$ , denn jede Permutation einer einelementigen Menge hat Signatur Eins.  $\square$

**Beispiel 4.11.2.** Sei  $\mathcal{K}$  der maximale Simplicialkomplex mit Eckenmenge  $E = \{a, b, c\}$ . Sei  $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  die durch zyklische Vertauschung  $a \xrightarrow{\varphi} b \xrightarrow{\varphi} c \xrightarrow{\varphi} a$  gegebene simpliciale Abbildung. Dann lebt  $\mathbf{H}(\mathcal{K})$  nur im Grad Null (per Rechnung oder kombinatorisch wegen Korollar 2.4.31.(a) oder topologisch wegen Satz 4.8.18) und es gilt  $\mathbf{H}_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}[a]$  und  $\mathbf{H}_0(\varphi) = \text{id}_{\mathbf{H}_0(\mathcal{K})}$  (wegen  $[b] = [a]$  in  $\mathbf{H}_0(\mathcal{K})$  oder Natürlichkeit in Satz 4.8.18). Dies zeigt  $\text{str}(\mathbf{H}(\varphi)) = 1 \neq 0 = |E^\varphi|$ . Dies widerspricht aber nicht dem simplicialen Fixpunktsatz 4.11.1.(b), denn  $\varphi$  fixiert den 3-Simplex  $\{a, b, c\}$ . Wir entfernen diesen nun.

Betrachte den Unterkomplex  $\mathcal{U} := \mathcal{K} \setminus \{\{a, b, c\}\}$  und die induzierte simpliciale Abbildung  $\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ , auf die der simpliciale Fixpunktsatz 4.11.1.(b) anwendbar ist. Mit Korollar 2.4.31.(b) berechnen wir  $\mathbf{H}_0(\mathcal{U}) = \mathbb{Z}[a]$  und  $\mathbf{H}_1(\mathcal{U}) = \mathbb{Z}[\partial(a, b, c)] = \mathbb{Z}[(ab) + (bc) + (ca)]$  und  $\text{str}(\mathbf{H}(\varphi)) = 1 - 1 = 0 = |E^\varphi|$  wie vom Fixpunktsatz vorausgesagt.

**Beispiel 4.11.3.** Überprüfe den simplicialen Fixpunktsatz 4.11.1.(b) für diverse simpliciale Selbstabbildungen des „simplicialen Quadrat(rands)“ aus Aufgabe 2.4.24, etwa die „Spiegelung an der Diagonalen“.

Wer mag kann, kann analoges für das volle Quadrat oder den Tetraeder (ohne topdimensionalen Simplex, ohne 2-Simplizes, ...) tun.

**Aufgabe 4.11.4.** Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex, dessen simpliciale Homologie  $\mathbf{H}(\mathcal{K}; \mathbb{Q})$  nur in Grad Null lebt und dort isomorph zu  $\mathbb{Q}$  ist (beispielsweise weil seine geometrische Realisierung  $\Delta(\mathcal{K})$  zusammenziehbar ist). Sei  $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  eine simpliciale Abbildung. Dann gelten:

(a) Die Abbildung  $\varphi$  hat einen Fix-Simplex: Es gibt einen Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}$  mit  $\varphi(\sigma) = \sigma$ .

(b) Folgere: Die Abbildung  $\Delta(\varphi): \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$  hat einen Fixpunkt.

Bemerkung: Ist  $\Delta(\mathcal{K}) \cong D_n$  eine Triangulierung, so zeigt dies den Brouwerschen Fixpunktsatz 4.5.8 für stetige Abbildungen  $D_n \rightarrow D_n$  der Form  $\Delta(\varphi)$ .

(c) Teilaussage (a) folgt im Fall  $\Delta(\mathcal{K}) \cong D_n$  aus dem Brouwerschen Fixpunktsatz 4.5.8.

#### 4.12. Baryzentrische Unterteilung für Simplicialkomplexe.

**Definition 4.12.1.** Sei  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex. Wir definieren einen neuen Simplicialkomplex

$$B\mathcal{K} = \check{\mathcal{K}} = (\check{E}, \check{\mathcal{K}}),$$

seine **baryzentrische Unterteilung**, wie folgt. Seine Ecken sind die Simplizes von  $\mathcal{K}$ , in Formeln

$$\check{E} := \mathcal{K}.$$

Seine  $q$ -Simplizes sind alle  $(q+1)$ -elementige Teilmengen der durch die Inklusionsrelation  $\subset$  partiell geordneten Menge  $\mathcal{K}$ , die (total)geordnet sind, in Formeln

$$\begin{aligned} (B\mathcal{K})_q = \check{\mathcal{K}}_q &:= \{\kappa \subset \check{E} = \mathcal{K} \mid |\kappa| = q+1 \text{ und die Inklusionsrelation } \subset \text{ definiert eine (totale) Ordnung auf } \kappa\} \\ &= \{(\sigma_0, \dots, \sigma_q) \in \mathcal{K}^{q+1} \mid \sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q\} \\ &= \{\text{Ketten } \sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q \text{ der Länge } q \text{ in } \mathcal{K}\}, \end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen genauer die durch  $\{\sigma_0, \dots, \sigma_q\} \leftarrow (\sigma_0, \dots, \sigma_q)$  gegebene Bijektion ist. Wir schreiben Elemente von  $\check{\mathcal{K}}_q$  meist als  $(\sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q)$ .

**Beispiel 4.12.2.** Ist  $\mathcal{K}$  der maximale Simplicialkomplex mit Eckenmenge  $\{a, b, c\}$ , so hat seine baryzentrische Unterteilung 7 Ecken

$$\bar{a} := \{a\}, \quad \bar{b} := \{b\}, \quad \bar{c} := \{c\}, \quad \bar{ab} := \{a, b\}, \quad \bar{ac} := \{a, c\}, \quad \bar{bc} := \{b, c\}, \quad \bar{abc} := \{a, b, c\},$$

7 Null-Simplizes

$$(\bar{a}), (\bar{b}), (\bar{c}), (\bar{ab}), (\bar{ac}), (\bar{bc}), (\bar{abc}),$$

12 Eins-Simplizes<sup>86</sup>

$$\begin{aligned} &(\bar{a} \subsetneq \bar{ab}), (\bar{a} \subsetneq \bar{ac}), (\bar{a} \subsetneq \bar{abc}), \\ &(\bar{b} \subsetneq \bar{ab}), (\bar{b} \subsetneq \bar{bc}), (\bar{b} \subsetneq \bar{abc}), \\ &(\bar{c} \subsetneq \bar{ac}), (\bar{c} \subsetneq \bar{bc}), (\bar{c} \subsetneq \bar{abc}), \\ &(\bar{ab} \subsetneq \bar{abc}), (\bar{ac} \subsetneq \bar{abc}), (\bar{bc} \subsetneq \bar{abc}), \end{aligned}$$

und 6 Zwei-Simplizes

$$\begin{aligned} &(\bar{a} \subsetneq \bar{ab} \subsetneq \bar{abc}), (\bar{a} \subsetneq \bar{ac} \subsetneq \bar{abc}), \\ &(\bar{b} \subsetneq \bar{ab} \subsetneq \bar{abc}), (\bar{b} \subsetneq \bar{bc} \subsetneq \bar{abc}), \\ &(\bar{c} \subsetneq \bar{ac} \subsetneq \bar{abc}), (\bar{c} \subsetneq \bar{bc} \subsetneq \bar{abc}). \end{aligned}$$

Vergleiche mit „geometrischer“ baryzentrischer Unterteilung eines singulären 2-Simplex (6 Dreiecke, 12 Kanten, 7 Ecken), siehe Abbildung 3.

**4.12.3.** Sei  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex und  $B\mathcal{K} = (\check{E}, \check{\mathcal{K}})$  seine baryzentrische Unterteilung. Sei

$$u = u_{\mathcal{K}}: \Delta(B\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$$

die von der linearen Abbildung  $\mathbb{R}\check{E} \rightarrow \mathbb{R}E$  mit

$$u(\sigma) = \underbrace{\frac{1}{|\sigma|} \sum_{e \in \sigma} e}_{\text{Schwerpunkt von } \Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})} \quad \text{für alle Ecken } \sigma \in \check{E} = \mathcal{K} \text{ von } B\mathcal{K},$$

induzierte Abbildung (dies ist wohldefiniert, vgl. (4.12.1)).

<sup>86</sup> Der 1-Simplex  $(\bar{a} \subsetneq \bar{ab})$  ist  $(\bar{a}, \bar{ab}) = (\{a\}, \{a, b\})$  in Tupelschreibweise und  $\{\bar{a}, \bar{ab}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$  in Teilmengenschreibweise.

**Beispiel 4.12.4** (Fortsetzung von Beispiel 4.12.2). Wir wollen Lemma 4.12.5 in diesem Beispiel plausibel machen. Die Einschränkung der Abbildung  $u: \Delta(\mathcal{BK}) \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$  auf  $\Delta((\bar{c} \subsetneq \overline{ac} \subsetneq \overline{abc}))$  ist durch

$$x = t_{\bar{c}}\bar{c} + t_{\overline{ac}}\overline{ac} + t_{\overline{abc}}\overline{abc} \mapsto u(x) = t_{\bar{c}}c + t_{\overline{ac}}\frac{a+c}{2} + t_{\overline{abc}}\frac{a+b+c}{3}$$

gegeben und landet also in Abbildung 3 im abgeschlossenen grauen Dreieck. Man beachte, dass mit  $a, b, c$

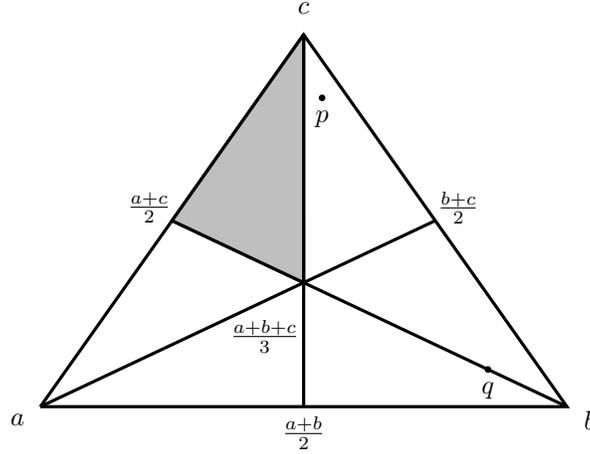


ABBILDUNG 3. Illustration zur baryzentrischen Unterteilung und zum Beweis von Lemma 4.12.5

auch  $a, \frac{a+b}{2}, \frac{a+b+c}{3}$  linear unabhängig sind. Unsere Einschränkung ist also eine injektive Abbildung

$$\Delta(\{\bar{c} \subsetneq \overline{ac} \subsetneq \overline{abc}\}) \hookrightarrow \Delta(\{a, b, c\}) = \Delta(\mathcal{K}).$$

Die beiden folgenden Rechnungen zeigen, dass die wie folgt definierten und in Abbildung 3 angedeuteten „beliebigen“ Punkte  $p, q \in \Delta(\mathcal{K})$  im Bild unserer Abbildung  $u$  liegen:

$$\begin{aligned} p &= \frac{5}{100}a + \frac{12}{100}b + \frac{83}{100}c \\ &= \frac{5}{100}(a+b+c) + \frac{7}{100}b + \frac{78}{100}c \\ &= \frac{15}{100}\frac{a+b+c}{3} + \frac{7}{100}(b+c) + \frac{71}{100}c \\ &= \frac{15}{100}\frac{a+b+c}{3} + \frac{14}{100}\frac{b+c}{2} + \frac{71}{100}c \\ q &= \frac{1}{10}a + \frac{8}{10}b + \frac{1}{10}c \\ &= \frac{1}{10}(a+b+c) + \frac{7}{10}b \\ &= \frac{3}{10}\frac{a+b+c}{3} + \frac{7}{10}b \end{aligned}$$

Dabei haben wir den folgenden Algorithmus verwendet, den wir am Beispiel des Punktes  $p$  erklären: Bestimme den Träger von  $p$ , hier  $\{a, b, c\}$ . Sei  $m$  der minimale vorkommende (positive) Koeffizient, hier  $\frac{5}{100}$ . Schreibe  $p$  als Summe des  $m$ -fachen der Summe der Elemente des Trägers (hier der Summand  $\frac{5}{100}(a+b+c)$ ) und des Restes. Der Rest hat kleineren Träger und kann mit demselben Verfahren behandelt werden.

**Lemma 4.12.5.** *Ist  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex, so ist  $u: \Delta(\mathcal{BK}) \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$  ein Homöomorphismus.*

*Beweis.* (1) Sei  $\kappa = (\sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q) \in \mathcal{BK} = \check{\mathcal{K}}$  ein  $q$ -Simplex. Dann ist  $u$  auf  $\Delta(\kappa) \subset \Delta(\mathcal{BK})$  durch die Verknüpfung

$$(4.12.1) \quad \Delta(\kappa) \rightarrow \Delta(\sigma_q) \subset \Delta(\mathcal{K}),$$

$$\sum_{i=0}^q t_i \sigma_i \mapsto \sum_{i=0}^q t_i b_{\sigma_i},$$

gegeben, wobei  $b_{\sigma_i}$  der Schwerpunkt von  $\Delta(\sigma_i)$  ist; da all diese Schwerpunkte in  $\Delta(\sigma_q)$  liegen (= Konvexkombinationen der Elemente von  $\sigma_q$  sind), liegt auch die Konvexkombination  $\sum t_i b_{\sigma_i}$  dieser Schwerpunkte wie behauptet in  $\Delta(\sigma_q)$ .

Da die Einschränkung von  $u$  auf  $\Delta(\kappa)$  offensichtlich stetig ist, ist  $u$  stetig.

- (2) Sei  $\kappa = (\sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q) \in \text{BK} = \check{\mathcal{K}}$  wie eben ein  $q$ -Simplex. Sei  $x \in \Delta(\kappa)'$  (äquivalent:  $x \in \Delta(\kappa)$  und  $\text{Supp}(x) = \kappa$ , siehe (2.2.3)). Schreiben wir  $x = \sum_{i=0}^q t_i \sigma_i$ , so sind also alle  $t_i$  positiv. Wir berechnen (mit der Konvention  $\sigma_{-1} = \emptyset$ )

(4.12.2)

$$\begin{aligned}
u(x) &= \sum_{i=0}^q t_i b_{\sigma_i} \\
&= \sum_{i=0}^q \frac{t_i}{|\sigma_i|} \left( \sum_{e \in \sigma_i} e \right) \\
&= \sum_{i=0}^q \frac{t_i}{|\sigma_i|} \left( \sum_{e \in \sigma_i \setminus \sigma_{i-1}} e + \sum_{e \in \sigma_{i-1} \setminus \sigma_{i-2}} e + \dots + \sum_{e \in \sigma_1 \setminus \sigma_0} e + \sum_{e \in \sigma_0} e \right) \\
&= \sum_{i=0}^q \frac{t_i}{|\sigma_i|} \left( \sum_{j=0}^i \sum_{e \in \sigma_j \setminus \sigma_{j-1}} e \right) \\
&= \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ 0 \leq j \leq q \\ j \leq i}} \frac{t_i}{|\sigma_i|} \sum_{e \in \sigma_j \setminus \sigma_{j-1}} e \\
&= \sum_{j=0}^q \left( \sum_{i=j}^q \frac{t_i}{|\sigma_i|} \right) \sum_{e \in \sigma_j \setminus \sigma_{j-1}} e \\
&= \underbrace{\left( \frac{t_q}{|\sigma_q|} \right)}_{:=s_q} \sum_{e \in \sigma_q \setminus \sigma_{q-1}} e + \underbrace{\left( \sum_{i=q-1}^q \frac{t_i}{|\sigma_i|} \right)}_{:=s_{q-1}} \sum_{e \in \sigma_{q-1} \setminus \sigma_{q-2}} e + \dots + \underbrace{\left( \sum_{i=1}^q \frac{t_i}{|\sigma_i|} \right)}_{:=s_1} \sum_{e \in \sigma_1 \setminus \sigma_0} e + \underbrace{\left( \sum_{i=0}^q \frac{t_i}{|\sigma_i|} \right)}_{:=s_0} \sum_{e \in \sigma_0} e.
\end{aligned}$$

Beachte  $0 < s_q < s_{q-1} < \dots < s_1 < s_0$ . Fassen wir  $u(x)$  als Funktion  $E \rightarrow [0, 1]$  mit endlichem Träger auf, so sind die  $s_0, \dots, s_q$  genau die positiven Werte von  $u(x)$ , die Zahl  $q+1$  ist die Anzahl der positiven Werte und es gilt

$$u(x)^{-1}(s_i) = \sigma_i \setminus \sigma_{i-1}.$$

Also bestimmt  $u(x)$  zuerst  $q$ , dann alle  $0 < s_q < s_{q-1} < \dots < s_1 < s_0$  und dann alle  $\sigma_i$  (und damit  $\kappa$ ). Daraus können wir zuerst  $t_q$ , dann  $t_{q-1}$ , usw. und schließlich  $t_0$  berechnen. Also ist  $x = \sum_{i=0}^q t_i \sigma_i$  vollständig durch  $u(x)$  bestimmt.

Aus der obigen Rechnung ist klar, dass  $\sigma_q$  der Träger von  $u(x)$  ist, in Formeln  $u(x) \in \Delta(\sigma_q)'$ .

Insgesamt zeigt dies, dass die Einschränkung  $u: \Delta(\kappa)' \hookrightarrow \Delta(\sigma_q)'$  injektiv ist.

- (3) Injektivität von  $u$ : Sei  $x \in \Delta(\text{BK})$  beliebig. Dann gibt es genau ein  $\kappa = \{\sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q\} \in \text{BK} = \check{\mathcal{K}}$  mit  $x \in \Delta(\kappa)'$ , nämlich den Träger von  $x$ . Wir haben gerade gesehen, wie man alle  $\sigma_i$  und damit  $\kappa$  aus  $u(x)$  berechnet.

Gilt also  $u(x) = u(y)$  für zwei beliebige Elemente  $x, y \in \Delta(\text{BK})$ , so haben  $x$  und  $y$  denselben Träger  $\kappa$ , d. h.  $x, y \in \Delta(\kappa)'$ . Da  $u: \Delta(\kappa)' \hookrightarrow \Delta(\sigma_q)'$  injektiv ist, folgt  $x = y$ .

- (4) Surjektivität von  $u$  (in gewisser Weise klar durch Beispiel 4.12.4): Wir lesen den Beweis der Injektivität rückwärts. Sei  $v \in \Delta(\mathcal{K})$  gegeben. Sei  $q$  so gewählt, dass  $q+1$  die Anzahl positiver Werte von  $v: E \rightarrow [0, 1]$  ist und seien  $0 < s_q < s_{q-1} < \dots < s_1 < s_0$  die positiven Werte. Definiere Teilmengen  $\sigma_0, \dots, \sigma_q \subset E$  durch  $v^{-1}(s_0) = \sigma_0$ ,  $v^{-1}(s_1) = \sigma_1 \setminus \sigma_0$ ,  $\dots$ ,  $v^{-1}(s_q) = \sigma_q - \sigma_{q-1}$  (äquivalent:  $\sigma_i := v^{-1}([s_i, 1])$ ). Da  $\sigma_q$  der Träger von  $v$  ist und  $\sigma_0 \subsetneq \sigma_1 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q$  gilt, sind alle  $\sigma_i$  in  $\mathcal{K}$  und damit

ist  $\kappa := (s_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q) \in \text{BK}$  ein Simplex von  $\text{BK}$ . Es gilt  $v = s_q \sum_{e \in \sigma_q \setminus \sigma_{q-1}} e + \dots + s_0 \sum_{e \in \sigma_0} e$ . Definiere  $t_0, \dots, t_q \in \mathbb{R}_{>0}$  (bei  $t_q$  beginnend) durch  $s_i = \sum_{j=i}^q \frac{t_j}{|\sigma_j|}$ .

Wir behaupten, dass dann  $x := \sum_{i=0}^q t_i \sigma_i$  das gesuchte Urbild von  $v$  ist. Dies scheint klar nach der obigen Rechnung (4.12.2), jedoch sollte man sich überzeugen dass  $x \in \Delta(\text{BK})$  gilt (und nicht nur  $x \in \mathbb{R}\tilde{E}$ ). Zu zeigen ist also  $\sum_{i=0}^q t_i = 1$ . Wir führen diese Rechnung exemplarisch im Fall  $q = 2$  durch; die folgende erste Gleichung besagt schlicht, dass die Summe der Koeffizienten von  $v$  Eins ist.

$$\begin{aligned} 1 &= s_2 \cdot |\sigma_2 \setminus \sigma_1| + s_1 \cdot |\sigma_1 \setminus \sigma_0| + s_0 \cdot |\sigma_0| \\ &= \frac{t_2}{|\sigma_2|} \cdot |\sigma_2 \setminus \sigma_1| + \left( \frac{t_2}{|\sigma_2|} + \frac{t_1}{|\sigma_1|} \right) \cdot |\sigma_1 \setminus \sigma_0| + \left( \frac{t_2}{|\sigma_2|} + \frac{t_1}{|\sigma_1|} + \frac{t_0}{|\sigma_0|} \right) \cdot |\sigma_0| \\ &= \frac{t_2}{|\sigma_2|} \cdot |\sigma_2| + \frac{t_1}{|\sigma_1|} \cdot |\sigma_1| + \frac{t_0}{|\sigma_0|} \cdot |\sigma_0| \\ &= t_2 + t_1 + t_0. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall geht vollkommen analog.

- (5) Nun ist klar, dass für jedes  $\sigma \in \mathcal{K}$  die von  $u$  induzierte Abbildung

$$\bigsqcup_{\substack{\kappa = (\sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q) \in \text{BK} \\ \sigma_q = \sigma}} \Delta(\kappa)' \rightarrow \Delta(\sigma)'$$

bijektiv ist. Wegen  $\Delta(\sigma) = \bigsqcup_{\tau \subset \sigma} \Delta(\tau)'$  ist auch

$$(4.12.3) \quad L(\sigma) := \bigsqcup_{\substack{\kappa = (\sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q) \in \text{BK} \\ \sigma_q \subset \sigma}} \Delta(\kappa) \rightarrow \Delta(\sigma)$$

bijektiv. Beiden Seiten sind Hausdorff (nach Proposition 2.2.11) und kompakt (die linke Seite als endliche Vereinigung von Kompakta). Als bijektive Abbildung zwischen kompakten Hausdorffräumen ist unsere Abbildung automatisch ein Homöomorphismus ([Sch20, Satz 2.7.15]).

- (6) Per Definition trägt  $\Delta(\text{BK})$  die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\Delta(\kappa) \subset \Delta(\text{BK})$ , für  $\kappa \in \text{BK}$ ; außerdem ist  $\Delta(\text{BK})$  die Vereinigung all dieser Teilmengen.

Sei  $\sigma \in \mathcal{K}$ . Dann ist  $L(\sigma)$  die endliche Vereinigung der abgeschlossenen Teilmengen  $\Delta(\kappa)$ , für  $\kappa = (\sigma_0 \subsetneq \dots \subsetneq \sigma_q) \in \text{BK}$  mit  $\sigma_q \subset \sigma$ . Also trägt  $L(\sigma)$  die Finaltopologie bezüglich der Inklusionen  $\Delta(\kappa) \subset L(\sigma)$  dieser Teilmengen (siehe [Sch20, Beispiel 2.8.36 oder Aufgabe 2.5.19]).

Es folgt, dass  $\Delta(\text{BK})$  (was offensichtlich die Vereinigung aller  $L(\sigma)$  ist) die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $L(\sigma) \subset \Delta(\text{BK})$ , für  $\sigma \in \mathcal{K}$ , trägt (leicht nachzurechnen, formal folgt es aus der naheliegenden Version von [Sch20, Lemma 2.8.84] für Familien). Da  $\Delta(\mathcal{K})$  per Definition die Finaltopologie bezüglich aller Inklusionen  $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\mathcal{K})$  trägt, da alle Abbildungen (4.12.3) Homöomorphismen sind und da  $u: \Delta(\text{BK}) \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$  bijektiv ist, ist  $u$  ein Homöomorphismus.  $\square$

#### Aufgabe 4.12.6.

- (a) Sei  $\varphi: \mathcal{K} = (E, \mathcal{K}) \rightarrow \mathcal{L} = (F, \mathcal{L})$  eine simpliziale Abbildung (= ein Morphismus in  $\text{SimpKomp}$ ), also eine Abbildung  $\varphi: E \rightarrow F$ , so dass die induzierte Abbildung  $\mathcal{P}(\varphi): \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$ ,  $\sigma \mapsto \varphi(\sigma)$ , zwischen den Potenzmengen  $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(E)$  nach  $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(F)$  abbildet. Dann definiert  $\mathcal{P}(\varphi)$  eine simpliziale Abbildung  $\text{BK} \rightarrow \text{BL}$ , die wir als  $\text{B}\varphi$  notieren.
- (b) Die Zuordnungen  $\mathcal{K} \mapsto \text{BK}$  und  $\varphi \mapsto \text{B}\varphi$  definieren einen Endofunktor

$$\text{B}: \text{SimpKomp} \rightarrow \text{SimpKomp}$$

der Kategorie der Simplizialkomplexe.

- (c) Die Familie der Homöomorphismen  $u_{\mathcal{K}}: \Delta(\text{BK}) \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$  ist eine Isotransformation

$$u := (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \text{SimpKomp}}: \Delta \circ \text{B} \xrightarrow{\sim} \Delta: \text{SimpKomp} \rightarrow \text{Top}.$$

Ende der 17. Vorlesung am 07.01.2021.

### 4.13. Simpliciale Approximation.

**Definition 4.13.1.** Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  endliche Simplicialkomplexe und sei  $f: \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{L})$  eine stetige Abbildung zwischen ihren geometrischen Realisierungen. Eine **simpliciale Approximation an  $f$**  ist ein Paar bestehend aus einer natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  und einer simplicialen Abbildung

$$\varphi: B^n \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$$

mit der Eigenschaft, dass für alle  $x \in \Delta(B^n \mathcal{K})$  ein Simplex  $\sigma = \sigma_x \in \mathcal{L}$  existiert, dessen voller Simplex  $\Delta(\sigma)$  sowohl  $f(u^n(x))$  als auch  $(\Delta(\varphi))(x)$  enthält, wie im folgenden Diagramm illustriert.

$$\begin{array}{ccccc} u^n(x) & \in & \Delta(\mathcal{K}) & \xrightarrow{f} & \Delta(\mathcal{L}) & \supset & \Delta(\sigma) & \ni & f(u^n(x)) \\ \uparrow & & \uparrow \sim & \nearrow \Delta(\varphi) & & & \downarrow \Psi & & \\ x & \in & \Delta(B^n \mathcal{K}) & & & & (\Delta(\varphi))(x) & & \end{array}$$

Dieses Diagramm ist im Allgemeinen *nicht* kommutativ – der Punkt ist ja gerade, dass man die (im Allgemeinen nicht kombinatorisch gegebene) Abbildung  $f$  kombinatorisch durch  $\varphi$  approximieren kann.

**Aufgabe 4.13.2.** Finde simpliciale Approximationen zur Identitätsabbildung  $f = \text{id}: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  in den vier Situationen aus Abbildung 4, die die jeweilige Triangulierung von Ausgangs- bzw. Zielintervall beschreiben. Bemerkung: Eine Lehre aus dieser Aufgabe ist, dass die geometrische Realisierung  $\Delta(\varphi)$  einer



ABBILDUNG 4. Bilder zu Aufgabe 4.13.2

simplicialen Approximation  $\varphi$  an einen Homöomorphismus im Allgemeinen kein Homöomorphismus ist.

**Proposition 4.13.3.** Sei  $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  eine simpliciale Approximation an  $f: \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{L})$ . Dann sind  $f \circ u^n$  und  $\Delta(\varphi)$  homotop vermöge der (stetigen!) Homotopie

$$\begin{aligned} H: \Delta(B^n \mathcal{K}) \times [0, 1] &\rightarrow \Delta(\mathcal{L}), \\ (x, t) &\mapsto t(\Delta(\varphi))(x) + (1 - t)f(u^n(x)). \end{aligned}$$

*Beweis.* Zunächst ist zu beachten, dass  $H$  als Abbildung von Mengen wohldefiniert ist: Für jedes  $x \in \Delta(B^n \mathcal{K})$  gibt es einen Simplex  $\sigma_x \in \mathcal{L}$  mit  $f(u^n(x)), (\Delta(\varphi))(x) \in \Delta(\sigma_x)$ . Damit liegt auch für jedes  $t \in [0, 1]$  die Konvexkombination  $t(\Delta(\varphi))(x) + (1 - t)f(u^n(x))$  in  $\Delta(\sigma_x) \subset \Delta(\mathcal{L})$ .

Wir zeigen nun, dass  $H$  stetig ist, falls  $\mathcal{L}$  endlich ist (vermutlich brauchen wir eh nur diesen Fall in der Vorlesung). Dann trägt  $\Delta(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}^F$  als geometrische Realisierung eines endlichen Simplicialkomplexes die induzierte Topologie (siehe 2.2.5). Es genügt also zu zeigen, dass  $H$ , aufgefasst als Abbildung nach  $\mathbb{R}^F$ , stetig ist. Dies ist aber trivial, denn  $\Delta(\varphi)$  und  $f \circ u^n$  sind stetig als Abbildungen  $\Delta(B^n \mathcal{K}) \rightarrow \mathbb{R}^F$ , und  $H$  ist dann die Verknüpfung stetiger Abbildungen

$$\Delta(B^n \mathcal{K}) \times [0, 1] \xrightarrow{(x,t) \mapsto ((\Delta(\varphi))(x), f(u^n(x)), t)} \mathbb{R}^F \times \mathbb{R}^F \times [0, 1] \xrightarrow{(x,y,t) \mapsto tx + (1-t)y} \mathbb{R}^F.$$

Nun sei  $\mathcal{L}$  beliebig. Wie in 4.8.9 sehen wir, dass

$$\bigsqcup_{\tau \in B^n \mathcal{K}} (\Delta(\tau) \times [0, 1]) \rightarrow \Delta(B^n \mathcal{K}) \times [0, 1]$$

final und surjektiv ist. Es genügt also zu zeigen, dass alle Restriktionen  $\Delta(\tau) \times [0, 1] \rightarrow \Delta(\mathcal{L})$  von  $H$  stetig sind. Da die Bilder des Kompaktums  $\Delta(\tau)$  unter den stetigen Abbildungen  $f \circ u^n$  und  $\Delta(\varphi)$  kompakt sind, sind diese Bilder nach Proposition 2.2.15 für einen geeigneten endlichen Unterkomplex  $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$  in  $\Delta(\mathcal{L}')$

enthalten. Es genügt also zu zeigen, dass die induzierte Abbildung  $\Delta(\tau) \times [0, 1] \rightarrow \Delta(\mathcal{L}')$  stetig ist. Dies folgt aber aus dem obigen Argument.<sup>87</sup>  $\square$

**Definition 4.13.4.** Sei  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ein Simplicialkomplex. Gegeben ein Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}$  definieren wir seinen **offenen Stern** als

$$\text{St}(\sigma) := \{f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid \sigma \subset \text{Supp}(f)\} = \bigcap_{e \in \sigma} \{f \in \Delta(\mathcal{K}) \mid f(e) \neq 0\} = \bigsqcup_{\tau \in \mathcal{K}: \sigma \subset \tau} \Delta(\tau)'$$

wobei die rechte Gleichheit aus (2.2.3) folgt. In Worten ist er die Vereinigung der offenen Simplexe  $\Delta(\tau)'$  zu all denjenigen  $\tau$ , die  $\sigma$  als Seite haben, für die also  $\Delta(\sigma) \subset \Delta(\tau)$  gilt (vgl. 2.2.4).

**4.13.5.** Der offene Stern  $\text{St}(\sigma)$  ist in der Tat offen in  $\Delta(\mathcal{K})$ , denn für jedes  $\mu \in \mathcal{K}$  ist

$$\text{St}(\sigma) \cap \Delta(\mu) = \bigcap_{e \in \sigma} \{f \in \Delta(\mu) \mid f(e) \neq 0\}$$

offen in  $\Delta(\mu)$  als endlicher Schnitt offener Teilmengen.

**4.13.6.** Für jedes  $f \in \Delta(\mathcal{K})$  gilt

$$(4.13.1) \quad \text{Supp}(f) = \{e \in E \mid f \in \text{St}(\{e\})\}.$$

Dies ist nur eine Umformulierung der offensichtlichen Aussage  $e \in \text{Supp}(f) \iff f \in \text{St}(\{e\})$  für jedes  $e \in E$ . Wegen  $\text{Supp}(f) \neq \emptyset$  liegt  $f$  in einem offenen Stern. Die offenen Sterne aller 0-Simplexe bilden also bereits eine offene Überdeckung von  $\Delta(\mathcal{K})$ .

**4.13.7.** Die  $n$ -fache baryzentrische Unterteilung von  $\mathcal{K}$  wird als  $B^n\mathcal{K} = B \cdots B\mathcal{K}$  notiert. Die Verknüpfung der Homöomorphismen  $u = u_{B^i\mathcal{K}}: \Delta(B^{i+1}\mathcal{K}) \xrightarrow{\sim} \Delta(B^i\mathcal{K})$  wird als  $u^n := u \circ \dots \circ u \circ: B^n\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}$  notiert.

**Satz 4.13.8** (Simpliziale Approximation). *Seien  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{L}$  Simplicialkomplexe und sei  $f: \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{L})$  eine stetige Abbildung zwischen ihren geometrischen Realisierungen. Ist  $\mathcal{K}$  endlich, so hat  $f$  eine simpliziale Approximation  $(n, \varphi: B^n\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L})$ .*

**Erkläre Beweis durch Bild!**

*Beweis.* Offensichtlich ist  $\Delta(\mathcal{L}) = \bigcup_{z \text{ Ecke von } \mathcal{L}} \text{St}(z)$  die Vereinigung der offenen Sterne  $\text{St}(z) := \text{St}(\{z\})$  aller Ecken  $z$  von  $\mathcal{L}$ . Da  $f$  stetig ist, ist  $\Delta(\mathcal{K}) = \bigcup_{z \text{ Ecke von } \mathcal{L}} f^{-1}(\text{St}(z))$  eine offene Überdeckung.

Da  $\mathcal{K}$  endlich ist, ist  $\Delta(\mathcal{K})$  kompakt. Sei  $E$  die endliche Eckenmenge von  $\mathcal{K}$ . Betrachte  $\mathbb{R}E$  wie im Beweis von Proposition 2.2.11 als normierten und dann als metrischen Raum. Nach 2.2.5 trägt  $\Delta(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}E$  die Teilmentopologie und ist somit ein kompakter metrischer Raum. Nach dem Überdeckungssatz von Lebesgue [Sch20, Satz 2.7.18] gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , so dass für jedes  $y \in \Delta(\mathcal{K})$  eine Ecke  $z$  von  $\mathcal{L}$  mit  $B_\varepsilon(y) \subset f^{-1}(\text{St}(z))$  existiert.

Nach Lemma 4.3.13 (und weil  $\mathcal{K}$  endlich ist) gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass jeder volle Simplex der  $n$ -fachen baryzentrischen Unterteilung  $\Delta(B^n\mathcal{K})$  Durchmesser  $< \varepsilon$  hat – wir identifizieren hier und im Folgenden  $\Delta(B^n\mathcal{K}) = \Delta(\mathcal{K})$  entlang des Homöomorphismus  $u^n$ .

Für jede Ecke  $e$  von  $B^n\mathcal{K}$  gibt es dann eine Ecke  $\varphi(e)$  von  $\mathcal{L}$  mit  $\text{St}(e) = \bigsqcup_{\tau \in B^n\mathcal{K}} \Delta(\tau)' \subset B_\varepsilon(e) \subset f^{-1}(\text{St}(\varphi(e)))$ , also

$$(4.13.2) \quad f(\text{St}(e)) \subset \text{St}(\varphi(e)).$$

Wir erhalten so eine Abbildung  $\varphi$  von der Eckenmenge von  $B^n\mathcal{K}$  in die Eckenmenge von  $\mathcal{L}$ .

Wir behaupten, dass diese Abbildung einen Morphismus von Simplicialkomplexen  $B^n\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  definiert und sogar eine simpliziale Approximation ist.

Für jedes  $x \in \Delta(B^n\mathcal{K})$  behaupten wir

$$(4.13.3) \quad \varphi(\text{Supp}(x)) \subset \text{Supp}(f(x)).$$

In der Tat, sei  $e$  eine Ecke von  $B^n\mathcal{K}$  mit  $e \in \text{Supp}(x)$ . Nach 4.13.6 ist dies äquivalent zu  $x \in \text{St}(e)$ . Wegen (4.13.2) folgt daraus  $f(x) \in \text{St}(\varphi(e))$ , was wieder wegen 4.13.6 zu  $\varphi(e) \in \text{Supp}(f(x))$  äquivalent ist.

<sup>87</sup>Allgemeiner zeigt dieser Beweis: Gegeben zwei stetige Abbildungen  $f, g: \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{L})$  mit der Eigenschaft, dass für jedes  $x \in \Delta(\mathcal{K})$  die Elemente  $f(x)$  und  $g(x)$  in einem geeigneten  $\Delta(\sigma_x)$  liegen, ist das Analogon der obigen Abbildung eine stetige Homotopie.

Da jeder Simplex  $\sigma \in B^n\mathcal{K}$  die Gestalt  $\sigma = \text{Supp}(x)$  für ein geeignetes  $x \in \Delta(B^n\mathcal{K})$  hat (genauer ist dies der Fall für alle Elemente  $x$  des offenen Simplex  $\Delta(\sigma)'$ ), folgt

$$\varphi(\sigma) = \varphi(\text{Supp}(x)) \subset \text{Supp}(f(x)) \in \mathcal{L}.$$

Dies zeigt, dass  $\varphi$  einen Morphismus  $\varphi: B^n\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  von Simplicialkomplexen definiert.

Sei nun  $x \in B^n\mathcal{K}$ . Dann gilt  $x = \sum_{e \in \text{Supp}(x)} t_e e$  für eindeutige  $t_e > 0$  mit  $\sum t_e = 1$ . Nach Definition von  $\Delta(\varphi)$  in Lemma 2.3.6 gilt

$$(\Delta(\varphi))(x) = \sum_{e \in \text{Supp}(x)} t_e \varphi(e) \stackrel{(4.13.3)}{\in} \underbrace{\Delta(\text{Supp}(f(x)))}_{\in \mathcal{L}} \ni f(x) = f(u^n(x)).$$

Dies zeigt, dass  $\varphi$  eine simpliciale Approximation ist. □

#### 4.14. Lefschetz'scher Fixpunktsatz.

**Definition 4.14.1.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine stetige Selbstabbildung eines topologischen Raums und sei  $k$  ein Körper. Ist  $H(X; k)$  beschränkt und besteht aus endlichdimensionalen  $k$ -Vektorräumen, so heißt die Super-Spur

$$\Lambda_{f,k} := \text{str}(H(f)|H(X; k)) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q \text{tr}(H_q(f)|H_q(X; k)) \in \mathbb{Z}$$

**Lefschetz-Zahl von  $f$  (bezüglich Koeffizienten in  $k$ ).** Erwähnt man keinen Körper, so ist mit der **Lefschetz-Zahl**  $\Lambda_f := \Lambda_{f, \mathbb{Q}}$  gemeint.

**Ausblick 4.14.2.** Ist für jedes  $n$  die abelsche Gruppe  $H_n(X)$  endlich erzeugbar und verschwinden alle bis auf endlich viele der  $H_n(X)$ , so hängt die Lefschetz-Zahl fast gar nicht vom Körper ab und „ist über  $\mathbb{Z}$  definiert“, siehe Proposition ???. Diese Voraussetzung wird vermutlich in (fast?) allen unserer Beispiele erfüllt sein. **Insofern wäre es didaktisch vielleicht besser, zuerst nur  $\Lambda_{f, \mathbb{Q}}$  zu definieren.**

**4.14.3.** Homotope stetige Selbstabbildungen  $X \xrightarrow[f]{g} X$  haben dieselbe Lefschetz-Zahl bezüglich jedem Körper  $k$ , in Formeln  $\Lambda_{f,k} = \Lambda_{g,k}$ , falls eine dieser Zahlen wohldefiniert ist; dies ist eine offensichtliche Konsequenz der Homotopie-Invarianz der singulären Homologie 3.3.1.

**4.14.4.** Die Lefschetz-Zahl der Identität ist die Euler-Charakteristik, in Formeln  $\Lambda_{\text{id}_X, k} = \chi(X; k)$ , falls letztere wohldefiniert ist, denn

$$\Lambda_{\text{id}_X, k} = \text{str}(H(\text{id}_X)) = \text{str}(\text{id}_{H(X; k)}) \stackrel{(4.10.1)}{=} \chi(H(X; k)) \stackrel{(4.9.3)}{=} \chi(X).$$

**4.14.5.** Ist  $X$  ein kompakter, triangulierbarer topologischer Raum (oder homotopieäquivalent zu einem solchen), so ist die Lefschetz-Zahl  $\Lambda_{f,k}$  für jede stetige Selbstabbildung  $f: X \rightarrow X$  und jeden Körper  $k$  nach 4.9.3 wohldefiniert (und hängt nach Proposition ??? fast gar nicht vom Körper ab – diese Proposition ist wegen Korollar 4.8.16 anwendbar).

**4.14.6.** Sei  $k$  ein Körper. Sei ein kommutatives Diagramm

$$(4.14.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ v \downarrow & & v \downarrow \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

topologischer Räume gegeben. Wir nehmen an, dass  $v$  ein Homöomorphismus ist (oder dass allgemeiner  $v$  eine Homotopieäquivalenz ist oder dass noch allgemeiner alle  $H_q(v): H_q(X; k) \rightarrow H_q(Y; k)$  Isomorphismen sind). Ist eine der Lefschetz-Zahlen  $\Lambda_{f,k}, \Lambda_{g,k}$  wohldefiniert, so ist auch die andere wohldefiniert und diese beiden Lefschetz-Zahlen stimmen überein, in Formeln

$$\Lambda_{f,k} = \Lambda_{g,k}.$$

Der Beweis ist offensichtlich: Nach Voraussetzung sind alle  $H_q(v)$  Isomorphismen (Homotopie-Invarianz der singulären Homologie, Satz 3.3.1), so dass mit  $H(X; k)$  bzw.  $H(Y; k)$  auch  $H(Y; k)$  bzw.  $H(X; k)$  beschränkt ist und endlichdimensionale Komponenten hat. Also sind beide Lefschetz-Zahlen wohldefiniert, sofern eine dies

ist. Da die Spur „invariant unter zyklischen Vertauschungen ist“ gilt  $\text{tr}(H_q(f)) = \text{tr}(H_q(v)^{-1} \circ H_q(g) \circ H_q(v)) = \text{tr}(H_q(g))$ , was sofort  $\Lambda_{f,k} = \Lambda_{g,k}$  liefert. (Wer will, kann auch direkt Aufgabe 4.10.9.(b) verwenden.)

**Satz 4.14.7** (Fixpunktsatz von Lefschetz<sup>88</sup>). *Sei  $f: X \rightarrow X$  eine stetige Selbstabbildung eines kompakten, triangulierbaren topologischen Raums  $X$ . Ist die (nach 4.14.5 wohldefinierte) Lefschetz-Zahl von  $f$  bezüglich Koeffizienten in einem Körper  $k$  von Null verschieden, in Formeln  $\Lambda_{f,k} \neq 0$ ,<sup>89</sup> so hat  $f$  einen Fixpunkt.*

**4.14.8.** Ich finde es sehr bemerkenswert, dass die Theorie der singulären Homologie manchmal (= wenn die Lefschetz-Zahl nicht verschwindet) eine so naheliegende Frage wie die nach der Existenz eines Fixpunktes beantworten kann. Allgemein ist es immer eine gute Eigenschaft einer mathematischen Theorie, wenn sie interessante Fragen beantworten kann, die man zuvor hatte (deren Formulierung also nicht das neue Vokabular benötigt).

**4.14.9.** Die umgekehrte Implikation in Satz 4.14.7 ist nicht richtig: Ist  $X$  ein nicht-leerer, kompakter, triangulierbarer topologischer Raum mit (wohldefinierter) Euler-Charakteristik  $\chi(X; k) = 0$  für alle Körper  $k$ , etwa  $X = \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \mathbb{S}^5, \dots$  oder  $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  (Beispiel 4.9.7 und Ausblick 4.9.6), so verschwindet die Lefschetz-Zahl  $\Lambda_{\text{id}_X, k} = \chi(X; k)$  der Identität  $\text{id}_X$  (siehe 4.14.4), aber alle Elemente von  $X$  sind Fixpunkte.

Auch die Voraussetzung, dass  $X$  kompakt ist, ist unverzichtbar: Beispielsweise ist  $X = \mathbb{R}^2$  triangulierbar (Beispiel 2.2.19.(a)), aber für jeden Vektor  $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  hat die Translation  $f = (+v): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto x + v$ , keinen Fixpunkt, obwohl  $\Lambda_{f,k} = \text{str}(H(f)|H(\mathbb{R}^2; k)) = \text{tr}(\text{id}|k) = 1 \neq 0$  gilt.

*Beweis.* Wir können ohne Einschränkung<sup>90</sup> annehmen, dass  $X = \Delta(\mathcal{K})$  gilt, wobei  $\mathcal{K}$  ein endlicher Simplicialkomplex ist (vgl. 2.2.18).

Wir nehmen an, dass  $f$  keinen Fixpunkt hat, und zeigen  $\Lambda_{f,k} = 0$ , wobei  $k$  ein beliebiger Körper ist. Sei  $E$  die endliche Eckenmenge von  $\mathcal{K}$ . Betrachte  $\mathbb{R}E$  wie im Beweis von Proposition 2.2.11 als normierten und dann als metrischen Raum mit Metrix  $d$ . Nach 2.2.5 trägt  $X \subset \mathbb{R}E$  die Teilmengentopologie. Insbesondere ist die Metrik  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  stetig. Somit ist  $X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto d(x, f(x))$ , eine stetige Funktion auf einem Kompaktum und nimmt somit ihr Minimum  $a$  an. Da  $f$  keinen Fixpunkt hat, gilt  $a > 0$ .

Weil  $\mathcal{K}$  endlich ist zeigt Lemma 4.3.13, dass es ein  $m \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle Simplex  $\mu$  der  $m$ -fachen baryzentrischen Unterteilung  $\mathcal{K}' := B^m \mathcal{K}$

$$\text{diam}(\Delta(\mu)) < \frac{a}{2}$$

gilt; hier und identifizieren wir  $\Delta(\mathcal{K}') = \Delta(\mathcal{K}) = X$  entlang  $u^m: \Delta(\mathcal{K}') \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$  und verwenden die oben eingeführte Metrik  $d$  für die Definition des Durchmessers. Im folgenden identifizieren wir weiterhin  $X = \Delta(\mathcal{K}')$  (der Simplicialkomplex  $\mathcal{K}$  wird nicht weiter verwendet).

Sei nun  $\varphi: B^n \mathcal{K}' \rightarrow \mathcal{K}'$  eine simpliciale Approximation an  $f: X = \Delta(\mathcal{K}') \rightarrow X = \Delta(\mathcal{K}')$ , für ein geeignetes  $n \in \mathbb{N}$  (sie existiert nach Satz 4.13.8).

**Behauptung A:** Für alle Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}'$  und alle Simplex  $\tau \in B^n \sigma \subset B^n \mathcal{K}'$  der  $n$ -fachen baryzentrischen Unterteilung von  $\sigma$  gilt  $\varphi(\tau) \not\subset \sigma$ .

Sei  $x \in \Delta(\tau)'$ , also  $\text{Supp}(x) = \tau$ . Daraus folgt  $\text{Supp}((\Delta(\varphi))(x)) = \varphi(\tau)$  nach Definition von  $\Delta(\varphi)$  in Lemma 2.3.6, d. h.  $\Delta(\varphi)(x) \in \Delta(\varphi(\tau))$ . Da  $\varphi$  eine simpliciale Approximation an  $f$  ist, gibt es einen Simplex  $\mu \in \mathcal{K}'$  mit  $(\Delta(\varphi))(x), f(x) \in \Delta(\mu)$ . Insbesondere gilt  $\varphi(\tau) = \text{Supp}((\Delta(\varphi))(x)) \subset \mu$ , also  $\Delta(\varphi(\tau)) \subset \Delta(\mu)$ .

<sup>88</sup>Die hier gegebene Version wird in der Literatur manchmal als Fixpunktsatz von Lefschetz bezeichnet (etwa Hatcher, deutsche Wikipedia), manchmal als eine einfache Version (englische Wikipedia) oder als eine erste Annäherung (Soergel) an diesen.

<sup>89</sup>Nach Proposition ?? ist dies genau dann der Fall, wenn  $\Lambda_{f, \mathbb{Q}} \neq 0$  gilt.

<sup>90</sup>Sei  $v: X \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K})$  ein Isomorphismus. Setze  $g := v \circ f \circ v^{-1}$ . Dann ist

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow v & & \downarrow v \\ \Delta(\mathcal{K}) & \xrightarrow{g} & \Delta(\mathcal{K}) \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm. Nach 4.14.6 gilt  $\Lambda_{f,k} = \Lambda_{g,k}$ . Außerdem induziert  $v$  eine Bijektion zwischen der Menge  $X^f := \{x \in X \mid f(x) = x\}$  der Fixpunkte von  $f$  und der Menge  $Y^g$  der Fixpunkte von  $g$  (dies ist eine rein mengentheoretische Aussage). Somit ist die Aussage  $\Lambda_{f,k} \neq 0 \implies X^f \neq \emptyset$  äquivalent zur Aussage  $\Lambda_{g,k} \neq 0 \implies Y^g \neq \emptyset$ .

Da  $\tau$  in der baryzentrischen Unterteilung von  $\sigma$  liegt, gilt  $x \in \Delta(\tau)' \subset \Delta(\tau) \subset \Delta(\sigma)$  (wobei bei der letzten Inklusion der Homöomorphismus  $\Delta(\mathcal{B}^n \mathcal{K}') \xrightarrow[u^n]{\sim} \Delta(\mathcal{K}')$  als Gleichheit aufgefasst wird). Nehmen wir nun  $\varphi(\tau) \subset \sigma$  an, so folgt

- $x, \Delta(\varphi)(x) \in \Delta(\sigma)$  und es gilt eh
- $\Delta(\varphi)(x), f(x) \in \Delta(\mu)$ .

Somit erhalten wir (wegen  $\sigma, \mu \in \mathcal{K}'$ )

$$d(x, f(x)) \leq d(x, \Delta(\varphi)(x)) + d(\Delta(\varphi)(x), f(x)) \leq \text{diam}(\Delta(\sigma)) + \text{diam}(\Delta(\mu)) < a$$

im Widerspruch zur Definition von  $a$ . Dies zeigt Behauptung A.

Betrachte das Diagramm (der roten Pfeil ist zunächst zu ignorieren)

$$\begin{array}{ccccc}
S(X; k) & \xrightarrow{f} & S(X; k) & \xrightarrow{U^n} & S(X; k) \\
\uparrow \sim & \boxtimes & \parallel & & \uparrow \sim \\
S(\Delta(\mathcal{B}^n \mathcal{K}'); k) & \xrightarrow{S(\Delta(\varphi))} & S(\Delta(\mathcal{K}'); k) & & S(\Delta(\mathcal{B}^n \mathcal{K}'); k) \\
\uparrow \Psi_{\mathcal{B}^n \mathcal{K}'} & & \uparrow \Psi_{\mathcal{K}'} & & \uparrow \Psi_{\mathcal{B}^n \mathcal{K}'} \\
k(\mathcal{B}^n \mathcal{K}')^{\text{bel}} & \xrightarrow{k(\varphi)^{\text{bel}}} & k\mathcal{K}'^{\text{bel}} & \xrightarrow{V^n} & k(\mathcal{B}^n \mathcal{K}')^{\text{bel}} \\
\downarrow \Phi_{\mathcal{B}^n \mathcal{K}'} & & \downarrow \Phi_{\mathcal{K}'} & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}^n \mathcal{K}'} \\
S(\mathcal{B}^n \mathcal{K}'; k) & \xrightarrow{S(\varphi)} & S(\mathcal{K}'; k) & \xrightarrow{V^n} & S(\mathcal{B}^n \mathcal{K}'; k).
\end{array}$$

Der Isomorphismus  $S(u^n)$  kommt vom Homöomorphismus  $u^n: \Delta(\mathcal{B}^n \mathcal{K}') \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{K}')$  aus Lemma 4.12.5. Die die unteren drei Zeilen verbindenden vertikalen Morphismen sind die Quasi-Isomorphismen aus Satz 4.8.18 (oder genauer aus Proposition 4.8.5 und Proposition 4.8.8), wobei wir hier Koeffizienten in  $k$  statt in  $\mathbb{Z}$  verwenden (wofür diese Resultate analog gelten). Links sind die beiden unteren Quadrate kommutativ, da  $\Psi$  und  $\Phi$  natürlich sind (siehe Aufgabe 4.8.6 und 4.8.10). Das mit  $\boxtimes$  markierte Quadrat kommutiert im Allgemeinen nicht. Die horizontale Abbildung  $U^n$  rechts oben ist die  $n$ -fache Iteration des Unterteilungsoperators  $U$  (4.3.3).

Die roten Abbildungen  $V^n$  sind  $n$ -fache Iterationen des „kombinatorischen Unterteilungsoperators“,  $V$ , der in 4.14.10 erklärt werden; dort erklären wir auch, warum der rechte Teil des obigen Diagramms kommutativ ist. **Vielleicht ist dem Leser zumindest anschaulich klar/plausibel, dass  $U^n$  die Abbildungen  $V^n$  eindeutig induziert, so dass der rechte Teil unseres Diagramms kommutiert.**

Anwenden des Funktors totale Homologie  $H(-): \text{Kom}(k) \rightarrow \text{Mod}(k)$  liefert das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
H(X; k) & \xrightarrow{H(f)} & H(X; k) & \xrightarrow{H(U^n)=\text{id}} & H(X; k) \\
\uparrow \sim & & \parallel & & \uparrow \sim \\
H(\Delta(\mathcal{B}^n \mathcal{K}'); k) & \xrightarrow{H(\Delta(\varphi))} & H(\Delta(\mathcal{K}'); k) & & H(\Delta(\mathcal{B}^n \mathcal{K}'); k) \\
\uparrow \sim & & \uparrow \sim & & \uparrow \sim \\
H(k(\mathcal{B}^n \mathcal{K}')^{\text{bel}}) & \xrightarrow{H(k(\varphi)^{\text{bel}})} & H(k\mathcal{K}'^{\text{bel}}) & \xrightarrow{H(V^n)} & H(k(\mathcal{B}^n \mathcal{K}')^{\text{bel}}) \\
\downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
H(\mathcal{B}^n \mathcal{K}'; k) & \xrightarrow{H(\varphi)} & H(\mathcal{K}'; k) & \xrightarrow{H(V^n)} & H(\mathcal{B}^n \mathcal{K}'; k).
\end{array}$$

Dieses Diagramm, also insbesondere sein Quadrat links oben, ist kommutativ, da  $f \circ u^n$  und  $\Delta(\varphi)$  homotop sind (Proposition 4.13.3) und somit dieselbe Abbildung auf der Homologie induzieren (Homotopie-Invarianz der singulären Homologie, Satz 3.3.1). Die Gleichheit  $H(U^n) = \text{id}$  am horizontalen Pfeil rechts oben gilt nach Lemma 4.3.8. Da alle Vertikalen Pfeile Isomorphismen sind und  $H(X; k)$  eine beschränkte Familie

endlichdimensionaler Vektorräume ist, sind auch alle anderen Objekte in diesem Diagramm beschränkte Familien endlichdimensionaler Vektorräume. Wir behaupten die Gleichheiten

$$\Lambda_{f,k} = \text{str}(H(f)) = \text{str}(H(V^n) \circ H(\varphi)) = \text{str}(H(V^n \circ S(\varphi))) = \text{str}(V^n \circ S(\varphi)).$$

Die zweite Gleichheit folgt aus Aufgabe 4.10.9.(b), die letzte ist die Hopfsche Spurformel (Lemma 4.10.8) – diese ist anwendbar, denn  $S(B^n\mathcal{K}; k)$  ist <sup>91</sup> ein beschränkter Komplex endlichdimensionaler Vektorräume, da mit  $\mathcal{K}$  und  $\mathcal{K}'$  auch  $B^n\mathcal{K}'$  endlich ist (verwende 2.4.22). Die anderen Gleichheiten sind offensichtlich.

Wir erinnern daran, dass  $\Lambda_{f,k} = 0$  zu zeigen ist, oder nun äquivalent  $\text{str}(V^n \circ S(\varphi)) = 0$ . Wir zeigen nun genauer sogar, dass für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  die Spur von

$$(V^n \circ S(\varphi))_q: S_q(B^n\mathcal{K}'; k) \rightarrow S_q(B^n\mathcal{K}'; k)$$

verschwindet.

Fixiere wie in 2.4.22 für jeden  $q$ -Simplex  $\tau \in (B^n\mathcal{K}')_q$  ein  $(q+1)$ -Tupel  $\vec{\tau} = (\tau_0, \dots, \tau_q)$  von Ecken von  $B^n\mathcal{K}'$  mit  $\tau = \{\tau_0, \dots, \tau_q\}$ . Dann ist  $(\vec{\tau})_{\tau \in (B^n\mathcal{K}')_q}$  eine  $k$ -Basis von  $S_q(B^n\mathcal{K}')_q$ .

Sei  $\tau \in (B^n\mathcal{K}')_q$  ein  $q$ -Simplex. Es genügt zu zeigen, dass der Koeffizient bei  $\vec{\tau}$  in  $V^n(S(\varphi)(\vec{\tau}))$  Null ist. Es gibt einen Simplex  $\sigma \in \mathcal{K}'$  mit  $\tau \in B^n\sigma \subset B^n\mathcal{K}'$ .<sup>92</sup> Nach Definition in Aufgabe 2.4.27 gilt

$$S(\varphi)(\vec{\tau}) = \begin{cases} \pm \overrightarrow{\varphi(\tau)} & \text{falls } \varphi(\tau) \in \mathcal{K}'_q; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Was unsere Koeffizientenbestimmung angeht, reicht es also, den Fall  $\varphi(\tau) \in \mathcal{K}'_q$  zu betrachten. Dann ist  $V^n(S(\varphi)(\vec{\tau})) = \pm V^n(\overrightarrow{\varphi(\tau)})$  eine  $\{\pm 1\}$ -Linearkombination mit Pfeilen versehenen  $q$ -Simplizes von  $B^n\varphi(\tau) = (B^n\varphi(\tau))_{\leq q}$ . Wenn dabei  $\pm \vec{\tau}$  vorkommt, so gilt  $\tau \in B^n\varphi(\tau)$  und  $\varphi(\tau)$  ist das kleinste aller Elemente  $\kappa \in \mathcal{K}'$  mit  $\tau \in B^n\kappa$ .<sup>93</sup> Wegen  $\tau \in B^n\sigma$  folgt  $\varphi(\tau) \subset \sigma$  im Widerspruch zu Behauptung A. Dies zeigt wie gewünscht, dass der Koeffizient bei  $\vec{\tau}$  verschwindet.  $\square$

Ende der 18. Vorlesung am 08.01.2021.

Hausaufgaben:

- (1) Aufgabe 4.11.4 (Anwendung des simplizialen Fixpunktsatzes)
- (2) Aufgabe 4.12.6 (Isotransformation  $u: \Delta B \xrightarrow{\cong} \Delta$ )
- (3) Aufgabe 4.13.2 (finde simpliziale Approximationen)
- (4) Aufgabe 4.14.12 (Fixpunktsatz von Lefschetz impliziert den von Brouwer)

**4.14.10.** Sei  $\mathcal{K}$  ein Simplizialkomplex. Unser Ziel ist einerseits die Definition eines Morphismus **kombinatorischer Unterteilungsoperator**

$$V = V_{\mathcal{K}}: \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} \rightarrow \mathbb{Z}(B\mathcal{K})^{\text{bel}},$$

<sup>91</sup>im Gegensatz zu  $k(B^n\mathcal{K}')^{\text{bel}}$

<sup>92</sup>Das scheint mir klar; im Fall  $n = 1$  mag man sich davon in Beispiel 4.12.2 überzeugen: Gilt etwa  $\tau = (\bar{a} \subsetneq \bar{ab}) = (\{a\}, \{a, b\}) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ , so kann man  $\sigma = \{a, b\}$  oder  $\sigma = \{a, b, c\}$  nehmen. Gilt etwa  $\tau = (\bar{a} \subsetneq \bar{abc}) = (\{a\}, \{a, b, c\}) = \{\{a\}, \{a, b, c\}\}$ , so muss man  $\sigma = \{a, b, c\}$  nehmen. Ein mögliches (und wohl das kleinstmögliche, vgl. nächste Fussnote)  $\sigma$  ist also die Vereinigung über die Elemente von  $\tau$ . Im Fall  $n > 1$  muss man eben  $n$ -fach vereinigen...

<sup>93</sup>Das scheint mir wieder ziemlich klar: Sicherlich gibt es so ein kleinstes Element (Schnitt über alle, die die gesuchte Bedingung erfüllen). Andererseits muss dieses kleinste Element im Fall  $n = 1$  die Vereinigung aller Elemente von  $\tau$  enthalten, vgl. vorige Fussnote; da  $\tau$  aus  $q+1$  Elementen besteht, muss diese Vereinigung ganz  $\varphi(\tau)$  sein. Im Fall  $n > 1$  muss man wieder  $n$ -fach vereinigen.

von Komplexen abelscher Gruppen; andererseits wollen wir ein kommutatives Diagramm

(4.14.2)

$$\begin{array}{ccc}
 & & S(\Delta(\mathcal{K})) \\
 & \nearrow U & \uparrow S(u) \sim \\
 S(\Delta(\mathcal{K})) & & S(\Delta(B\mathcal{K})) \\
 \Psi_{\mathcal{K}} \uparrow & & \Psi_{B\mathcal{K}} \uparrow \\
 \mathbb{Z}\mathcal{K}^{\text{bel}} & \xrightarrow{V} & \mathbb{Z}(B\mathcal{K})^{\text{bel}} \\
 \Phi_{\mathcal{K}} \downarrow & & \Phi_{B\mathcal{K}} \downarrow \\
 S(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\exists! V} & S(B\mathcal{K})
 \end{array}$$

etablieren (das die Kompatibilität von  $V$  und dem „singulären Unterteilungsoperator“  $U$  erklärt); der untere horizontale Morphismus  $V$  ist dabei eindeutig durch den mittleren Morphismus  $V$  induziert. All diese Konstruktionen werden natürlich in  $\mathcal{K}$  sein. Wir arbeiten hier mit Koeffizienten in  $\mathbb{Z}$  (alles geht aber genauso mit Koeffizienten in einem Körper  $k$  oder gar einem beliebigen  $R$ -Modul  $M$ ).

Wir folgen im Wesentlichen der Definition 4.3.5 der Unterteilungsoperatoren  $U_q$ , jedoch ersetzen wir die Kategorie  $\text{Top}$  durch die Kategorie  $\text{SimpKomp}$  der Simplicialkomplexe. Als Analogon zum Standardsimplex  $\Delta_q \in \text{Top}$  sei  $\blacktriangle_q \in \text{SimpKomp}$  der maximale Simplicialkomplex mit Eckenmenge  $\{0, 1, \dots, q\}$ . Ist  $\mathcal{K}$  ein Simplicialkomplex, so gilt

$$\text{SimpKomp}(\blacktriangle_q, \mathcal{K}) = \mathcal{K}_q^{\text{bel}}$$

und somit

$$\mathbb{Z} \text{SimpKomp}(\blacktriangle_q, \mathcal{K}) = \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{bel}}$$

(vgl.  $S_q X = \mathbb{Z} \text{Top}(\Delta_q, X)$  in Definition 3.1.4) oder als Gleichheit von Funktoren

$$\mathbb{Z}(-)_q^{\text{bel}} = \mathbb{Z} \text{SimpKomp}(\blacktriangle_q, -): \text{SimpKomp} \rightarrow \text{Ab}.$$

Wir können somit (den Beweis von) Lemma 4.3.3 anpassen (ersetze etwa  $\text{Top}$  und  $\Delta_q$  in Diagramm (4.3.1) durch  $\text{SimpKomp}$  und  $\blacktriangle_q$ ) und erhalten: Für alle  $q \in \mathbb{N}$  und alle Funktoren  $G: \text{SimpKomp} \rightarrow \text{Ab} = \text{Mod}(\mathbb{Z})$  (alias Objekte  $G \in \text{Ab}^{\text{SimpKomp}}$ ) ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
 (4.14.3) \quad \text{Ab}^{\text{SimpKomp}}(\mathbb{Z}(-)_q^{\text{bel}}, G) &\xrightarrow{\sim} G(\blacktriangle_q), \\
 \tau &\mapsto \tau_{\Delta_q}(\text{id}_{\Delta_q}) = \tau(\text{id}_{\blacktriangle_q}),
 \end{aligned}$$

eine Bijektion.

Wir passen nun Definition 4.3.5 an und definieren natürliche Transformationen

$$V_q: \mathbb{Z}(-)_q^{\text{bel}} \Rightarrow \mathbb{Z}(B-)_q^{\text{bel}}: \text{SimpKomp} \rightarrow \text{Ab}$$

für alle  $q \in \mathbb{Z}$  und nennen diese (**kombinatorische baryzentrische**) **Unterteilungsoperatoren**. Für  $q < 0$  setze  $V_q := 0$  (einzige Möglichkeit). Um die Transformationen  $V_q$  für  $q \geq 0$  zu definieren, genügt es nach der „Yoneda-Bijektion“ (4.14.3), die Werte  $(V_q)_{\blacktriangle_q}(\text{id}_{\blacktriangle_q}) \in \mathbb{Z}(B\blacktriangle_q)_q^{\text{bel}}$  auf  $\text{id}_{\blacktriangle_q} = (0, 1, \dots, q) \in \mathbb{Z}(\blacktriangle_q)_q^{\text{bel}}$  vorzugeben. Wir definieren  $V_0$  durch<sup>94</sup>

$$(V_0)_{\blacktriangle_0}(\text{id}_{\blacktriangle_0}) = (V_0)_{\blacktriangle_0}((0)) := (\{0\}) \in \mathbb{Z}(B\blacktriangle_0)_0^{\text{bel}}$$

<sup>94</sup>Das sieht seltsam aus, aber meiner Meinung nach hat  $\blacktriangle_0 = (\{0\}, \{\{0\}\})$  als baryzentrische Unterteilung  $B\blacktriangle_0 = (\{\{0\}\}, \{\{\{0\}\}\})$ . Konkret bedeutet diese Definition, dass  $V_0$  auf einem Simplicialkomplex  $\mathcal{K} = (E, \mathcal{K})$  ausgewertet die Abbildung

$$\begin{aligned}
 (V_0)_{\mathcal{K}}: \mathbb{Z}(\mathcal{K})_0^{\text{bel}} &\rightarrow \mathbb{Z}(B\mathcal{K})_0^{\text{bel}}, \\
 (e) &\mapsto (\{e\}),
 \end{aligned}$$

ist.

Induktiv definieren wir  $V_q$  durch

$$(4.14.4) \quad (V_q)_{\blacktriangle_q}(\text{id}_{\blacktriangle_q}) := P_{q-1} \left( \underbrace{(V_{q-1})_{\blacktriangle_q} \left( \overbrace{\partial(\text{id}_{\blacktriangle_q})}^{\sum_{(0, \dots, \widehat{i}, \dots, q) \in \mathbb{Z}(\blacktriangle_q)_{q-1}^{\text{bel}}} (-1)^i} \right)}_{\sum_{(s_0, \dots, s_{q-1}) \in \mathbb{Z}(\mathcal{K}_q)_{q-1}^{\text{bel}}} (-1)^i \mathbb{Z}(\mathcal{K}_q)_{q-1}^{\text{bel}}((V_{q-1})_{\blacktriangle_{q-1}}(\text{id}_{\blacktriangle_{q-1}}))} \right) \in \mathbb{Z}(\mathbb{B}\blacktriangle_q)_q^{\text{bel}},$$

wobei der „kombinatorische Prismenoperator“  $P_{q-1}$  wie folgt durch „Vornedranschreiben der (den Schwerpunkt repräsentierenden) Ecke  $\{0, 1, \dots, q\}$  von  $\mathbb{B}\blacktriangle_q$ “ definiert ist:

$$P_{q-1}: \mathbb{Z}(\mathbb{B}\blacktriangle_q)_{q-1}^{\text{bel}} \rightarrow \mathbb{Z}(\mathbb{B}\blacktriangle_q)_q^{\text{bel}}, \\ (s_0, \dots, s_{q-1}) \mapsto (\{0, 1, \dots, q\}, s_0, \dots, s_{q-1}).$$

Zum besseren Verständnis einige Beispiele, vgl. auch Abbildung 3 (wo  $\frac{a+c}{2}$  kombinatorisch als  $\{a, c\}$  zu lesen ist etc.) und 4.3.6. Der Unterteilungsoperator  $V_0$  wurde bereits in der Fußnote erläutert. Der Unterteilungsoperator  $V_1$  ist durch

$$(4.14.5) \quad (V_1)_{\mathcal{K}}: \mathbb{Z}\mathcal{K}_1^{\text{bel}} \rightarrow \mathbb{Z}(\mathbb{B}\mathcal{K})_1^{\text{bel}}, \\ (a, b) \mapsto (\{a, b\}, \{b\}) - (\{a, b\}, \{a\}),$$

gegeben,  $V_2$  ist wie folgt gegeben.

$$(4.14.6) \quad (V_2)_{\mathcal{K}}: \mathbb{Z}\mathcal{K}_2^{\text{bel}} \rightarrow \mathbb{Z}(\mathbb{B}\mathcal{K})_2^{\text{bel}}, \\ (a, b, c) \mapsto (\{a, b, c\}, \{b, c\}, \{c\}) - (\{a, b, c\}, \{b, c\}, \{b\}) \\ - (\{a, b, c\}, \{a, c\}, \{c\}) + (\{a, b, c\}, \{a, c\}, \{a\}) \\ + (\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{b\}) - (\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a\}).$$

Der allgemeine Unterteilungsoperator  $V_q$  bildet ein  $\mathbb{Z}$ -Basisslement  $s = (s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{bel}}$  wie folgt ab:

$$(4.14.7) \quad s = (s_0, \dots, s_q) \mapsto \partial(s) = \sum (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \\ \mapsto V_{q-1}(\partial(s)) = \sum (-1)^i V_{q-1}(s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \\ \mapsto (S, \mathcal{V}_{q-1}(\partial(s))) = \sum (-1)^i (S, V_{q-1}(s_0, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_q)),$$

wobei bei der letzten Abbildung unsere ad hoc Notation andeuten soll, dass das Element  $S := \{s_0, \dots, s_1\}$  an jeden Summanden vorne drangeschrieben wird – dies ist sozusagen der Prismenoperator zu  $S$ , der aber von  $s$  abhängt (formal verwendet das die Umkehrabbildung von (4.14.3)).

Als nächster Schritt wäre eigentlich das Analogon zu Lemma 4.3.7 zu zeigen, dass also die  $(V_q)_{\mathcal{K}}$  mit den Differentialen kommutieren und somit einen Morphismus von Komplexen  $V_{\mathcal{K}}$  definieren<sup>95</sup>. Wir zeigen dies später indirekt.

Um das kommutatives Diagramm (4.14.8) zu etablieren, kümmern wir uns zuerst um seine  $q$ -te Komponente. Wir wollen also zeigen, dass es ein kommutatives Diagramm

$$(4.14.8) \quad \begin{array}{ccc} & & S_q(\Delta(\mathcal{K})) \\ & \nearrow U_q & \uparrow S_q(u) \sim \\ S_q(\Delta(\mathcal{K})) & & S_q(\Delta(\mathbb{B}\mathcal{K})) \\ \uparrow \Psi_{\mathcal{K}} & & \uparrow \Psi_{\mathbb{B}\mathcal{K}} \\ \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{bel}} & \xrightarrow{V_q} & \mathbb{Z}(\mathbb{B}\mathcal{K})_q^{\text{bel}} \\ \downarrow \Phi_{\mathcal{K}} & & \downarrow \Phi_{\mathbb{B}\mathcal{K}} \\ S_q(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\exists! V_q} & S_q(\mathbb{B}\mathcal{K}) \end{array}$$

<sup>95</sup>Das sollte analog gehen, sobald man ein Analogon von (3.1.9) für den kombinatorischen Prismenoperator gezeigt hat



etablieren, das wir hier noch einmal wiedergeben:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{bel}} & \xrightarrow{V_q} & \mathbb{Z}(\text{BK})_q^{\text{bel}} \\ \Phi_{\mathcal{K}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\text{BK}} \\ \mathbb{S}_q(\mathcal{K}) & \xrightarrow{\exists! V_q} & \mathbb{S}_q(\text{BK}) \end{array}$$

Nur die Existenz des gestrichelten  $V_q$  bleibt also zu zeigen (die Eindeutigkeit klar wegen der Surjektivität von  $\Phi_{\mathcal{K}}$ ). Dafür ist zu zeigen, dass die Verknüpfung  $\Phi_{\text{BK}} \circ V_q$  auf dem Kern von  $\Phi_{\mathcal{K}}$  verschwindet.

Sei  $U \subset \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}}$  der Kern von  $\mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}} \rightarrow \mathbb{S}_q\mathcal{K}$ , also der „Nenner“ von (2.4.6). Es gilt  $\mathcal{K}_q^{\text{ang}} \subset \mathcal{K}_q^{\text{bel}}$ . Sei  $\mathcal{K}_q^{\text{nicht inj.}} = \mathcal{K}_q^{\text{bel}} \setminus \mathcal{K}_q^{\text{ang}}$  das entsprechende Komplement. Aus der Definition von  $\Phi_{\mathcal{K}}$  in Proposition 4.8.5 folgen die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}} & \subset & \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{bel}} = \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{ang}} \oplus \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{nicht inj.}} \\ \downarrow & \swarrow \Phi_{\mathcal{K}} & \\ \mathbb{S}_q\mathcal{K} & & \end{array}$$

und die Gleichheit

$$\ker(\Phi_{\mathcal{K}}) = U \oplus \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{nicht inj.}}$$

Es reicht also zu zeigen, dass  $\Phi_{\text{BK}} \circ V_q$  auf allen Elementen von  $\mathcal{K}_q^{\text{nicht inj.}}$  verschwindet und auf allen Elementen der Form

$$(s_0, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_q) + (s_0, \dots, s_{i+1}, s_i, \dots, s_q)$$

(nur  $i$ -ter und  $j$ -ter Eintrag vertauscht) für  $(s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{ang}}$  und alle  $i = 0, \dots, q-1$  (denn die Transpositionen benachbarter Elemente erzeugen die symmetrische Gruppe).

Sei  $s = (s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{nicht inj.}}$ . Dann existiert eine simpliziale Abbildung  $\varphi: \blacktriangle_{q-1} \rightarrow \mathcal{K}$  und eine Element  $t \in (\blacktriangle_{q-1})_q^{\text{bel}}$ , das unter

$$\mathbb{Z}(\blacktriangle_{q-1})_q^{\text{bel}} \xrightarrow{\mathbb{Z}(\varphi)_q^{\text{bel}}} \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{bel}}$$

auf  $s$  abgebildet wird. Da  $V_q$  und  $\Phi$  natürlich in Simplicialkomplexen sind, haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}(\blacktriangle_{q-1})_q^{\text{bel}} & \xrightarrow{V_q} & \mathbb{Z}(\text{B}(\blacktriangle_{q-1}))_q^{\text{bel}} & \xrightarrow{\Phi_{\text{B}(\blacktriangle_{q-1})}} & \mathbb{S}_q(\text{B}(\blacktriangle_{q-1})) \\ \downarrow \mathbb{Z}(\varphi)_q^{\text{bel}} & & \downarrow \mathbb{Z}(\text{B}\varphi)_q^{\text{bel}} & & \downarrow \mathbb{S}_q(\text{B}\varphi) \\ \mathbb{Z}\mathcal{K}_q^{\text{bel}} & \xrightarrow{V_q} & \mathbb{Z}(\text{BK})_q^{\text{bel}} & \xrightarrow{\Phi_{\text{BK}}} & \mathbb{S}_q(\text{BK}). \end{array}$$

Da  $\text{B}(\blacktriangle_{q-1})$  keine  $q$ -Simplizes hat, gilt  $\mathbb{S}_q(\text{B}(\blacktriangle_{q-1})) = 0$ . Somit verschwindet das Bild von  $s$  unter der unteren horizontalen Verknüpfung.

Nun betrachten wir Elemente der Form

$$(4.14.9) \quad (s_0, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_q) + (s_0, \dots, s_{i+1}, s_i, \dots, s_q)$$

für  $(s_0, \dots, s_q) \in \mathcal{K}_q^{\text{ang}}$  und  $i = 0, \dots, q-1$ . Wir behaupten, dass ein solches Element bereits unter  $V_q$  auf Null geht, und zeigen dies per Induktion über  $q$ . Für  $q \leq 0$  ist nichts zu zeigen. (Der Leser mag die Fälle  $q = 1, 2$  mit Hilfe von (4.14.5) und (4.14.6) überprüfen.) Gelte  $q \geq 1$ . Nach der Beschreibung (4.14.7) von  $V_q$  wird das obige Element (4.14.9) zunächst unter  $\partial$  auf

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0, \dots, i} (-1)^j \left( (s_0, \dots, \widehat{s}_j, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_q) + (s_0, \dots, \widehat{s}_j, \dots, s_{i+1}, s_i, \dots, s_q) \right) \\ & + \sum_{j=i+2, \dots, q} (-1)^j \left( (s_0, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, \widehat{s}_j, \dots, s_q) + (s_0, \dots, s_{i+1}, s_i, \dots, \widehat{s}_j, \dots, s_q) \right) \\ & + (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_i, s_{i+1}, \dots, s_q) + (-1)^{i+1} (s_0, \dots, s_i, \widehat{s}_{i+1}, \dots, s_q) \\ & + (-1)^i (s_0, \dots, \widehat{s}_{i+1}, s_i, \dots, s_q) + (-1)^{i+1} (s_0, \dots, s_{i+1}, \widehat{s}_i, \dots, s_q) \end{aligned}$$

abgebildet. Die letzten vier Summanden heben sich auf. Jeder der in den beiden oberen Summen vorkommende Summanden geht per Induktion unter  $V_{q-1}$  auf Null. Also geht das Element (4.14.9) unter  $V_q$  auf Null. Dies zeigt unsere Behauptung.

Dies zeigt die Existenz der gestrichelten Abbildung  $V_q$  in (4.14.8). Insgesamt zeigt dies alle Behauptungen über den Unterteilungsoperator  $V = (V_q)_q$ .

**Korollar 4.14.11.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine stetige Selbstabbildung eines kompakten, triangulierbaren wegzusammenhängenden topologischen Raums  $X$ . Gibt es einen Körper  $k$  mit  $H_q(X; k) = 0$  für alle  $q > 0$ , so hat  $f$  einen Fixpunkt.

*Beweis.* Nach 4.9.3 ist  $H_0(X; k)$  endlichdimensional und nach Annahme gilt  $\Lambda_{f,k} = \text{tr}(\text{tr}(H_0(f)|H_0(X; k)))$ . Da  $X$  wegzusammenhängend ist, gilt  $H_0(X; k) \xrightarrow{\sim} k\pi_0(X) \xrightarrow{\sim} k$  nach Lemma 3.1.24 (für  $k$  statt  $\mathbb{Z}$ ). Der dortige Isomorphismus ist natürlich in  $X$  (aber damals stand diese Terminologie nicht zur Verfügung), weshalb  $H_0(f) = \text{id}$  und daraus  $\Lambda_{f,k} = 1$  folgen. Der Fixpunktsatz von Lefschetz 4.14.7 liefert die Existenz eines Fixpunkts.  $\square$

**Aufgabe 4.14.12.** Der Brouwersche Fixpunktsatz 4.5.8 folgt aus dem Lefschetzschen Fixpunktsatz 4.14.7.

**Aufgabe 4.14.13.** Jede stetige Selbstabbildung der reell projektiven Ebene  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$  hat einen Fixpunkt.

**Aufgabe 4.14.14.** Sei  $f: X \rightarrow X$  eine stetige Selbstabbildung eines kompakten, triangulierbaren topologischen Raums  $X$ .

- (a) Ist  $f$  zu einer konstanten Selbstabbildung homotop, so hat  $f$  einen Fixpunkt.
- (b) Ist  $f$  zu  $\text{id}_X$  homotop und gilt  $\chi(X) \neq 0$ , so hat  $f$  einen Fixpunkt.

**Aufgabe 4.14.15.** Sei  $M$  eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit (wie in der Differentialgeometrie definiert). Sei  $V$  ein glattes (Tangential-)Vektorfeld auf  $M$ . Ein Satz der Differentialgeometrie bzw. der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen (siehe [Wik20, Satz von Picard-Lindelöf]) besagt, dass es ein  $\varepsilon > 0$  und eine differenzierbare Abbildung

$$F: M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

mit den folgenden Eigenschaften gibt (man kann sogar  $\varepsilon = +\infty$  annehmen):

- $F(-, 0) = \text{id}_M$ ;
- für jedes  $m \in M$  ist die Kurve  $\gamma_m := F(m, -): (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  differenzierbar und erfüllt  $(\gamma_m)'(s) = V(\gamma_m(s))$  für alle  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ; insbesondere gilt  $(\gamma_m)'(0) = V(m)$ .

Überdies gilt: Hat  $V$  keine Nullstelle, so gibt es ein  $\delta > 0$  mit  $F(m, t) \neq m$  für alle  $m \in M$  und  $t \in (-\delta, \delta)$ .

- (a) Gibt es ein Vektorfeld  $V$  ohne Nullstelle auf  $M$  und ist  $M$  triangulierbar, so gilt  $\chi(M; k) = 0$  für alle Körper  $k$ .

Bemerkung: Dies liefert insbesondere Korollar 4.15.14 (vgl. 4.15.13).

- (b) Welche kompakten Flächen besitzen ein nirgends verschwindendes Vektorfeld?

#### 4.15. Abbildungsgrad für Selbstabbildungen von Sphären samt Anwendungen. Vermutlich nicht in der aktuellen Vorlesung...

**Definition 4.15.1.** Sei  $n \geq 1$ . Sei  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine stetige Abbildung. Ihr **Abbildungsgrad** ist die eindeutige ganze Zahl

$$\text{deg}(f) \in \mathbb{Z},$$

mit

$$\text{deg}(f) \cdot \cdot = H_n(f): H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n).$$

Diese Definition ist sinnvoll, denn nach Satz 4.5.1 ist  $H_n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{Z}$  eine freie abelsche Gruppe vom Rang Eins und jeder Gruppenendomorphismus einer solchen abelschen Gruppe ist durch Multiplikation mit einer eindeutigen ganzen Zahl gegeben.

**Lemma 4.15.2** (Eigenschaften des Abbildungsgrades). Sei  $n \geq 1$ .

- (a) Die Abbildung

$$(4.15.1) \quad \text{deg}: \text{Top}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \rightarrow (\mathbb{Z}, \cdot)$$

ist ein Monoidmorphismus:

- $\deg(\text{id}_{\mathbb{S}^n}) = 1$ ;
  - Sind  $\mathbb{S}^n \xrightarrow{g} \mathbb{S}^n \xrightarrow{f}$  stetig, so gilt  $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$ .
- (b) Hat eine stetige Abbildung  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine stetige Ausdehnung  $D^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ , so gilt  $\deg(f) = 0$ .
- (c) Homotopie-Invarianz: Sind zwei stetige Abbildungen  $\mathbb{S}^n \xrightarrow[g]{f} \mathbb{S}^n$  homotop, so gilt  $\deg(f) = \deg(g)$ .  
(Der Monoidmorphismus (4.15.1) induziert somit einen Monoidmorphismus  $\deg: \text{hTop}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $[f] \mapsto \deg(f)$ .)

*Beweis.* Dies folgt aus der Funktorialität und der Homotopie-Invarianz von  $H_n: \text{Top} \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z})$  unter Verwendung von  $H_n(D^{n+1}) = 0$ .  $\square$

**Ausblick 4.15.3.** Der [Wik20, Satz von Hopf] von Hopf besagt insbesondere, dass der Abbildungsgrad eine Bijektion

$$\deg: \text{hTop}(\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

induziert. Wer mag, kann sich die Surjektivität überlegen. Insbesondere sind zwei stetige  $\mathbb{S}^n \xrightarrow[g]{f} \mathbb{S}^n$  genau dann homotop, wenn  $\deg(f) = \deg(g)$  gilt (vgl. Lemma 4.15.2.(c)).

**4.15.4.** Ist  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  ein Homöomorphismus, so ist  $\deg(f) \in \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$  eine Einheit von  $\mathbb{Z}$  (nach Lemma 4.15.2.(a)).

**Satz 4.15.5.** Sei  $n \geq 1$ . Betrachte die Antipodenabbildung  $a$  und die Spiegelung  $s$  an der Hyperebene  $\mathbb{R}^n \times 0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} a = a_{\mathbb{S}^n}: \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{S}^n, & s = s_{\mathbb{S}^n}: \mathbb{S}^n &\rightarrow \mathbb{S}^n, \\ x &\mapsto -x, & (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}). \end{aligned}$$

Dann gelten

$$\deg(a_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}, \quad \deg(s_{\mathbb{S}^n}) = -1.$$

**4.15.6.** Da  $a$  und  $s$  Involutionen sind, d. h.  $a^2 = \text{id}_{\mathbb{S}^n} = s^2$  erfüllen, gilt sicherlich  $\deg(a), \deg(s) \in \{\pm 1\}$ .

**4.15.7.** Aus  $\deg(s) = -1$  folgt sofort  $\deg(a) = (-1)^{n+1}$  (warum?); wir beweisen trotzdem beide Aussagen simultan.

*Beweis.* (per Mayer-Vietoris)<sup>96</sup> In gewisser Weise ist dies eine Fortsetzung des Beweises von Satz 4.5.1. Wie dort betrachten wir die offene Überdeckung von  $\mathbb{S}^n$  durch  $U = \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$  und  $V = \mathbb{S}^n \setminus \{-e_{n+1}\}$ .

Sei  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine stetige (nicht notwendig bijektive) Selbstabbildung mit  $f(U) \subset V$  und  $f(V) \subset U$ . (Sowohl  $a$  als auch  $s$  haben diese Eigenschaft.) Die Funktorialität der Mayer-Vietoris-Sequenz 4.4.1 liefert ein kommutatives Diagramm

(4.15.2)

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(U) \oplus H_n(V) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_n(j_U) & -H_n(j_V) \end{pmatrix}} & H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\delta_{U,V}} & H_{n-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_p(i_U) \\ H_p(i_V) \end{pmatrix}} & H_{n-1}(U) \oplus H_{n-1}(V) \\ \begin{pmatrix} H_n(f) & 0 \\ 0 & H_n(f) \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow H_n(f) & & \downarrow H_{n-1}(f) & & \downarrow \begin{pmatrix} H_{n-1}(f) & 0 \\ 0 & H_{n-1}(f) \end{pmatrix} \\ H_n(V) \oplus H_n(U) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_n(j_V) & -H_n(j_U) \end{pmatrix}} & H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\delta_{V,U}} & H_{n-1}(V \cap U) & \xrightarrow{\begin{pmatrix} H_p(i_V) \\ H_p(i_U) \end{pmatrix}} & H_{n-1}(V) \oplus H_{n-1}(U) \end{array}$$

<sup>96</sup>In [Mun84] werden drei Beweise für den Grad der Antipodenabbildung gegeben:

- Theorem 21.3 in *loc. cit.* simplizial per Spiegelung  $s$ .
- Theorem 22.6 per Lefschetzchem Fixpunktsatz 4.14.7 (eigentlich reicht der simpliziale Fixpunktsatz 4.11.1.(b)).
- Corollary 31.9. Davor wird in Theorem 31.8 der Grad der Spiegelung  $s$  ausgerechnet. Der Beweis dort ist wohl im wesentlichen der hier gegebene Beweis (den ich unabhängig gefunden habe). Jedoch spiegelt Munkres in der ersten Koordinate, was dann wirklich einen Induktionsbeweis für  $s$  ergibt. Spiegelt man in der letzten Koordinate, so kommt man für  $s$  ohne Induktion aus.

dessen erste Zeile die Mayer-Vietoris-Sequenz zu  $U, V$  ist und dessen zweite die zu  $V, U$  ist. Hier ist zu beachten, dass sich die beiden Randabbildungen unserer Mayer-Vietoris-Sequenzen um ein Vorzeichen unterscheiden, in Formeln  $\delta_{U,V} = -\delta_{V,U}$ , wie man dem Beweis von Satz 4.4.1 und der Definition des Verbindungsmorphismus in Satz B.3.4 entnimmt.

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass das Deformationsretrakt  $\mathbb{S}^{n-1} = \mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} \hookrightarrow U \cap V$  unter  $f$  invariant ist, also  $f(\mathbb{S}^{n-1}) \subset \mathbb{S}^{n-1}$  gilt (wie das für Antipodenabbildung  $a$  und Spiegelung  $s$  gilt). Damit können wir im obigen Diagramm  $U \cap V = V \cap U$  durch  $\mathbb{S}^{n-1}$  ersetzen (und  $i_U$  und  $i_V$  durch ihre Restriktionen auf  $\mathbb{S}^{n-1}$ ).

Für  $n \geq 2$  verschwinden die vier äußeren Terme unseres Diagramms und unser Diagramm schrumpft zu einem kommutativen Quadrat

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\sim]{\delta_{U,V}} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\ H_n(f) = \deg(f) \downarrow & & \downarrow H_{n-1}(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = \deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}) \\ H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow[\sim]{\delta_{V,U} = -\delta_{U,V}} & H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \end{array}$$

mit horizontalen Isomorphismen. Da die Vertikalen wie angedeutet durch Multiplikation mit dem jeweiligen Grad gegeben sind und die Horizontalen sich um ein Vorzeichen unterscheiden und Isomorphismen sind, folgt

$$\deg(f) = -\deg(f|_{\mathbb{S}^{n-1}}).$$

Konkret für  $f = a$  bzw.  $f = s$  ergeben sich

$$\deg(a_{\mathbb{S}^n}) = -\deg(a_{\mathbb{S}^n}|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = -\deg(a_{\mathbb{S}^{n-1}}), \quad \deg(s_{\mathbb{S}^n}) = -\deg(s_{\mathbb{S}^n}|_{\mathbb{S}^{n-1}}) = -\deg(\text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}) = -1.$$

<sup>97</sup> Per Induktion (jedenfalls für  $a$ ) genügt es, den Fall  $n = 1$  zu betrachten.

Gelte also  $n = 1$ . Dann stehen in beiden Zeilen des Diagramms 4.15.2 links Nullen und die Verbindungsmorphismen  $\delta_{U,V}$  und  $\delta_{V,U} = -\delta_{U,V}$  sind injektiv mit Bild  $\mathbb{Z}([-1] - [+1]) \subset \mathbb{Z}[-1] \oplus \mathbb{Z}[+1] = H_0(\mathbb{S}^0) = H_0(\{\pm 1\})$  (siehe Beweis von Satz 4.5.1). Wir erhalten das kommutative Quadrat

$$\begin{array}{ccccc} & & \delta_{U,V} & & \\ & \curvearrowright & \xrightarrow{\sim} & \curvearrowleft & \\ H_1(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z}([-1] - [+1]) & \subset & H_0(\mathbb{S}^0) \\ H_1(f) = \deg(f) \downarrow & & & & \downarrow H_0(f|_{\mathbb{S}^0}) \\ H_1(\mathbb{S}^1) & \xrightarrow[\sim]{\delta_{V,U} = -\delta_{U,V}} & \mathbb{Z}([-1] - [+1]) & \subset & H_0(\mathbb{S}^0) \\ & \curvearrowleft & \xrightarrow{\delta_{U,V}} & \curvearrowright & \end{array}$$

Der rechte vertikale Pfeil ist

- im Fall  $f = s$  die Identität und es folgt  $\deg(s) = -1$ ;
- im Fall  $f = a$  die Vertauschung von  $[+1]$  und  $[-1]$  und induziert somit auf der angegebenen Untergruppe die Abbildung  $-\text{id}$ ; es folgt  $\deg(a) = 1 = (-1)^{1+1}$ .  $\square$

**4.15.8.** Auf Seite 91 beginnend erkläre ich, wie man Satz 4.15.5 mit dem Lefschetz-Schem bzw. dem simplizialen Fixpunktsatz beweisen kann. Falls ich das in der Vorlesung erkläre, sollten wir wohl einfach Lemma 4.15.10 glauben, was später eh leicht aus dem universellen Koeffiziententheorem der Homologie, Satz ??, folgen wird, und direkt zu diesem Beweis springen. Könnte auch einfach  $\deg(f; k)$  definieren und sagen, dass  $\deg(f; k) = \deg(f)$  gilt, aber nicht beweisen. Falls ich das nicht erkläre, springe direkt zu den Anwendungen in Abschnitt 4.15.1.

<sup>97</sup> Wer nun noch  $\deg(s|_{\mathbb{S}^1}) = -1$  berechnet, etwa mit dem Satz von Hurewicz 3.4.2 oder über simpliziale Homologie, ist nach 4.15.7 fertig.

**4.15.9** (Singuläre Homologie als Bifunktor). Wir benötigen eine Art Nachtrag für den Beweis von Lemma 4.15.10. Sei ein Ring  $R$  fixiert (etwa  $R = \mathbb{Z}$ ). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ist  $M \rightarrow N$  ein  $R$ -Modulmorphismus, so sind die  $R$ -Modulmorphismen

$$S_q(X; \varphi): S_q(X; M) = M \text{Top}(\Delta_q, X) = \bigoplus_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} M \rightarrow S_q(X; N) = N \text{Top}(\Delta_q, X) = \bigoplus_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} N,$$

$$\sum_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} m_\sigma \sigma = (m_\sigma)_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} \mapsto \sum_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)} \varphi(m_\sigma) \sigma = (\varphi(m_\sigma))_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, X)},$$

für  $q \in \mathbb{Z}$ , mit den Differentialen verträglich und definieren einen Morphismus

$$S(X; M) \xrightarrow{S(X; \varphi)} S(X; N)$$

von Komplexen. Ist überdies  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, so ist das Diagramm (seine Vertikalen sind analog zu Lemma 3.2.2 definiert, mit  $\mathbb{Z}$  durch  $M$  bzw.  $N$  ersetzt)

$$(4.15.3) \quad \begin{array}{ccc} S(X; M) & \xrightarrow{S(X; \varphi)} & S(X; N) \\ S(f; M) \downarrow & \searrow^{S(f; \varphi)} & \downarrow S(f; N) \\ S(Y; M) & \xrightarrow{S(Y; \varphi)} & S(Y; N) \end{array}$$

in  $\text{Kom}(R)$  (ohne den roten Pfeil) kommutativ. Sei der rote Pfeil  $S(f; \varphi)$  die eindeutige Abbildung, so dass das Diagramm kommutativ bleibt. Wir erhalten so offensichtlich einen Funktor

$$S = S(-; ?): \text{Top} \times \text{Mod}(R) \rightarrow \text{Kom}(R).$$

<sup>98</sup> Verknüpfen mit  $H_q: \text{Kom}(R) \rightarrow \text{Mod}(R)$  liefert den Funktor

$$H_q = H_q(-; ?) = H_q \circ S(-; ?): \text{Top} \times \text{Mod}(R) \rightarrow \text{Mod}(R).$$

**Lemma 4.15.10.** Sei  $n \geq 1$ . Ist  $k$  ein Körper, so gilt für jede stetige Selbstabbildung  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  der  $n$ -Sphäre<sup>99</sup>

$$H_n(f) = H_n(f; k) = \deg(f) \cdot: H_n(\mathbb{S}^n; k) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n; k).$$

Allgemeiner gilt  $H_n(f) = \deg(f) \cdot: H_n(\mathbb{S}^n; M) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n; M)$  für jeden Modul  $M$  über jedem Ring  $R$ .

*Beweis.* Diese Aussage wird trivial, wenn man die kurze exakte Sequenz aus dem universellen Koeffiziententheorem der Homologie, Satz ??, verwendet (wobei hier eh das Torsionsprodukt verschwindet), denn diese ist natürlich in  $X \in \text{Top}$ . Wir erklären das in dieser Fußnote<sup>100</sup>. Es folgt ein Ad-hoc-Beweis.

<sup>98</sup>Die Abbildungen  $S(f; M), S(f; N), S(X; \varphi), S(Y; \varphi)$  im obigen Diagramm kann man nun alternativ als  $S(f; \text{id}_M), S(f; \text{id}_N), S(\text{id}_X; \varphi), S(\text{id}_Y; \varphi)$  notieren.

<sup>99</sup>Ist  $V$  ein  $k$ -Vektorraum und  $n \in \mathbb{Z}$ , so bezeichnet  $n \cdot: V \rightarrow V$  (ist  $n$ . bessere Notation?) äquivalent

- Skalarmultiplikation mit dem Bild von  $n$  in  $k$  unter dem eindeutigen Ringmorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow k$  oder
- die Abbildung, die  $v$  auf  $v + \dots + v$  ( $n$  Summanden) abbildet (zumindest für  $n \geq 0$ ; sonst  $-n$  Summanden  $-v$ ).

Die zweite Interpretation ist „besser“, da sie analog für jeden  $R$ -Modul  $M$  funktioniert.

<sup>100</sup> Wir behaupten, dass die offensichtliche Abbildung ein Isomorphismus

$$H_n(\mathbb{S}^n) \otimes_{\mathbb{Z}} k \xrightarrow{\sim} H_n(\mathbb{S}^n; k)$$

ist. Im Fall  $n = 1$  ist dies der Isomorphismus (??) aus ?? . Im Fall  $n \geq 2$  folgt dies aus Satz ?? wegen  $H_{n-1}(\mathbb{S}^n) = 0$  (auch der Fall  $n = 1$  folgt daraus, wie in ?? erklärt).

Da die kurze exakte Sequenz in Satz ?? natürlich in  $X \in \text{Top}$  ist, erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_n(\mathbb{S}^n) \otimes k & \xrightarrow{\sim} & H_n(\mathbb{S}^n; k) \\ \downarrow H_n(f) \otimes \text{id}_k = (\deg(f) \cdot) \otimes \text{id}_k = \deg(f) \cdot & & \downarrow H_n(f; k) \\ H_n(\mathbb{S}^n) \otimes k & \xrightarrow{\sim} & H_n(\mathbb{S}^n; k) \end{array}$$

Dies zeigt das Lemma.

Wir verwenden 4.15.9 mit  $R = \mathbb{Z}$  und fassen  $k$  als abelsche Gruppe auf (was nach B.1.15 für die Behauptung des Lemmas keinen Unterschied macht<sup>101</sup>).

Zuerst ersetzen wir  $f$  wie folgt durch eine Selbstabbildung von  $\partial\Delta_{n+1}$ : Sei  $p: \partial\Delta_{n+1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$  ein beliebiger Homöomorphismus und definiere  $g$  durch Kommutativität des Quadrats

$$\begin{array}{ccc} \partial\Delta_{n+1} & \xrightarrow[p]{\sim} & \mathbb{S}^n \\ g \downarrow & & \downarrow f \\ \partial\Delta_{n+1} & \xrightarrow[p]{\sim} & \mathbb{S}^n \end{array}$$

oder algebraisch durch  $g = p^{-1} \circ f \circ p$ . Anwenden des Funktors  $H_n(-; k)$  zeigt, dass es genügt,  $H_n(g; k) = \deg(f) \cdot$  zu zeigen. Anwenden des Funktors  $H_n = H_n(-; \mathbb{Z})$  zeigt  $H_n(g; \mathbb{Z}) = \deg(f) \cdot$ . Damit der Rest des Beweises leichter lesbar ist, schreiben wir  $S^n := \partial\Delta_{n+1}$ .

Korollar 4.7.7 liefert den Isomorphismus

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} &\xrightarrow{\sim} H_n(S^n) = H_n(S^n; \mathbb{Z}), \\ x &\mapsto \tilde{x} := x[\partial\text{id}_{\Delta_{n+1}}] = \left[ x \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i k_i^{n+1} \right], \end{aligned}$$

wobei wir  $\tilde{x}$  mitdefinieren. Das analoge Resultat (samt Beweis) mit  $\mathbb{Z}$  ersetzt durch  $k$  gilt und zeigt, dass

$$\begin{aligned} \alpha_k: k &\xrightarrow{\sim} H_n(S^n; k), \\ x &\mapsto \tilde{x} := x[\partial\text{id}_{\Delta_{n+1}}] = [x\partial\text{id}_{\Delta_{n+1}}] = [\partial(x\text{id}_{\Delta_{n+1}})] = \left[ x \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i k_i^{n+1} \right]. \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist, wobei wir wiederum  $\tilde{x}$  mitdefinieren.<sup>102</sup>

<sup>101</sup>Genauer für diejenigen, die es ganz genau wissen wollen): Wir behaupten, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \text{Top} \times \text{Mod}(k) & \xrightarrow{S} & \text{Kom}(k) & \xrightarrow{H_q} & \text{Mod}(k) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Top} \times \text{Mod}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{S} & \text{Kom}(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{H_q} & \text{Mod}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

mit Vertikalen induziert von „Nimm unterliegende abelsche Gruppe“  $\text{res}: \text{Mod}(k) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z})$  kommutativ ist. Für das rechte Quadrat folgt dies aus B.1.15. Für das linke Quadrat folgt das im Wesentlichen aus der trivialen Gleichheit

$$\text{res} \left( \bigoplus_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, M)} M \right) = \bigoplus_{\sigma \in \text{Top}(\Delta_q, M)} \text{res}(M)$$

für alle  $X \in \text{Top}$  und  $M \in \text{Mod}(k)$ .

Will man nun zeigen, dass zwei Abbildungen  $V \xrightarrow[\alpha]{\beta} W$  in  $\text{Mod}(k)$  gleich sind (in unserem Fall  $H_n(f)$  und  $\deg(f) \cdot$ ), so genügt es zu zeigen, dass sie in  $\text{Mod}(\mathbb{Z})$  gleich werden (mit anderen Worten verwenden wir, dass der Funktor  $\text{Mod}(k) \rightarrow \text{Mod}(\mathbb{Z})$  treu ist).

<sup>102</sup>Das analoge Resultat gilt auch für jeden  $R$ -Modul  $M$ , jedoch muss man bei der Formulierung etwas aufpassen: Der tautologische Simplex  $\text{id}_{\Delta_{n+1}}$  ist kein Element von  $S_{n+1}(\Delta_{n+1}; M)$  (denn in  $M$  „gibt es kein Einselement“). Für jedes  $m \in M$  ist aber  $\text{mid}_{\Delta_{n+1}}$  ein Element von  $S_{n+1}(\Delta_{n+1}; M)$  mit Rand in  $S_n(S^n; M)$ . Das analoge Resultat ist, dass

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\sim} H_n(S^n; k), \\ m &\mapsto [\partial(\text{mid}_{\Delta_{n+1}})]. \end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist.

Für jedes  $a \in k$  betrachten wir den eindeutigen Gruppenmorphismus  $\varphi_a: \mathbb{Z} \rightarrow k$  mit  $1 \mapsto a$ . Das kommutative Quadrat (4.15.3) spezialisiert zum kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{\mathbb{Z}}} & \mathbb{H}_n(S^n) & = & \mathbb{H}_n(S^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathbb{H}_n(S^n; \varphi_a)} & \mathbb{H}_n(S^n; k) & \xleftarrow[\sim]{\alpha_k} & k \\ & & \downarrow \mathbb{H}_n(g) = \mathbb{H}_n(g; \mathbb{Z}) = \deg(f) \cdot & & \downarrow & & \downarrow \mathbb{H}_n(g; k) & & \\ & & \mathbb{H}_n(S^n; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathbb{H}_n(S^n; \varphi_a)} & \mathbb{H}_n(S^n; k), & & & & \end{array}$$

wobei wir auch die soeben erklärten Isomorphismen eingezeichnet haben und die obige Erkenntnis  $\mathbb{H}_n(g) = \deg(f) \cdot$ . Verfolgt man die Eins  $1 \in \mathbb{Z}$  durch das obige Diagramm, so wird sie wie folgt abgebildet:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \xrightarrow{\quad} & \tilde{1} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{a} & \xleftarrow{\quad} & a \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \deg(f) \tilde{1} & \xrightarrow{\quad} & \deg(f) \tilde{a} = \mathbb{H}_n(g; k)(\tilde{a}) & & \end{array}$$

Lassen wir  $a \in k$  variieren, so durchläuft  $\tilde{a}$  alle Elemente von  $\mathbb{H}_n(S^n; k)$ , so dass die Gleichheit rechts unten die gewünschte Behauptung  $\deg(f) = \mathbb{H}_n(g; k)$  zeigt.

(Der Beweis für  $M$  statt  $k$  geht analog.) □

*Zweiter Beweis von Satz 4.15.5* ( $\deg(a_{\mathbb{S}^n}) = (-1)^{n+1}$  wird sogar auf zwei Arten bewiesen). Offensichtlich ist  $\mathbb{S}^n$  kompakt und triangulierbar (vgl. die weiter unten beschriebene Triangulierung). Da  $a: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  keinen Fixpunkt hat, muss

$$\Lambda_{f, \mathbb{Q}} = 0$$

nach dem Lefschetzschem Fixpunktsatz 4.14.7 gelten. Da andererseits wegen Lemma 4.15.10 (und unserem Wissen, dass  $\mathbb{H}(\mathbb{S}^n; k)$  nur in den beiden Graden 0 und  $n$  lebt und dort zu  $\mathbb{Q}$  isomorph ist und  $\mathbb{H}_0(a)$  die Identität ist)

$$\begin{aligned} \Lambda_{a, \mathbb{Q}} &= \text{tr}(\mathbb{H}_0(a) | \mathbb{H}_0(\mathbb{S}^1; \mathbb{Q})) + (-1)^n \text{tr}(\mathbb{H}_0(a) | \mathbb{H}_n(\mathbb{S}^1; \mathbb{Q})) \\ &= 1 + (-1)^n \deg(a) \end{aligned}$$

gilt, folgt  $\deg(a) = (-1)^{n+1}$ .<sup>103</sup>

Statt dem Lefschetzschem Fixpunktsatz genügt eigentlich der simpliziale Fixpunktsatz 4.11.1: Die Kreislinie  $\mathbb{S}^1$  hat eine offensichtliche Triangulierung in 4 Viertelkreise alias (anschauliche) 1-Simplizes. Analog hat die Kugeloberfläche  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  eine offensichtliche Triangulierung in acht „Dreiecke“ alias Achtelkugeln alias (anschauliche) 2-Simplizes. Analog hat  $\mathbb{S}^n$  eine Triangulierung in  $2^{n+1}$  (anschauliche)  $n$ -Simplizes. Wenn wir  $\mathbb{S}^n$  stereographisch mit der Oberfläche der konvexen Hülle der Vektoren  $\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_{n+1}$  identifizieren, so liefert jede Vorzeichenwahl  $\varepsilon = (\varepsilon(1), \dots, \varepsilon(n+1)) \in \{\pm 1\}^{n+1}$  einen  $n$ -Simplex mit den Ecken  $\varepsilon(1)e_1, \dots, \varepsilon(n+1)e_{n+1}$ . Damit ist die Triangulierung hoffentlich anschaulich klar. Der zugehörige Simplizialkomplex hat als Eckenmenge

$$E = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$$

und seine Simplexmenge  $\mathcal{K}$  besteht aus allen nichtleeren Teilmengen von

$$\mathcal{K}_n = \{\{\varepsilon(1)e_1, \dots, \varepsilon(n+1)e_{n+1}\} \mid \varepsilon \in \{\pm 1\}^{n+1}\}.$$

Wer genau zeigen will, dass es sich um eine Triangulierung handelt, verwende Proposition 2.2.8 und Aufgabe 2.2.10.

Die (involutive) Abbildung  $\alpha: E \rightarrow E$ ,  $x \mapsto -x$ , definiert eine (involutive) simpliziale Abbildung  $\alpha: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ , deren geometrische Realisierung  $\Delta(\alpha): \Delta(\mathcal{K}) \rightarrow \Delta(\mathcal{K})$  via unserer „stereographischen Triangulierung“  $\Delta(\mathcal{K}) \cong \mathbb{S}^n$  der Antipodenabbildung entspricht. Wir dürfen den simplizialen Fixpunktsatz 4.11.1 (Aussage (b) oder (a)) anwenden, denn  $\alpha$  fixiert überhaupt kein Element von  $\mathcal{K}$ . Es folgt die erste der Gleichungen

$$0 = \text{str}(\mathbb{H}(\alpha)) = \text{str}(\mathbb{H}(\Delta(\alpha))) = \text{str}(\mathbb{H}(a)) = \Lambda_{a, k}.$$

<sup>103</sup>Beachte, dass man  $\deg(s) = -1$  nicht analog beweisen kann, denn  $s$  hat unendlich viele Fixpunkte.

Die zweite folgt aus der Natürlichkeit der Vergleichsisomorphismen aus Satz 4.8.18, die dritte dann aus der obigen Identifizierung von  $\Delta(\alpha)$  und  $a$ , und die letzte ist die Definition der Lefschetz-Zahl, wobei  $k$  ein beliebiger Körper ist (implizit ist dieser in allen obigen Super-Spuren verwendet).

Dies zeigt  $\Lambda_{a,k} = 0$  (ohne den Lefschetzschen Fixpunktsatz), so dass wir nun wie oben mit Lemma 4.15.10 und (??)  $\deg(a) = (-1)^n$  erhalten.

Dieselbe Beweisstrategie funktioniert auch für die Spiegelung  $s: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ . Diese wird simplizial durch die Abbildung  $\sigma: E \rightarrow E$  beschrieben, die alle  $\pm e_1, \dots, \pm e_n$  fixiert und  $e_{n+1}$  mit  $-e_{n+1}$  vertauscht. Nur die Teilaussage (a) des simplizialen Fixpunktsatzes 4.11.1 ist jetzt anwendbar. Sie liefert die erste Gleichung in

$$\begin{aligned} \text{str}(H(\sigma)) &= \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^q \sum_{\substack{\kappa \in \mathcal{K}_q \\ \varphi(\kappa) = \kappa}} \text{sgn}(\varphi: \kappa \rightarrow \kappa) \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \sum_{\substack{\kappa \in \mathcal{K}_q \\ \kappa \cap \{e_{n+1}, -e_{n+1}\} = \emptyset}} 1 \\ &= \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \cdot 2^{q+1} \binom{n}{q+1} \\ &= 1 - \sum_{q=0}^n (-2)^q \binom{n}{q} \\ &= 1 - (1-2)^n = 1 - (-1)^n, \end{aligned}$$

die anderen Gleichheiten bis auf den binomischen Lehrsatz seien dem Leser überlassen. Wie oben gilt  $\text{str}(H(\sigma)) = \Lambda_{s,k} = 1 + (-1)^n \deg(s)$ , wobei die zweite Gleichung Lemma 4.15.10 verwendet. Es folgt  $\deg(s) = -1$ .  $\square$

#### 4.15.1. Anwendungen des Abbildungsgrades.

**Satz 4.15.11.** Sei  $n \geq 1$ . Sei  $g \in O(n+1)$  eine orthogonale Matrix alias orthogonale Abbildung  $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ . Dann hat ihre Einschränkung  $g: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  den Abbildungsgrad

$$\deg(g) = \det(g).$$

*Beweis.* Wir setzen voraus, dass der Leser weiß, dass  $O(n+1)$  aus genau zwei Wegzusammenhangskomponenten besteht, nämlich den beiden Fasern der (stetigen) Determinante  $\det: O(n+1) \rightarrow \{\pm 1\}$ . Ist  $\gamma: [0, 1] \rightarrow O(n+1)$  ein (stetiger) Weg zwischen  $A, B \in O(n+1)$ , so ist

$$\begin{aligned} H: \mathbb{S}^n \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{S}^n, \\ (x, t) &\mapsto \gamma(t)(x), \end{aligned}$$

eine Homotopie zwischen  $A$  und  $B$  (als Selbstabbildungen der Sphäre). Aufgrund der Homotopie-Invarianz des Abbildungsgrades (siehe Lemma 4.15.2) folgt  $\deg(A) = \deg(B)$ . Im Fall  $\det(g) = 1$  ist  $g$  durch einen Weg in  $O(n+1)$  mit der Einheitsmatrix verbindbar und es folgt  $\deg(g) = \deg(\text{id}) = 1 = \det(g)$ . Im Fall  $\det(g) = -1$  ist  $g$  durch einen Weg in  $O(n+1)$  mit der Spiegelung  $s$  (aufgefasst als lineare Abbildung) aus Satz 4.15.5 verbindbar und diese Satz zeigt  $\deg(g) = \deg(s) = -1 = \det(g)$ .  $\square$

**Satz 4.15.12.** Sei  $n \geq 1$ . Sei  $f: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  eine stetige Abbildung.

- (a) Gilt  $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$  (= der Grad der Antipodenabbildung), so hat  $f$  einen Fixpunkt.
- (b) Gilt  $\deg(f) \neq 1$  (= der Grad der Identität), so bildet  $f$  einen Punkt  $x$  auf seinen Antipodenpunkt  $-x$  ab, in Formeln  $f(x) = -x$ .

*Beweis.* (a) Gelte  $\deg(f) \neq (-1)^{n+1}$ . Wir nehmen an, dass  $f$  keinen Fixpunkt hat. Dann ist  $f$  wie folgt zur Antipodenabbildung  $a$  homotop. Anschaulich bewegen wir für jeden Punkt  $x \in \mathbb{S}^n$  den Punkt  $f(x)$  entlang des Großkreises nach  $-x = a(x)$ , und zwar auf dem kleineren Großkreisbogen. Formal

tut es die Homotopie

$$H(x, t) := \frac{(1-t)f(x) + ta(x)}{\|(1-t)f(x) + ta(x)\|}.$$

Diese ist sicherlich stetig, falls der Nenner nirgends verschwindet. Aus  $0 = (1-t)f(x) + ta(x) = (1-t)f(x) - tx$  folgt aber  $(1-t)f(x) = tx$  und per Norm-Nehmen  $1-t = t$ , also  $(t = \frac{1}{2})$  und  $f(x) = x$  im Widerspruch zur Annahme.

- (b) Gelte  $\deg(f) \neq 1$ . Dann gilt  $\deg(f \circ a) = \deg(f)\deg(a) \neq (-1)^{n+1}$  nach Satz 4.15.5 (und Lemma 4.15.2). Nach Teil (a) hat  $f \circ a$  einen Fixpunkt  $x$ , d. h.  $f(-x) = x = -(-x)$ . □

**4.15.13.** Ein (Tangential-)Vektorfeld auf der Sphäre  $\mathbb{S}^n$  ist eine stetige Abbildung  $V: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  mit  $V(x) \perp x$  für alle  $x \in \mathbb{S}^n$  (hier arbeiten wir mit dem euklidischen Skalarprodukt; wer etwas Differentialgeometrie kennt, sieht sofort, dass dies zur abstrakten Definition äquivalent ist). Eine Nullstelle eines solchen Vektorfeldes ist ein Punkt  $x \in \mathbb{S}^n$  mit  $V(x) = 0$ . Auf den Sphären  $\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^3, \dots$  ungerader Dimension gibt es Vektorfelder ohne Nullstellen, etwa

$$V: \mathbb{S}^{2k+1} \rightarrow \mathbb{S}^{2k+1} \subset \mathbb{R}^{2k+2},$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2k+1}, x_{2k+2}) \mapsto (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k+2}, x_{2k+1}).$$

**Korollar 4.15.14.** Auf den Sphären  $\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^4, \dots$  gerader Dimension hat jedes Vektorfeld eine Nullstelle (vgl. Aufgabe 4.14.15).

*Beweis.* Sei sonst  $V: \mathbb{S}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$  eine Vektorfeld ohne Nullstelle. Indem wir  $V(x)$  durch  $\frac{V(x)}{\|V(x)\|}$  ersetzen (was wohldefiniert ist), können wir ohne Einschränkung annehmen, dass unser Vektorfeld  $V$  in  $\mathbb{S}^{2k}$  landet und somit eine stetige Selbstabbildung von  $\mathbb{S}^{2k}$  definiert. Wegen  $x \perp V(x)$  für alle  $x \in \mathbb{S}^{2k}$  hat  $V$  weder einen Fixpunkt  $x = V(x)$  noch einen „Antipodalpunkt“  $x \in \mathbb{S}^{2k}$  mit  $V(x) = -x$ . Die beiden Aussagen von Satz 4.15.12 liefern den Widerspruch  $-1 = (-1)^{2k+1} = \deg(V) = 1$ . □

## ANHANG A. KATEGORIEN THEORIE

**A.0.1.** Für die Grundbegriffe der Kategorientheorie (*Kategorie, Funktor*) verweisen wir auf [Sch20, Appendix A]. In dem zitierten Skript werden auch die Begriffe *natürliche Transformation* und *Adjunktion* erklärt [Sch20, Definitionen 5.3.7 und 5.3.11]. Das geschieht jedoch etwas versteckt und relativ weit am Ende, weswegen wir es hier wiederholen.

**Definition A.0.2.** Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien. Dann nennt man die wie folgt definierte Kategorie  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  das **Produkt von  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$** :

- Ihre Objekte sind Paare  $(C, D)$ , wobei  $C$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$  und  $D$  ein Objekt von  $\mathcal{D}$  ist.
- Morphismenmengen sind durch die Formel

$$(\mathcal{C} \times \mathcal{D})\left((C, D), (C', D')\right) := \mathcal{C}(C, C') \times \mathcal{D}(D, D')$$

gegeben, für beliebige Objekte  $(C, D), (C', D') \in \mathcal{C} \times \mathcal{D}$ .

- Verknüpfungen sind komponentenweise definiert:  $(f, g) \circ (f', g') := (f \circ f', g \circ g')$ .
- Der Identitätsmorphismus eines Obj.  $(C, D)$  ist als  $\text{id}_{(C, D)} := (\text{id}_C, \text{id}_D)$  definiert.

**Aufgabe A.0.3.** Sei  $\mathcal{C}$  eine Kategorie. Erkläre, wie

$$\mathcal{C}(-, ?): \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set},$$

$$(X, Y) \mapsto \mathcal{C}(X, Y)$$

ein Funktor ist.

**Definition A.0.4.** Seien  $F, G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren. Eine **natürliche Transformation**  $\sigma: F \Rightarrow G$  (manchmal auch als  $\sigma: F \rightarrow G$  notiert) ist eine Familie  $(\sigma_C)_{C \in \text{Obj } \mathcal{C}}$  von Morphismen  $\sigma_C: F(C) \rightarrow G(C)$  in  $\mathcal{D}$ , so

dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(C) & \xrightarrow{F(f)} & F(C') \\ \sigma_C \downarrow & & \downarrow \sigma_{C'} \\ G(C) & \xrightarrow{G(f)} & G(C') \end{array}$$

in  $\mathcal{D}$  für alle Morphismen  $f: C \rightarrow C'$  in  $\mathcal{C}$  kommutiert, also  $\sigma_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \sigma_C$  gilt. Oft wird hierfür die Sprechweise verwendet, dass ein Morphismus  $\sigma_C: F(C) \rightarrow G(C)$  in  $\mathcal{D}$  **natürlich in**  $C \in \mathcal{C}$  ist.

Will man in kurzer Notation auch die beiden Kategorien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  erwähnen, so schreibt man eine solche natürliche Transformation als  $\sigma: F \Rightarrow G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ .

Die **Kategorie  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  der Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$** <sup>104</sup> hat als Objekte die Funktoren von  $\mathcal{C}$  nach  $\mathcal{D}$  und als Morphismen die natürlichen Transformationen zwischen solchen Funktoren; die Identitätsmorphisms sind offensichtlich; gegeben Morphismen  $\sigma: F \Rightarrow G$  und  $\tau: G \Rightarrow H$  ist  $\tau\sigma = \tau \circ \sigma: F \Rightarrow H$  durch  $(\tau\sigma)_C := \tau_C \circ \sigma_C$  definiert.

Der Begriff **Morphismus von Funktoren** alias Morphismus in der Kategorie  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  wird synonym zum Begriff *natürliche Transformation* verwendet. Isomorphismen von Funktoren  $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$  werden auch **Isotransformationen** genannt.

**A.0.5.** Eine natürliche Transformation  $\sigma: F \Rightarrow G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  kann man sich durch ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ \mathcal{C} & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \sigma \\ \curvearrowleft \end{array} & \mathcal{D} \\ & G & \end{array}$$

veranschaulichen.

**A.0.6.** Eine natürliche Transformation  $\tau = (\tau_C)_{C \in \mathcal{C}}: F \Rightarrow G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  ist genau dann eine Isotransformation, wenn  $\tau_C$  für alle Objekte  $C \in \mathcal{C}$  ein Isomorphismus ist.

**Beispiel A.0.7.** Für jedes  $q \in \mathbb{Z}$  und jeden topologischen Raum  $X \in \text{Top}$  haben wir den Randoperator  $\partial_q^X: S_q X \rightarrow S_{q-1} X$  definiert (siehe Definition 3.1.11). Für fixiertes  $q \in \mathbb{Z}$  ist das Datum  $\partial_q := (\partial_q^X)_{X \in \text{Top}}$  eine natürliche Transformation

$$\partial_q: S_q \Rightarrow S_{q-1}$$

zwischen den beiden Singuläre-Ketten-Funktoren  $S_q, S_{q-1}: \text{Top} \rightarrow \text{Ab}$ . Dies folgt sofort aus der Kommutativität des Diagramms (3.2.1).

**Beispiel A.0.8.** Der Leser überlege sich, dass die Morphismen (3.4.1) aus dem Satz von Hurewicz 3.4.2 eine natürliche Transformation vom Funktor Fundamentalgruppe

$$\pi_1(-): \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$$

in die Verknüpfung der Funktoren

$$\text{Top}_* \rightarrow \text{Top} \xrightarrow{H_1} \text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$$

definieren, wobei  $\text{Top}_* \rightarrow \text{Top}$  und  $\text{Ab} \rightarrow \text{Grp}$  die Vergissfunktoren sind.

Schränkt man beide Funktoren und die natürliche Transformation auf die volle Unterkategorie  $\text{Top}_*^{\text{wegzshg}}$  aller punktierten Räume  $(X, x)$ , für die  $X$  wegzusammenhängend ist, ein, so erhält man nach dem Satz von Hurewicz eine Isotransformation (formal ist das Einschränken das Vorschalten des Inklusionsfunktors  $\text{Top}_*^{\text{wegzshg}} \rightarrow \text{Top}_*$ , was allgemein in A.0.10 erklärt ist.)

<sup>104</sup>Manchmal auch als  $\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  notiert

**A.0.9.** Gegeben zwei natürliche Transformationen wie im linken Diagramm, ist ihre in Definition A.0.4 erklärte Verknüpfung im rechten Diagramm illustriert.

$$(A.0.1) \quad \begin{array}{ccc} & F & \\ & \Downarrow \sigma & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{G} & \mathcal{D} \\ & \Downarrow \tau & \\ & H & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & F & \\ & \Downarrow \tau \circ \sigma & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D} \\ & \Downarrow & \\ & H & \end{array}$$

Da in diesem Diagramm  $\sigma$  und  $\tau$  vertikal übereinanderstehen, nennt man diese Verknüpfung auch *vertikale Verknüpfung*. Sie wird auch als  $\tau \circ_1 \sigma$  notiert, da wir entlang des eindimensionalen Pfeils alias Funktors  $G$  verknüpfen.

**A.0.10.** Linker und rechter Teil des Diagramms

$$\mathcal{B} \xrightarrow{E} \mathcal{C} \begin{array}{ccc} & F & \\ & \Downarrow \sigma & \\ & G & \end{array} \mathcal{D} \xrightarrow{H} \mathcal{E}$$

illustrieren die beiden im Folgenden beschriebenen Ausgangssituationen.

- (a) (Vorschalten eines Funktors) Gegeben eine natürliche Transformation  $\sigma: F \Rightarrow G$  und einen Funktor  $E: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  definiert man eine natürliche Transformation  $\sigma E: FE \Rightarrow GE$  per  $(\sigma E)_B := \sigma_{BE}$ .
- (b) (Nachschalten eines Funktors) Gegeben eine natürliche Transformation  $\sigma: F \Rightarrow G$  und einen Funktor  $H: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  definiert man eine natürliche Transformation  $H\sigma: HF \Rightarrow HG$  per  $(H\sigma)_C := H\sigma_C$ .

Diese beiden Verknüpfungsrezepte sind Spezialfälle einer allgemeineren, in Aufgabe A.0.11 erklärten Verknüpfung (nimm dort  $F = G$  und  $\sigma = \text{id}_F$  bzw.  $F' = G'$  und  $\tau = \text{id}_{F'}$ ).

**Aufgabe A.0.11.**

- (a) Seien zwei natürliche Transformationen  $\sigma$  und  $\tau$  wie im folgenden Bild gegeben.

$$\mathcal{C} \begin{array}{ccc} & F & \\ & \Downarrow \sigma & \\ & G & \end{array} \mathcal{D} \begin{array}{ccc} & F' & \\ & \Downarrow \tau & \\ & G' & \end{array} \mathcal{E}$$

Definiere aus diesem Datum eine natürliche Transformation  $\tau\sigma = \tau \circ \sigma: F'F \Rightarrow G'G$ , wobei  $F'F = F' \circ F$  und  $G'G = G' \circ G$  die übliche Verknüpfung von Funktoren bezeichnet (siehe [Sch20, A.2.15]).

$$\mathcal{C} \begin{array}{ccc} & F'F & \\ & \Downarrow \tau\sigma & \\ & G'G & \end{array} \mathcal{E}$$

Hinweis: A priori wird man auf zwei mögliche Definitionen kommen, die aber übereinstimmen, was zu zeigen ist.

Bemerkung: Da im obigen Diagramm  $\sigma$  und  $\tau$  horizontal nebeneinanderstehen, nennt man diese Verknüpfung auch *horizontale Verknüpfung*. Sie wird auch als  $\tau \circ_0 \sigma$  notiert, da wir entlang des nulldimensionalen Punktes alias der Kategorie  $\mathcal{D}$  verknüpfen.

Wir haben  $\tau\sigma$  auch in Definition A.0.4 (vgl. Diagramm (A.0.2)) definiert und in A.0.9 als  $\tau \circ_1 \sigma$  notiert. Aus dem Kontext muss man erkennen, was gemeint ist; alternativ schreibt man genauer  $\tau \circ_0 \sigma$  bzw.  $\tau \circ_1 \sigma$ .

- (b) Horizontale Verknüpfung ist assoziativ: Es gilt  $\mu(\tau\sigma) = (\mu\tau)\sigma$  für jede weitere natürliche Transformation  $\mu: F'' \Rightarrow G'': \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ .

(c) Gegeben ein Diagramm von Kategorien, Funktoren und natürlichen Transformationen

$$(A.0.2) \quad \begin{array}{ccc} & F & \\ & \sigma \Downarrow & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{G} & \mathcal{D} \\ & \tau \Downarrow & \\ & H & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & I & \\ & \alpha \Downarrow & \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{J} & \mathcal{E} \\ & \beta \Downarrow & \\ & K & \end{array}$$

gilt

$$(\beta \circ_1 \alpha) \circ_0 (\tau \circ_1 \sigma) = (\beta \circ_0 \tau) \circ_1 (\alpha \circ_0 \sigma).$$

**Definition A.0.12.** Ist  $C$  ein Objekt einer Kategorie, so ist

$$Y(C) := \mathcal{C}(C, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$$

ein Funktor, also ein Objekt  $Y(C) \in \text{Set}^{\mathcal{C}}$ . Er heißt der **durch  $C$  dargestellte Funktor**. (Wir haben diesen bereits in [Sch20, Beispiel A.2.14] kennengelernt; vgl. auch [Sch20, Beispiel A.2.9].)

**Satz A.0.13** (Yoneda-Lemma). Seien  $\mathcal{C}$  eine Kategorie,  $C \in \mathcal{C}$  ein Objekt und  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$  ein Funktor, also ein Objekt  $F \in \text{Set}^{\mathcal{C}}$ . Dann ist die Abbildung

$$y_{C,F} : \underbrace{\text{Set}^{\mathcal{C}}(\mathcal{C}(C, -), F)}_{=Y(C)} \xrightarrow{\sim} F(C),$$

$$\tau \mapsto \tau_C(\text{id}_C),$$

eine Bijektion von Mengen, genannt **Yoneda-Bijektion**. Die inverse Abbildung bildet ein Element  $t \in F(C)$  auf diejenige (wohldefinierte) natürliche Transformation  $\sigma = (\sigma_{C'})_{C' \in \mathcal{C}} : \mathcal{C}(C, -) \Rightarrow F$  ab, für die  $\sigma_{C'}$  durch

$$\sigma_{C'} : \mathcal{C}(C, C') \rightarrow F(C'),$$

$$g \mapsto (F(g))(t),$$

definiert ist.

*Beweis.* Exzellente Übung zum Einüben der Begriffe. □

**Korollar A.0.14.** Der sogenannte **Yoneda-Funktor**

$$Y : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}^{\mathcal{C}},$$

$$C \mapsto Y(C) = \mathcal{C}(C, -),$$

ist volltreu.

*Beweis.* Exzellente Übung zum Einüben der Begriffe. □

**Aufgabe A.0.15.** Beweise Korollar A.0.14.

**Aufgabe A.0.16.** Die Yoneda-Bijektion  $y_{C,F}$  aus dem Yoneda Lemma A.0.13 ist (die beiden ersten Aussagen folgen aus der dritten und sind aus pädagogischen Gründen angegeben)

- für fixiertes  $C \in \mathcal{C}$  natürlich in  $F \in \text{Set}^{\mathcal{C}}$  (im Sinne von Definition A.0.4);
- für fixiertes  $F \in \text{Set}^{\mathcal{C}}$  natürlich in  $C \in \mathcal{C}$ ;
- natürlich in  $(C, F) \in \mathcal{C} \times \text{Set}^{\mathcal{C}}$ .

Hinweis: Bitte jeweils genau angeben, zwischen welchen beiden Funktoren wir eine natürliche Transformation erhalten. Falls die Beschreibung dieser Funktoren nicht offensichtlich ist, ist diese anzugeben.

**Definition A.0.17.** Seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  zwei Kategorien und seien  $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  und  $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  zwei Funktoren:

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{L} \\ \xleftarrow{R} \end{array} \mathcal{D}$$

Eine **Adjunktion von  $L$  mit  $R$**  ist eine Isotransformation

$$\alpha: \mathcal{D}(L-, -) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(-, R-)$$

von Funktoren  $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \rightarrow \text{Set}$ , d. h.  $\alpha = (\alpha_{(C,D)}) = (\alpha_{C,D})$  ist eine Familie bijektiver Abbildungen

$$\alpha_{C,D}: \mathcal{D}(LC, D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(C, RD)$$

von Mengen, die mit Morphismen sowohl in  $\mathcal{C}$  als auch in  $\mathcal{D}$  im Sinne von **A.0.18** kompatibel sind.

In diesem Fall nennt man  $L$  einen **Linksadjungierten zu  $R$**  und  $R$  einen **Rechtsadjungierten zu  $L$** . Man sagt auch, dass  $(L, R)$  oder genauer  $(L, R, \alpha)$  ein **adjungiertes Paar** bilden oder dass  $L$  **linksadjungiert zu  $R$  ist** oder dass  $R$  **rechtsadjungiert zu  $L$  ist**. Oft ist man hier nachlässig und nennt  $\alpha$  nicht explizit.

**A.0.18.** Gegeben Bijektionen  $\alpha_{C,D}$  wie in Definition **A.0.17** bedeutet deren Kompatibilität, dass für alle Morphismen  $c: C' \rightarrow C$  in  $\mathcal{C}$  und  $d: D \rightarrow D'$  in  $\mathcal{D}$  (oder äquivalent alle Morphismen  $(c^{\text{op}}, d): (C^{\text{op}}, D) \rightarrow (C'^{\text{op}}, D')$  in  $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D}$ ) das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(LC, D) & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{C,D}} & \mathcal{C}(C, RD) \\ f \mapsto d \circ f \circ Lc \downarrow & & g \mapsto Rd \circ g \circ c \downarrow \\ \mathcal{D}(LC', D') & \xrightarrow[\sim]{\alpha_{C',D'}} & \mathcal{C}(C', RD') \end{array}$$

kommutativ ist, dass also

$$\alpha(d \circ f \circ Lc) = Rd \circ \alpha(f) \circ c$$

für alle Morphismen  $f: LC \rightarrow D$  gilt. Schreiben wir die horizontalen Bijektionen als  $h \mapsto \bar{h}$  statt  $h \mapsto \alpha(h)$ , so wird diese Bedingung zu

$$\overline{d \circ f \circ Lc} = Rd \circ \bar{f} \circ c.$$

**A.0.19.** Sei  $(L, R, \alpha)$  eine Adjunktion wie in Definition **A.0.17**. Seien beliebige Morphismen  $c: C' \rightarrow C$  in  $\mathcal{C}$  und  $d: D \rightarrow D'$  in  $\mathcal{D}$  gegeben. Seien  $g: LC' \rightarrow D'$  und  $f: LC \rightarrow D$  beliebige Morphismen in  $\mathcal{D}$ . Seien  $\bar{g} = \alpha(g): C' \rightarrow RD'$  und  $\bar{f} = \alpha(f): C \rightarrow RD$  die zugehörigenentsprechenden Morphismen in  $\mathcal{D}$ . Dann ist das folgende linke Diagramm genau dann kommutativ, wenn das rechte kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} LC' & \xrightarrow{g} & D' \\ Lc \downarrow & & d \downarrow \\ LC & \xrightarrow{f} & D \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C' & \xrightarrow{\bar{g}} & RD' \\ c \downarrow & & Rd \downarrow \\ C & \xrightarrow{\bar{f}} & RD \end{array}$$

**Beispiel A.0.20.** Der Funktor „freie abelsche Gruppe“  $\mathbb{Z}-: \text{Set} \rightarrow \text{Ab}$ ,  $M \mapsto \mathbb{Z}M$ , ist linksadjungiert zum Vergiss-Funktor  $V: \text{Ab} \rightarrow \text{Set}$ , denn für jede Menge  $M$  und jede abelsche Gruppe  $A \in \text{Ab}$  ist die Restriktion entlang  $M \hookrightarrow \mathbb{Z}M = V\mathbb{Z}M$  eine Bijektion

$$\alpha_{M,A}: \text{Ab}(\mathbb{Z}M, A) \xrightarrow{\sim} \text{Set}(M, VA)$$

und all diese Bijektionen  $(\alpha_{M,A})_{M \in \text{Set}, A \in \text{Ab}}$  sind kompatibel und definieren deswegen eine Isotransformation

$$(A.0.3) \quad \alpha := (\alpha_{M,A})_{M \in \text{Set}, A \in \text{Ab}}: \text{Ab}(\mathbb{Z}-, -) \xrightarrow{\sim} \text{Set}(-, V-).$$

**Beispiel A.0.21.** Analog ist der Funktor „freie Gruppe“  $F: \text{Set} \rightarrow \text{Grp}$  linksadjungiert zum Vergiss-Funktor  $V: \text{Grp} \rightarrow \text{Set}$ .

**Lemma A.0.22.** Sei  $(L, R, \alpha) = (L: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, R: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}, \alpha)$  ein adjungiertes Paar von Funktoren. Sei  $\mathcal{A}$  eine Kategorie und seien  $F \in \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$  und  $G \in \mathcal{D}^{\mathcal{A}}$  Funktoren, zur Illustration ein Bild:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{A} & \\ F \swarrow & & \searrow G \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{L} & \mathcal{D} \\ & \xleftarrow{R} & \end{array}$$

Dann ist die Abbildung

$$\alpha_{F,G}: \mathcal{D}^{\mathcal{A}}(LF, G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(F, RG),$$

$$\mu = (\mu_A)_{A \in \mathcal{A}} \mapsto \left( \alpha_{FA, GA}(\mu_A) \right)_{A \in \mathcal{A}}$$

eine (wohldefinierte) Bijektion. In Worten entsprechen sich natürliche Transformationen  $LF \Rightarrow G$  und  $F \Rightarrow RG$  bijektiv.<sup>105</sup>

*Beweis.* Wir verwenden wie in A.0.18 die abkürzende Notation  $h \mapsto \bar{h}$  statt  $h \mapsto \alpha(h)$ .

Die Bijektionen  $\alpha_{C,D}: \mathcal{D}(LC, D) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}(C, RD)$  liefern eine Bijektion

$$\prod_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{D}(LFA, GA) \xrightarrow{\sim} \prod_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{C}(FA, RGA),$$

$$\mu = (\mu_A)_{A \in \mathcal{A}} \mapsto \bar{\mu} := \left( \bar{\mu}_A \right)_{A \in \mathcal{A}} = \left( \alpha_{FA, GA}(\mu_A) \right)_{A \in \mathcal{A}}.$$

Zu zeigen ist, dass  $\mu$  genau dann eine natürliche Transformation  $LF \Rightarrow G$  definiert, wenn  $\bar{\mu}$  eine natürliche Transformation  $F \Rightarrow RG$  definiert. Für jeden Morphismus  $a: A \rightarrow A'$  in  $\mathcal{A}$  ist also zu zeigen, dass das folgende linke Diagramm genau dann kommutiert, wenn das rechte kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} LF(A) & \xrightarrow{\mu_A} & G(A) \\ LF(a) \downarrow & & G(a) \downarrow \\ LF(A') & \xrightarrow{\mu_{A'}} & G(A') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\bar{\mu}_A} & RG(A) \\ F(a) \downarrow & & RG(a) \downarrow \\ F(A') & \xrightarrow{\bar{\mu}_{A'}} & RG(A') \end{array}$$

Dies folgt aber aus A.0.19. □

## ANHANG B. HOMOLOGISCHE ALGEBRA

**B.0.1.** Wir fixieren in diesem Abschnitt einen Ring  $R$  und arbeiten in der Kategorie  $\text{Mod}(R)$  der  $R$ -Moduln. Injektive Abbildungen von  $R$ -Moduln werden als  $M \hookrightarrow N$  notiert, surjektive als  $M \twoheadrightarrow N$ , bijektive als  $M \xrightarrow{\sim} N$ .

**B.0.2.** Ein besonders wichtiges Beispiel ist der Ring  $\mathbb{Z}$ . Die Kategorie  $\text{Mod}(\mathbb{Z})$  ist nichts anderes als die Kategorie  $\text{Ab}$  abelscher Gruppen.

**B.0.3.** Vieles, was wir für die Kategorie  $\text{Mod}(R)$  erklären, funktioniert sinngemäß auch für beliebige abelsche Kategorien (mit der Notation  $M \hookrightarrow N$  für Monomorphismen,  $M \twoheadrightarrow N$  für Epimorphismen und  $M \xrightarrow{\sim} N$  für Isomorphismen).

### B.1. Die Kategorie der Komplexe und Homologie.

**Definition B.1.1.** Ein **Komplex**<sup>106</sup> von  $R$ -Moduln oder **Komplex in**  $\text{Mod}(R)$ <sup>107</sup> ist ein Diagramm

$$A = (A, d) = ((A_p)_{p \in \mathbb{Z}}, (d_p)_{p \in \mathbb{Z}}) = \left( \dots \rightarrow A_{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} A_p \xrightarrow{d_p} A_{p-1} \rightarrow \dots \right)$$

von  $R$ -Moduln  $A_p$  und  $R$ -Modulmorphismen  $d_p: A_p \rightarrow A_{p-1}$  mit der Eigenschaft, dass

$$d_{p-1} \circ d_p = 0$$

<sup>105</sup>Genauer gilt: Dann ist auch

$$(L^{\mathcal{A}}, R^{\mathcal{A}}, \alpha^{\mathcal{A}})$$

ein adjungiertes Paar von Funktoren, wobei die beiden Funktoren

- $L^{\mathcal{A}}: \mathcal{C}^{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{D}^{\mathcal{A}}, F \mapsto LF = L \circ F$ , durch Nachschalten von  $L$  und
- $R^{\mathcal{A}}: \mathcal{D}^{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{A}}, G \mapsto RG = R \circ G$ , durch Nachschalten von  $R$

definiert sind und

$$\alpha^{\mathcal{A}}: \mathcal{D}^{\mathcal{A}}(L^{\mathcal{A}}-, -) \xrightarrow{\cong} \mathcal{C}^{\mathcal{A}}(-, R^{\mathcal{A}}-)$$

die im Lemma angegebenen Komponenten  $\alpha_{F,G}$  hat.

<sup>106</sup>oder manchmal **Kettenkomplex**, vermutlich historisch motiviert durch den Komplex der singulären Ketten aus Proposition 3.1.14.

<sup>107</sup>abkürzend für *Komplex mit Komponenten in*  $\text{Mod}(R)$

für alle  $p \in \mathbb{Z}$  gilt. Oft schreibt man  $d$  statt  $d_p$ . Dann verkürzt sich die Bedingung  $d_{p-1} \circ d_p = 0$  zu  $d^2 = d \circ d = 0$ . Man nennt die Abbildungen  $d_p$  **Differentiale**. Man nennt  $A_p$  die **Komponente** von  $A$  im **Grad**  $p$ .

**B.1.2.** Wir wählen meist Großbuchstaben wie  $A, B, C, E$  vom Anfang des Alphabets für Komplexe und Großbuchstaben  $L, M, N$  für Moduln.

**B.1.3.** In der Literatur ist auch die Notation  $A_\bullet$  für einen Komplex verbreitet. Ich persönlich mag sie nicht, denn sie verursacht eigentlich nur unnötige Schreibarbeit – ich schreibe ja auch Vektoren  $x \in \mathbb{R}^n$  nicht als  $x_\bullet$ .<sup>108</sup> Als Autor schreibe ich lieber präzise auf, ob es sich bei  $A$  um einen Komplex, eine abelsche Gruppe, eine Funktion oder was auch immer handelt.

**Beispiele B.1.4.** Der Nullkomplex hat in allen Komponenten den trivialen Modul  $\{0\}$  und notwendig verschwindende Differentiale.

**Definition B.1.5.** Sei  $A$  ein Komplex in  $\text{Mod}(R)$ . Definiere  $R$ -Moduln

$$\begin{array}{ccccccc} B_p(A) & := & \text{im}(d_{p+1}) & \subset & Z_p(A) & := & \ker(d_p) \subset A_p \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & H_p(A) & := & \frac{Z_p(A)}{B_p(A)} \end{array}$$

wobei man beachte, dass die erste Inklusion aus  $d^2 = 0$  folgt. Man nennt  $H_p(A) = H_p A$  die  **$p$ -te Homologie** von  $A$ .<sup>109</sup> Die Elemente von  $Z_p(A) = Z_p A$  heißen  **$p$ -Zykel** (englisch  *$p$ -cycles*, die Elemente von  $B_p(A) = B_p A$  heißen  **$p$ -Ränder** (englisch  *$p$ -boundaries*, die Elemente von  $H_p(A)$  heißen  **$p$ -te Homologieklassen**. Ist  $z \in Z_p(A)$  ein Zykel, so wird seine Homologieklassse als  $[z] \in H_p(A)$  notiert.

Man nennt zwei Elemente  $a, a' \in A_p$  **homolog**, falls ihre Differenz ein Rand ist, in Formeln  $a - a' \in B_p(A)$ , falls also  $a - a' = d(b)$  für ein geeignetes  $b \in A_{p+1}$  gilt. Ein Element  $a \in A_p$  heißt **nullhomolog**, wenn es zum Nullelement homolog ist, was schlicht bedeutet, dass es ein Rand ist.

**B.1.6.** Zwei Elemente  $a, a'$  sind genau dann homolog, wenn ihre Differenz  $a - a'$  nullhomolog (= ein Rand) ist. Homolog-Sein ist eine Äquivalenzrelation auf  $A_p$ .

**B.1.7.** Ein Komplex  $A$  in  $\text{Mod}(R)$  ist genau dann bei  $A_p$  exakt (siehe B.3.1) wenn  $H_p(A) = 0$  gilt. Die Homologie ist also ein *Maß für die (Nicht-)Exaktheit von  $A$* .

**Definition B.1.8.** Ein Komplex  $A$  in  $\text{Mod}(R)$  heißt **azyklisch** oder **exakt**, wenn jeder Zykel ein Rand ist, wenn also  $H_p(A) = 0$  für alle  $p \in \mathbb{Z}$  gilt, wenn also  $A$  an allen Stellen  $A_p$  exakt ist.

**Aufgabe B.1.9.** Sei  $A \in \text{Kom}(R)$  ein Komplex von  $R$ -Moduln. Dann ist die  $p$ -te Homologie sowohl

- der Kokern des durch  $d_{p+1}$  induzierten Morphismus  $A_{p+1} \rightarrow \ker(d_p)$ , in Formeln

$$H_p(A) = \text{cok}(A_{p+1} \rightarrow \ker(d_p)),$$

als auch

- kanonisch isomorph zum Kern des durch  $d_p$  induzierten Morphismus  $\text{cok}(d_{p+1}) \rightarrow A_{p-1}$ , in Formeln

$$H_p(A) \cong \ker(\text{cok}(d_{p+1}) \rightarrow A_{p-1}).$$

<sup>108</sup> Nicht ganz vergleichbar, aber ähnlich ist die Notation  $\vec{x}$  für Vektoren, die oft in der Schule verwendet wird – als ob nur etwas mit einem Pfeil darüber ein Vektor sein könnte, weil man Vektoren gerne als Pfeile veranschaulicht. Dann sollte man vielleicht auch jedes Symbol für eine Menge einkreisen, denn in Mengendiagrammen werden Mengen oft als Kreise dargestellt...

<sup>109</sup>Oft hört man  $p$ -te Homologiegruppe, auch wenn  $p$ -ter Homologiemodul (oder Homologie- $R$ -Modul) der genauere Begriff ist. Im Kontext abelscher Kategorien sollte man vom  $p$ -ten Homologieobjekt sprechen.

**Definition B.1.10.** Seien  $A, B$  Komplexe in  $\text{Mod}(R)$ . Ein **Morphismus**  $f: A \rightarrow B$  **von Komplexen**<sup>110</sup> ist eine Folge  $f = (f_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  von  $R$ -Modulmorphismen  $f_p: A_p \rightarrow B_p$ , so dass alle Quadrate im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A_p & \xrightarrow{d_p^A} & A_{p-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_p & & \downarrow f_{p-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & B_p & \xrightarrow{d_p^B} & B_{p-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

kommutativ sind (in Formeln wird also  $f_{p-1} \circ d_p^A = d_p^B \circ f_p$  für alle  $p \in \mathbb{Z}$  gefordert).

Die Kategorie  $\text{Kom}(R)$  der Komplexe in  $\text{Mod}(R)$  ist wie folgt definiert:<sup>111</sup>

- Ihre Objekte sind die Komplexe in  $\text{Mod}(R)$ .
- Für Komplexe  $A, B$  in  $\text{Mod}(R)$  notieren wir die Morphismenmenge  $(\text{Kom}(R))(A, B)$  kurz als  $\text{Kom}_R(A, B)$ . Sie besteht per Definition aus allen Morphismen  $f: A \rightarrow B$  von Komplexen.
- Verknüpfungen  $\circ: \text{Kom}_R(B, C) \times \text{Kom}_R(A, B) \rightarrow \text{Kom}_R(A, C)$  und Identitäten  $\text{id}_A \in \text{Kom}_R(A, A)$  sind offensichtlich.

**B.1.11.** Die Menge  $\text{Kom}_R(A, B)$  ist offensichtlich eine abelsche Gruppe; die Verknüpfung  $\circ: \text{Kom}_R(B, C) \times \text{Kom}_R(A, B) \rightarrow \text{Kom}_R(A, C)$  von Morphismen ist  $\mathbb{Z}$ -bilinear.<sup>112</sup>

**B.1.12.** Ein Morphismus  $f = (f_p)_{p \in \mathbb{Z}}: A \rightarrow B$  in  $\text{Kom}(R)$  ist offensichtlich genau dann ein Isomorphismus, wenn alle  $f_p$  Isomorphismen in  $\text{Mod}(R)$  sind.

**Lemma B.1.13.** Sei  $f: A \rightarrow B$  ein Morphismus in  $\text{Kom}(R)$ . Dann induziert  $f$  Morphismen<sup>113</sup>

$$\begin{aligned} B_p(f): B_p(A) &\rightarrow B_p(B), \\ Z_p(f): Z_p(A) &\rightarrow Z_p(B), \\ H_p(f): H_p(A) &\rightarrow H_p(B) \end{aligned}$$

auf den  $R$ -Moduln der Ränder, Zykel und auf der Homologie. Genauer sind diese Zuordnungen funktoriell, beispielsweise ist die  $p$ -te Homologie

$$H_p: \text{Kom}(R) \rightarrow \text{Mod}(R)$$

ein Funktor. Genauer sollte man sagen, dass das offensichtliche Diagramm, das (4.9.4) mit dem analogen Diagramm für  $B$  verbindet, kommutativ ist. (Wer Aufgabe B.1.9 gemacht hat, kann das Diagramm auch noch um  $\ker(\text{cok}(d_{p+1})) \rightarrow A_{p-1}$  samt offensichtlichen Pfeilen ergänzen.)

*Beweis.* Offensichtlich. □

**Aufgabe B.1.14.** Beweise Lemma B.1.13.

**B.1.15.** **später wegen Lemma 4.15.10 ergänzt.** Sei  $\varphi: S \rightarrow R$  ein Ringmorphismus (etwa der eindeutige Ringmorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow R$ ). Dann können wir jeden  $R$ -Modul  $M$  auch als  $S$ -Modul auffassen: Wir nehmen dieselbe abelsche Gruppe  $M$  und versehen sie mit der Skalarmultiplikation  $s.m := \varphi(s).m$ . Man notiert diesen  $S$ -Modul ebenfalls als  $M$  oder präziser als  $\text{res}_S^R(M)$ . Dies liefert in offensichtlicher Weise einen Funktor  $\text{res} = \text{res}_S^R = \text{res}_\varphi: \text{Mod}(R) \rightarrow \text{Mod}(S)$  (er ist die Identität auf Morphismen). (Im Spezialfall  $\mathbb{Z} \rightarrow R$  bildet er einen  $R$ -Modul schlicht auf die unterliegende abelsche Gruppe ab.)

Wir dehnen diesen Funktor in offensichtlicher Weise zu einem Funktor  $\text{Kom}(R) \rightarrow \text{Kom}(S)$  aus. Dieser Funktor vertauscht offensichtlich mit den Funktoren „Bilde  $p$ -Zykel  $Z_p$ “, „Bilde  $p$ -Ränder  $B_p$ “, „Bilde die

<sup>110</sup>Manchal Kettenabbildung oder Kettenmorphismus genannt.

<sup>111</sup> Man mag diese Kategorie auch als  $\text{Kom}(\text{Mod}(R))$  notieren. Diese Notation hat den Vorteil, dass man  $\text{Mod}(R)$  durch eine beliebige abelsche (oder auch nur additive) Kategorie ersetzen kann.

<sup>112</sup>Ist  $R$  kommutativ, so sind die Morphismenräume  $R$ -Moduln und die Verknüpfung ist  $R$ -bilinear. Für beliebiges  $R$  sind die Morphismenräume Moduln über dem Zentrum  $Z(R)$  von  $R$  und die Verknüpfung ist  $Z(R)$ -bilinear.

<sup>113</sup>Der Leser beachte den Unterschied zwischen  $B$  und  $B$ .

$p$ -te Homologie  $H_p$ “, womit wir beispielsweise im Fall  $H_p$  meinen, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Kom}(R) & \xrightarrow{\text{res}} & \text{Kom}(S) \\ \downarrow H_p & & \downarrow H_p \\ \text{Mod}(R) & \xrightarrow{\text{res}} & \text{Mod}(S) \end{array}$$

kommutiert.

**Definition B.1.16.** Ein Morphismus  $f: A \rightarrow B$  in  $\text{Kom}(R)$  heißt **Quasi-Isomorphismus**, falls er auf allen Homologiemoduln einen Isomorphismus induziert, falls also die Abbildung  $H_p(f): H_p(A) \rightarrow H_p(B)$  für alle  $p \in \mathbb{Z}$  ein Isomorphismus ist.

**B.1.17.** Jeder Isomorphismus in  $\text{Kom}(R)$  ist ein Quasi-Isomorphismus.

**B.1.18.** Ist  $A \in \text{Kom}(R)$  ein Komplex von  $R$ -Moduln, so kann man seine Homologie auch als Komplex

$$H(A) = (H(A), 0) = ((H(A)_p)_{p \in \mathbb{Z}}, (0)_{p \in \mathbb{Z}}) = \left( \dots \xrightarrow{0} H_{p+1}(A) \xrightarrow{0} H_p(A) \xrightarrow{0} H_{p-1}(A) \rightarrow \dots \right)$$

mit verschwindenden Differentialen auffassen; diesen nennt man **totale Homologie von  $A$**  oder auch kurz **Homologie von  $A$** . Totale Homologie definiert offensichtlich einen Funktor

$$(B.1.1) \quad H: \text{Kom}(R) \rightarrow \text{Kom}(R).$$

Ein Morphismus in  $\text{Kom}(R)$  ist genau dann ein Quasi-Isomorphismus, wenn sein Bild unter  $H$  ein Isomorphismus ist.

Analog kann man Zykel  $Z$  und Ränder  $B$  als Funktoren  $\text{Kom}(R) \rightarrow \text{Kom}(R)$  auffassen.

**Definition B.1.19.** Ein **Unterkomplex** eines Komplexes  $A \in \text{Kom}(R)$  ist eine Familie  $B = (B_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  von Untermoduln  $B_p \subset A_p$  mit  $d_p(B_p) \subset B_{p-1}$  für alle  $p \in \mathbb{Z}$ . Es ist klar, dass  $B = (B_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  zusammen mit den induzierten Differentialen  $B_p \rightarrow B_{p-1}$  selbst ein Komplex in  $\text{Mod}(R)$  ist, was die Terminologie rechtfertigt. Man schreibt einen Unterkomplex meist als  $A \subset B$ .

**B.1.20** (Quotientenkomplex). Sei  $A \subset B$  ein Unterkomplex. Dann induzieren die Differentiale  $d_p^A$  Grpuppenmorphisnien  $d_p: \frac{A_p}{B_p} \rightarrow \frac{A_{p-1}}{B_{p-1}}$  und machen die Familie  $(\frac{A_p}{B_p})_{p \in \mathbb{Z}}$  der Quotienten zu einem Komplex. Dieser wird als  $\frac{A}{B} = A/B$  notiert und **Quotient von  $A$  durch/nach  $B$**  genannt.

Seien  $B \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} \frac{A}{B}$  die offensichtlichen Morphismen von Komplexen (Inklusion bzw. Projektion).

Universelle Eigenschaft von  $\frac{A}{B}$ : Für jeden Komplex  $T$  und jeden Morphismus  $f: A \rightarrow T$  mit  $f|_B = 0$  gibt es genau einen Morphismus  $\bar{f}: \frac{A}{B} \rightarrow T$  mit  $\bar{f} \circ \pi = f$ , wie im folgenden Bild illustriert (definiere  $\bar{f}$  komponentenweise und zeige, dass es ein Morphismus von Komplexen ist).

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{\pi} & \frac{A}{B} \\ & \searrow f \circ \iota = 0 & \searrow f & & \downarrow \exists! \bar{f} \\ & & & & T \end{array}$$

Äquivalent: Für jeden Komplex  $T$  definiert das Vorschalten von  $\pi$  eine Bijektion

$$\begin{aligned} \text{Kom}_R(\frac{A}{B}, T) &\xrightarrow{\sim} \{f \in \text{Kom}_R(A, T) \mid f \circ \iota = 0\}, \\ g &\mapsto g \circ \pi. \end{aligned}$$

Um also einen Morphismus  $\frac{A}{B} \rightarrow T$  in  $\text{Kom}(R)$  zu definieren, genügt es (ähnlich wie bei abelschen Gruppen, Moduln, Vektorräumen), einen Morphismus  $f: A \rightarrow T$  mit  $f|_B = 0$  anzugeben.

**B.1.21.** Die folgenden Aufgaben zeigen, wie man wohlbekannte Begriffsbildungen und Resultate für Moduln „komponentenweise“ auf Komplexe von Moduln überträgt.

**Aufgabe B.1.22.** Sei  $f: A \rightarrow B$  ein Morphismus in  $\text{Kom}(R)$ .

- (a) Zeige, dass  $\ker(f)_p := \ker(f_p: A_p \rightarrow B_p)$  einen Unterkomplex  $\ker(f) \subset A$  definiert. Dieser heißt **Kern von  $f$** .

- (b) Zeige, dass  $\text{im}(f)_p := f_p(A_p) = \text{im}(f_p: A_p \rightarrow B_p)$  einen Unterkomplex  $\text{im}(f) \subset B$  definiert. Dieser heißt **Bild von  $f$** .
- (c) (Homomorphiesatz = Erster Isomorphiesatz) Zeige, dass  $f$  einen Isomorphismus  $\frac{A}{\ker(f)} \xrightarrow{\sim} \text{im}(f)$  induziert.

Bemerkung: Der **Kokern von  $f$**  ist als  $\text{cok}(f) := \frac{B}{\text{im}(f)}$  definiert.

Bemerkung: Auch die anderen Isomorphiesätze [Wik20, Isomorphism theorems for modules] gelten sinngemäß für Komplexe von Moduln, da sie komponentenweise gelten.

**Definition B.1.23.** Gegeben eine Familie  $(A(i))_{i \in I}$  von Komplexen von  $R$ -Moduln definieren wir ihre **direkte Summe**

$$\bigoplus A(i) = \bigoplus_{i \in I} A(i)$$

„komponentenweise“ als den folgenden Komplex von  $R$ -Moduln: Seine  $p$ -te Komponente ist die direkte Summe der  $p$ -ten Komponenten der  $A(i)$ :

$$\left( \bigoplus_{i \in I} A(i) \right)_p := \bigoplus_{i \in I} A(i)_p$$

Sein  $p$ -tes Differential ist die direkte Summe der  $p$ -ten Differentiale der  $A(i)$ :

$$d_p^{\bigoplus A(i)}: \left( \bigoplus_{i \in I} A(i) \right)_p \rightarrow \left( \bigoplus_{i \in I} A(i) \right)_{p-1},$$

$$(a(i))_i \mapsto (d_p(a(i)))_i$$

Offensichtlich definiert dies in der Tat einen Komplex.

**Aufgabe B.1.24** (Homologie vertauscht mit direkten Summen). Ist  $(A(i))_{i \in I}$  eine Familie von Objekten von  $\text{Kom}(R)$ , so ist für alle  $p \in \mathbb{Z}$  der offensichtlich Gruppenmorphismus ein Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} H_p(A(i)) \xrightarrow{\sim} H_p\left(\bigoplus_{i \in I} A(i)\right).$$

**Aufgabe B.1.25** (Direkte Summe von Komplexen ist Koprodukt). Sei  $(A(i))_{i \in I}$  eine Familie von Objekten von  $\text{Kom}(R)$ . Dann ist die direkte Summe  $\bigoplus A(i)$  (zusammen mit den offensichtlichen Morphismen  $\text{incl}_j: A(j) \rightarrow \bigoplus A(i)$ ) ein Koprodukt der  $(A(i))_i$  in der Kategorie  $\text{Kom}(R)$  im Sinne von [Sch20, Def. 3.6.10].

## B.2. Die Homotopiekategorie von Komplexen.

**Definition B.2.1.** Zwei Morphismen  $f, g: A \rightarrow B$  in  $\text{Kom}(R)$  heißen **homotop**, falls es eine Familie  $h = (h_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  von  $R$ -Modulmorphismen  $h_p: A_p \rightarrow B_{p+1}$  gibt mit

$$f_p - g_p = d_{p+1}^B \circ h_p + h_{p-1} \circ d_p^A$$

für alle  $p \in \mathbb{Z}$  oder kurz

$$f - g = d \circ h + h \circ d$$

oder noch kürzer  $f - g = dh + hd$ . Man nennt eine solche Familie  $h = (h_p)_{p \in \mathbb{Z}}$  eine **Homotopie von  $f$  nach  $g$** . Zur Illustration ein Bild:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & A_{p+1} & \xrightarrow{d_{p+1}^A} & A_p & \xrightarrow{d_p^A} & A_{p-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f_{p+1} - g_{p+1} & \nearrow h_p & \downarrow f_p - g_p & \nearrow h_{p-1} & \downarrow f_{p-1} - g_{p-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & B_{p+1} & \xrightarrow{d_{p+1}^B} & B_p & \xrightarrow{d_p^B} & B_{p-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

**Aufgabe B.2.2.** Sind  $f, g: A \rightarrow B$  homotope Morphismen in  $\text{Kom}(R)$ , so gilt  $H_p(f) = H_p(g)$  für alle  $p \in \mathbb{Z}$ .

**Aufgabe B.2.3.** „Homotop-Sein“ definiert eine Äquivalenzrelation auf  $\text{Kom}_R(A, B)$ .

**Definition B.2.4.** Ein Morphismus  $f: A \rightarrow B$  in  $\text{Kom}(R)$  heißt **nullhomotop**, wenn er zum Nullmorphismus homotop ist, wenn also  $f = dh + hd$  für eine geeignete Homotopie  $h$  gilt.

**B.2.5.** Zwei Morphismen  $f, g: A \rightarrow B$  sind genau dann homotop, wenn  $f - g$  nullhomotop ist.

**Aufgabe B.2.6.** Die Menge der nullhomotopen Morphismen bildet eine Untergruppe der abelschen Gruppe  $\text{Kom}_R(A, B)$ .

**Definition B.2.7.** Definiere

$$\text{Hot}_R(A, B) := \frac{\text{Kom}_R(A, B)}{\text{Homotop-Sein}} = \frac{\text{Kom}_R(A, B)}{\{\text{nullhomotope Morphismen } A \rightarrow B\}}$$

als Menge der Äquivalenzklassen bzw. äquivalent als Quotientengruppe (dabei verwenden wir sowohl **B.2.5** als auch die Aufgaben **B.2.3** und **B.2.6**).

**Aufgabe B.2.8.** Seien  $E \xrightarrow{e} A \xrightleftharpoons[f]{g} B \xrightarrow{h} F$  Morphismen in  $\text{Kom}(R)$ . Sind  $f$  und  $g$  homotop, so sind sowohl  $f \circ e$  und  $g \circ e$  als auch  $h \circ f$  und  $h \circ g$  homotop. Insbesondere gilt: Ist  $f$  nullhomotop, so sind auch  $f \circ e$  und  $h \circ f$  nullhomotop.

**Definition B.2.9.** Sei  $\text{Hot}(R)$  die folgende Kategorie: Sie hat die gleichen Objekte wie  $\text{Kom}(R)$ , ihre Objekte sind also Komplexe in  $\text{Mod}(R)$ ; gegeben Objekte  $A, B$  in  $\text{Kom}(R)$  ist die Menge der Morphismen in  $\text{Hot}(R)$  von  $A$  nach  $B$  die Menge  $\text{Hot}_R(A, B)$ . Die Verknüpfung ist durch

$$\begin{aligned} \text{Hot}_R(B, C) \times \text{Hot}_R(A, B) &\rightarrow \text{Hot}_R(A, C), \\ ([f], [g]) &\mapsto [f \circ g], \end{aligned}$$

definiert, was nach Aufgabe **B.2.8** wohldefiniert ist (offensichtlich ist diese Abbildung  $\mathbb{Z}$ -bilinear). Wir nennen  $\text{Hot}(R)$  die **Homotopiekategorie der Komplexe von  $R$ -Moduln** oder kurz **Homotopiekategorie von  $R$** .

Ein Morphismus  $f: A \rightarrow B$  in  $\text{Kom}(R)$  wird **Homotopieäquivalenz** genannt, wenn  $[f]$  ein Isomorphismus in  $\text{Hot}(R)$  ist, wenn es also einen Morphismus  $g: B \rightarrow A$  gibt, für den  $g \circ f$  homotop zu  $\text{id}_A$  und  $f \circ g$  homotop zu  $\text{id}_B$  sind. Zwei Komplexe in  $\text{Mod}(R)$  heißen **homotopieäquivalent**, wenn sie isomorph in  $\text{Hot}(R)$  sind.

**Definition B.2.10.** Ein Komplex in  $\text{Mod}(R)$  heißt **nullhomotop**, wenn er homotopieäquivalent zum Nullkomplex ist, was äquivalent bedeutet, dass  $\text{id}_A$  nullhomotop ist. Jede Homotopie  $h$  von  $\text{id}_A$  nach  $0$  (d. h.  $\text{id}_A = d \circ h + h \circ d$ ) heißt dann **kontrahierende Homotopie von  $A$** .

**B.2.11.** Es gibt einen offensichtlichen Funktor  $\text{Kom}(R) \rightarrow \text{Hot}(R)$ , der auf den Objekten die Identität ist und auf den Morphismen die Abbildung  $f \mapsto [f]$ .

Nach Aufgabe **B.2.2** faktorisiert der Funktor  $H_p: \text{Kom}(R) \rightarrow \text{Mod}(R)$  als

$$\text{Kom}(R) \rightarrow \text{Hot}(R) \xrightarrow{H_p} \text{Mod}(R).$$

Insbesondere ist jeder nullhomotope Komplex azyklisch.

**Beispiel B.2.12.** Der Komplex

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/4 \rightarrow \dots$$

ist azyklisch, aber nicht nullhomotop.

**Aufgabe B.2.13** (Isomorphismus kürzen). In Worten: Ist in einem Komplex ein Differential bezüglich geeigneter direkter Summenzerlegungen als Matrix dargestellt und enthält diese Matrix an einer Stelle einen Isomorphismus, so kann man die entsprechenden Summanden streichen und erhält einen in der Homotopiekategorie isomorphen Komplex – der neue Komplex hat überall das offensichtliche Differential außer an derjenigen Stelle, wo wir im Start- und Zielmodul den Summanden gestrichen haben.

In Formeln (und etwas einfacher, da das modifizierte Differential verraten wird): Gegeben sei ein Komplex

$$C = (\dots \rightarrow C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} A_n \oplus B \xrightarrow{d_n=\begin{bmatrix} x & y \\ z & \lambda \end{bmatrix}} A_{n-1} \oplus B' \xrightarrow{d_{n-1}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}} C_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} C_{n-3} \rightarrow \dots)$$

von  $R$ -Moduln. Ist  $\lambda: B \rightarrow B'$  ein Isomorphismus, so ist  $C$  in der Homotopiekategorie  $\text{Hot}(R)$  isomorph zu dem Komplex (warum ist es ein Komplex?)

$$A = (\dots \rightarrow C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{a} A_n \xrightarrow{x-y\lambda^{-1}z} A_{n-1} \xrightarrow{\alpha} C_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} C_{n-3} \rightarrow \dots).$$

Hinweis: Nimm ohne Einschränkung an, dass  $\lambda = \text{id}_B$  gilt. Dann muss man knobeln: Rate  $f: C \rightarrow A$  und  $g: A \rightarrow C$  (was Morphismen von Komplexen sein müssen!) und zeige, dass  $gf$  und  $fg$  jeweils homotop zur Identität sind.

**Lösung B.2.14.** Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $\lambda: B \rightarrow B'$  die Identität  $\text{id}_B = 1: B \rightarrow B$  ist (das neue  $\beta$  ist  $\beta\lambda$ , das neue  $z$  ist  $\lambda^{-1}z$ ). Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{n-2} & \xrightarrow{1} & C_{n-2} & \xrightarrow{1} & C_{n-2} \\
 \uparrow [\alpha \ \beta] & & \uparrow \alpha & & \uparrow [\alpha \ \beta] \\
 A_{n-1} \oplus B & \xrightarrow{[1 \ -y]} & A_{n-1} & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} & A_{n-1} \oplus B \\
 \uparrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 \end{bmatrix} & & \uparrow x-yz & & \uparrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 \end{bmatrix} \\
 A_n \oplus B & \xrightarrow{[1 \ 0]} & A_n & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ -z \end{bmatrix}} & A_n \oplus B \\
 \uparrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & & \uparrow a & & \uparrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
 C_{n+1} & \xrightarrow{1} & C_{n+1} & \xrightarrow{1} & C_{n+1}
 \end{array}$$
  

$$C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C.$$

Da  $C$  ein Komplex ist, gelten

$$\begin{aligned}
 \alpha x + \beta z &= 0, \\
 \alpha y + \beta &= 0, \\
 xa + yb &= 0, \\
 za + b &= 0.
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen

$$\begin{aligned}
 \alpha(x - yz) &= \alpha x - \alpha yz = -\beta z + \beta z = 0, \\
 (x - yz)a &= xa - yza = -yb + yb = 0.
 \end{aligned}$$

Also ist  $A$  in der Tat ein Komplex. Sie zeigen auch, dass die Abbildungen  $f$  und  $g$  Morphismen von Komplexen sind. Die Komposition  $A \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} A$  ist offensichtlich die Identität von  $A$ . Die Komposition  $C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C$  ist

homotop zu  $\text{id}_C$ : Die horizontalen Pfeile im folgenden Diagramm geben den Morphismus  $\text{id}_C - gf$  an.

$$\begin{array}{ccc}
 C_{n-2} & \xrightarrow{0} & C_{n-2} \\
 \uparrow [\alpha \ \beta] & \searrow 0 & \uparrow [\alpha \ \beta] \\
 A_{n-1} \oplus B & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} & A_{n-1} \oplus B \\
 \uparrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 \end{bmatrix} & \searrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \uparrow \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 \end{bmatrix} \\
 A_n \oplus B & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ z & 1 \end{bmatrix}} & A_n \oplus B \\
 \uparrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} & \searrow 0 & \uparrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \\
 C_{n+1} & \xrightarrow{0} & C_{n+1}
 \end{array}$$

$$C \xrightarrow{\text{id}_C - gf} C$$

Die diagonalen Pfeile deuten die Homotopie an, die zeigt, dass die  $\text{id}_C - gf$  nullhomotop ist.

### B.3. Die lange exakte Homologiesequenz.

**B.3.1.** Wir erinnern an einige Definitionen.

- Ein Diagramm  $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$  in  $\text{Mod}(R)$  heißt **exakt bei  $A$** , falls  $\text{im}(f) = \ker(g)$  gilt.
- Ein endliches oder unendliches (in eine oder beide Richtungen) Diagramm

$$\dots \rightarrow A(p+1) \rightarrow A(p) \rightarrow A(p-1) \rightarrow \dots$$

in  $\text{Mod}(R)$  heißt **exakt**, wenn es an jeder Stelle  $A(q)$  exakt ist.

Ein solches Diagramm nennt man auch eine Sequenz.

- Ein exaktes Diagramm der Form  $0 \rightarrow A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A'' \rightarrow 0$  nennt man eine **kurze exakte Sequenz** (hier ist  $0$  „faule“ Notation für  $\{0\}$ ). Oft sagt man auch, dass  $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$  eine kurze exakte Sequenz ist und meint damit eigentlich die rechts und links um Null ergänzte Sequenz. Da dann notwendig  $f$  injektiv und  $g$  surjektiv sind, schreibt man eine solche kurze exakte Sequenz meist als  $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$ .

**Definition B.3.2.** Wir nennen ein Diagramm  $A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} A''$  in  $\text{Kom}(R)$  **exakt bei  $A$** , falls es komponentenweise exakt ist, falls also  $\text{im}(f_p) = \ker(g_p)$  für alle  $p \in \mathbb{Z}$  gilt (mit der Notation in Aufgabe B.1.22 ist dies äquivalent zu  $\text{im}(f) = \ker(g)$ ).

Wir definieren dann analog wie in B.3.1, was ein exaktes Diagramm in  $\text{Kom}(R)$  und was eine kurze exakte Sequenz in  $\text{Kom}(R)$  sind (hierbei steht  $0$  für den Nullkomplex).

**Beispiel B.3.3.** Sei  $A \subset B$  ein Unterkomplex. Dann ist  $A \subset B \rightarrow B/A$  eine kurze exakte Sequenz in  $\text{Kom}(R)$  (und bis auf „Isomorphie von kurzen exakten Sequenzen“ sieht jede kurze exakte Sequenz in  $\text{Kom}(R)$  so aus).

**Satz B.3.4** (Lange exakte Homologiesequenz). Sei  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$  eine kurze exakte Sequenz in  $\text{Kom}(R)$ , d. h.  $0 \rightarrow A_p \xrightarrow{f_p} B_p \xrightarrow{g_p} C_p \rightarrow 0$  ist eine kurze exakte Sequenz in  $\text{Mod}(R)$ , für alle  $p \in \mathbb{Z}$  ist. Dann gelten:

- (a) Für jedes  $p \in \mathbb{Z}$  gibt es genau einen Morphismus

$$\delta_p: H_p(C) \rightarrow H_{p-1}(A)$$

von  $R$ -Moduln, den  $p$ -ten **Verbindungsmorphismus**<sup>114</sup>, so dass für alle  $c \in Z_p(C)$  gilt: Ist  $b \in B_p$  mit  $g(b) = c$  und  $a \in A_{p-1}$  das eindeutige<sup>115</sup> Element mit  $f(a) = d(b)$ , so gilt<sup>116</sup>  $\delta_p([c]) = [a]$ .

(b) Die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \dots & \longrightarrow & H_{p+1}C \\
 & & & & \searrow & & \downarrow \\
 & & & & & & \delta_{p+1} \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & H_p A \xrightarrow{H_p(f)} H_p B \xrightarrow{H_p(g)} H_p C \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \delta_p \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & H_{p-1} A \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

ist exakt. Diese heißt **lange exakte Homologiesequenz**.

*Beweis.* (a) Die Eindeutigkeit ist klar. Für die Existenz, muss man zeigen, dass die durch das angegebene Rezept beschriebene Abbildung wohldefiniert ist: Sei  $h \in H_p(C)$  eine Homologieklass. Seien  $c, c' \in Z_p(C)$  mit  $[c] = h = [c']$  zwei Repräsentanten. Wähle  $b, b' \in B_p$  mit  $g(b) = c$  und  $g(b') = c'$  und definiere  $a, a' \in H_{p+1}(A)$  wie beschrieben. Nun zeige  $[a] = [a']$  per Diagrammjagd.

Dies definiert  $\delta_p$  als Abbildung von Mengen. Leicht sieht man, dass es sich um einen Morphismus von  $R$ -Moduln handelt.

(b) Diagrammjagd, dem Leser überlassen. □

**Aufgabe B.3.5.** Vervollständige den Beweis von Satz B.3.4.

**Aufgabe B.3.6.** Definiere (in hoffentlich korrekter Weise), was ein Morphismus

$$(\alpha, \beta, \gamma): (A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C) \rightarrow (A' \xrightarrow{f'} B' \xrightarrow{g'} C')$$

zwischen kurzen exakten Sequenzen in  $\text{Kom}(R)$  ist und zeige, dass jeder solche Morphismus einen Morphismus zwischen den zugeordneten langen exakten Homologiesequenzen (aufgefasst als Objekte von  $\text{Kom}(R)$ ) induziert.

Die lange exakte Homologiesequenz kann somit als Funktor von der Kategorie der kurzen exakten Sequenzen in  $\text{Kom}(R)$  in die (Unterkategorie der azyklischen (= exakten) Komplexe der) Kategorie  $\text{Kom}(R)$  aufgefasst werden.

**Aufgabe B.3.7.** Sei

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\
 \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C'
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in  $\text{Kom}(R)$ , dessen Zeilen kurze exakte Sequenzen sind. Sind zwei von den drei Morphismen  $\alpha, \beta, \gamma$  Quasi-Isomorphismen, so ist auch der dritte ein Quasi-Isomorphismus.

Hinweis: Aufgabe B.3.6 und Fünferlemma B.4.1.

#### B.4. Fünfer- und Neunerlemma.

**Lemma B.4.1** (Fünferlemma). Sei

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E'
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in  $\text{Mod}(R)$ . Sind die beiden Zeilen exakte Sequenzen<sup>117</sup> und sind alle Vertikalen bis auf die mittlere Isomorphismen, so ist auch die mittlere Vertikale ein Isomorphismus.

<sup>114</sup> auch **Randoperator** genannt, motiviert durch Satz 4.2.1

<sup>115</sup>wegen  $g(d(b)) = d(g(b)) = d(c) = 0$

<sup>116</sup> Wegen  $f(d(a)) = d(f(a)) = d(d(b)) = 0$  und der Injektivität von  $f$  ist  $a$  ein  $(p+1)$ -Kozykel.

<sup>117</sup>wir verlangen nicht, dass es sich um kurze exakte Sequenzen handelt

(Bemerkung: Kann Annahmen etwas abschwächen: Die linke äußere Vertikalen muss nur surjektiv, die rechte äußere Vertikalen nur injektiv sein; [Wik20, Fünferlemma].)

*Beweis.* Dem Leser überlassen. □

**Aufgabe B.4.2.** Beweise Lemma B.4.1.

**Lemma B.4.3** (Neunerlemma). *Sei ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & C'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

in  $\text{Mod}(R)$  gegeben, dessen Zeilen exakt sind. Sind zwei der drei Spalten exakt, so ist auch die dritte exakt.

*Beweis.* Führe eine Diagrammjagd durch oder fasse die Spalten als Komplexe auf verwende den Satz über die lange exakte Homologiesequenz B.3.4. □

**Aufgabe B.4.4.** Folgere den dritten Isomorphiesatz  $\frac{M}{U} \xrightarrow{\sim} \frac{\frac{M}{V}}{\frac{U}{V}}$  für Untermoduln  $V \subset U \subset M$  aus dem Neunerlemma B.4.3.

**B.4.5.** Fünfer- und Neunerlemma gelten allgemeiner in jeder abelschen Kategorie, etwa in der Kategorie  $\text{Kom}(R)$  der Komplexe (was man sofort komponentenweise überprüft).

## ANHANG C. NACHTRÄGE ZUR MENGENTHEORETISCHEN TOPOLOGIE

**Lemma C.0.1** (Koprodukte und endliche Produkte kommutieren in Top). *Sei  $(X_i)_{i \in I}$  eine Familie topologischer Räume und sei  $Y$  ein topologischer Raum. Dann ist die kanonische Abbildung ein Homöomorphismus  $\bigsqcup(X_i \times Y) \xrightarrow{\sim} (\bigsqcup X_i) \times Y$ . steht das nicht schon irgendwo?*

*Beweis.* Die Abbildung ist offensichtlich bijektiv. Die Teilmengen der Form  $\text{incl}_i(U \times V)$ , für  $i \in I$ ,  $U \subseteq X_i$  und  $V \subseteq Y$ , bilden eine Basis der Topologie auf der linken Seite. Die Teilmengen der Form  $\text{incl}_i(U) \times V$ , für  $i \in I$ ,  $U \subseteq X_i$  und  $V \subseteq Y$ , bilden eine Basis der Topologie auf der rechten Seite. Da unsere Bijektion  $\text{incl}_i(U \times V)$  bijektiv auf  $\text{incl}_i(U) \times V$  wirft, ist sie ein Homöomorphismus. □

**C.0.2.** Wir verwenden die Definition einer finalen Abbildung, siehe [Sch20, Definition 2.8.77].

**Lemma C.0.3.** *Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine finale Abbildung. Ist  $U \subseteq Y$  eine offene Teilmenge, so ist die induzierte Abbildung  $g: f^{-1}(U) \rightarrow U$  ebenfalls final.*<sup>118</sup>

*Beweis.* Sei  $V \subseteq U$  eine Teilmenge mit  $g^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$ . Wegen  $f^{-1}(U) \subseteq X$  gilt  $g^{-1}(V) = f^{-1}(V) \subseteq X$ . Da  $f$  final ist, gilt  $V \subseteq Y$ , also  $V = V \cap U \subseteq U$ . □

**Proposition C.0.4.** *Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine finale, surjektive Abbildung topologischer Räume. Sei  $L$  ein lokal quasi-kompakter Raum ( $:=$  jede Umgebung jedes Punktes läßt sich zu einer quasi-kompakten Umgebung verkleinern). Dann ist auch  $f \times \text{id}: X \times L \rightarrow Y \times L$  final (und surjektiv).*

<sup>118</sup>Analog ist für jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subset X$  auch  $f^{-1}(A) \rightarrow A$  final (ersetze im Beweis „offen“ durch „abgeschlossen“). Die entsprechende Aussage folgt dann natürlich für jede lokal abgeschlossene Teilmenge, da jede solche ein Schnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge ist.

*Beweis.* Sicherlich ist  $f \times \text{id}$  stetig. Sei  $T \subset Y \times L$  eine beliebige Teilmenge, für die  $U := (f \times \text{id})^{-1}(T)$  offen in  $X \times L$  ist. Zu zeigen ist, dass  $T$  offen in  $Y \times L$  ist. Zur Illustration ein Bild, das auch später Erklärtes enthält:

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \subset & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & & \uparrow \text{pr} & & \uparrow \text{pr} \\
 & & X \times L & \xrightarrow{f \times \text{id}} & Y \times L \\
 & & \textcircled{\cup} & & \cup \\
 X' \times K & \subset & U & & T \\
 \cup & \subset & \cup & & \cup \\
 \{\hat{y}\} \times K & \ni & (\hat{y}, l) & \longmapsto & (y, l)
 \end{array}$$

Sei  $(y, l) \in T$  ein beliebiger Punkt. Da  $f$  surjektiv ist, gibt es ein  $\hat{y} \in X$  mit  $f(\hat{y}) = y$ , also  $(\hat{y}, l) \in U$ .

Sei  $K$  eine quasi-kompakte Umgebung von  $l$  in  $L$  mit  $\{\hat{y}\} \times K \subset U$  (zur Existenz: Nach Definition der Produkttopologie („Box-Mengen“ bilden Basis) gibt es  $V \textcircled{\subset} X$  und  $W \textcircled{\subset} L$  mit  $(\hat{y}, l) \in V \times W \subset U$ . Weil  $L$  lokal quasi-kompakt ist, können wir  $W$  zu einer quasi-kompakten Umgebung  $K$  von  $l$  verkleinern. Dies ist ein mögliches  $K$ .)

Definiere

$$\begin{aligned}
 X' &:= \{x \in X \mid \{x\} \times K \subset U\} \\
 &= \{x \in X \mid \{f(x)\} \times K \subset T\}.
 \end{aligned}$$

Dann gelten:

- $\hat{y} \in X'$ : Klar nach Wahl von  $K$ .
- $X' \textcircled{\subset} X$ : Sei  $x \in X'$ . Dann gibt es für jedes  $k \in K$  wegen  $(x, k) \in \{x\} \times K \subset U \textcircled{\subset} X \times L$  offene Mengen  $V_k \textcircled{\subset} X$  und  $W_k \textcircled{\subset} L$  mit  $(x, k) \in V_k \times W_k \subset U$ . Die Quasi-Kompaktheit von  $K$  liefert endlich viele Punkte  $k_1, \dots, k_n \in K$  mit  $K \subset W_{k_1} \cup \dots \cup W_{k_n}$ . Es folgt

$$\left( \bigcap V_{k_i} \right) \times K \subset \left( \bigcap V_{k_i} \right) \times \left( \bigcup W_{k_i} \right) \subset U.$$

Alle Punkte der offenen Umgebung  $\bigcap_{i=1}^n V_{k_i}$  von  $x$  in  $X$  liegen also in  $X'$ . Damit ist  $X'$  offen in  $X$ .

- $X' = f^{-1}(f(X'))$ : Die Inklusion  $\subset$  ist trivial. Sei  $x \in f^{-1}(f(X'))$ . Dann gibt es ein  $x' \in X'$  mit  $f(x) = f(x')$ , also  $\{f(x)\} \times K = \{f(x')\} \times K \subset T$  und somit  $x \in X'$ .

Aus  $f^{-1}(f(X')) = X' \textcircled{\subset} X$  und der Finalität von  $f$  folgt  $f(X') \textcircled{\subset} Y$ . Weil  $y = f(\hat{y}) \in f(X') \textcircled{\subset} Y$  gilt und  $K$  eine Umgebung von  $l$  in  $L$  ist, ist  $f(X') \times K$  eine Umgebung von  $(y, l)$  in  $Y \times L$ , die wegen  $X' \times K \subset U$  in  $T$  enthalten ist. Dies zeigt, dass  $T$  offen in  $Y \times L$  ist.  $\square$

## LITERATUR

- [Bre97] Glen E. Bredon. *Topology and geometry*, volume 139 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1997. Corrected third printing of the 1993 original.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [Lüc05] Wolfgang Lück. *Algebraische Topologie*. vieweg studium; Aufbaukurs Mathematik. Vieweg + Teubner, Wiesbaden, 2005.
- [Mun84] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1984.
- [Sch20] Olaf M. Schnürer. Algebraische Topologie: Fundamentalgruppen und Überlagerungstheorie. [https://math.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/AG-Algebra/Algebraische\\_Topologie/algebraische-topologie-fundamentalgruppen-und-ueberlagerungen-paderborn-2019.pdf](https://math.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/AG-Algebra/Algebraische_Topologie/algebraische-topologie-fundamentalgruppen-und-ueberlagerungen-paderborn-2019.pdf), 2020.
- [Soe20] Wolfgang Soergel. Singuläre Homologie. <http://home.mathematik.uni-freiburg.de/soergel/Skripten/XXTS.pdf>, 2020.
- [Spa81] Edwin H. Spanier. *Algebraic topology*. Springer-Verlag, New York, 1981. Corrected reprint.
- [Sta18] The Stacks Project Authors. Stacks project. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [vQ79] Boto von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag, Berlin-New York, second edition, 1979. Hochschultext. [University Text].
- [Wik20] Contributors Wikipedia. Wikipedia, 2020. [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org).

INSTITUT FÜR MATHEMATIK, UNIVERSITÄT PADERBORN, WARBURGER STRASSE 100, 33098 PADERBORN, GERMANY  
*Email address:* `olaf.schnuerer@math.uni-paderborn.de`