Mathematisches Institut
der Universität Paderborn
Prof. Dr. I. Burban und H. Herr

WiSe 2019/20
Dienstag, 21.01.2020
Blatt 14

Übungen zur Einführung in die Darstellungstheorie

60. In dieser Aufgabe wird folgender Gruppenisomorphismus konstruiert:

$$\big(\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})\big)/\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$$

(a) Wir betrachten den reellen Vektorraum

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \,\Big|\, \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\},$$

das heißt, wir verwenden den Isomorphismus $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{T} \mathbb{H}$ gegeben durch

$$T(a,b,c,d) := \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie nach, dass für $x \in \mathbb{R}^4$ gilt: $\|x\|^2 = \det\big(T(x)\big)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ auf $\mathbb{H}$ operiert vermöge

$$(A,B) \circ H := AHB^{-1}.$$

(c) Beweisen Sie, dass dies einen Gruppenhomomorphismus liefert:

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \times \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{O}_4(\mathbb{R})$$

(d) Beweisen Sie anschließend, dass
- $\ker(\pi) = \big\{(I,I), (-I,-I)\big\}$
- $\mathrm{im}(\pi) \subseteq \mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$.

Bemerkung. Der Beweis der Surjektivität von π ist komplizierter und wird weggelassen. Der Vektorraum $\mathbb{H}$ ist eine $\mathbb{R}$–Algebra bezüglich der Multiplikation. Das ist eine Darstellung der berühmten *Quanternionenalgebra*.

61. In dieser Aufgabe wird folgender Gruppenhomomorphismus konstruiert:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}_{(3,1)}(\mathbb{R}).$$

Bitte wenden!

(a) Betrachten wir den Minkowski-Raum $\left(\mathbb{R}^4, (-,-)\right)$ mit

$$(x,y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Des Weiteren sei $V = \left\{X \in \mathsf{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \,|\, X^* = X\right\}$, zusammen mit der Paarung $\langle - \,,\, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$, welche folgendermaßen definiert ist:

$$\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\big(\det(X+Y) - \det(X) - \det(Y)\big).$$

Rechnen Sie nach, dass $\left(V, \langle -, -\rangle\right)$ und $\left(\mathbb{R}^4, (-,-)\right)$ isometrisch isomorph sind, vermöge der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow V, (x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_3 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Abbildung

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} \mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_4(\mathbb{R}),\ A \mapsto (X \mapsto AXA^*)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus. Rechnen Sie nach, dass gilt:

- $\ker(\pi) = \{\pm I\}$
- $\mathrm{im}(\pi) \subset \mathrm{O}_{(3,1)}(\mathbb{R})$.

(c) Rechnen Sie nach, dass $\mathrm{im}(\pi) \subset \mathrm{SO}_{(3,1)}(\mathbb{R})$ ist. Benutzen Sie dafür den Fakt, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ von Matrizen der Gestalt
$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \exp(\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-\theta) \end{pmatrix}$
für $\theta \in \mathbb{R}$ erzeugt wird.

Bemerkung. Die Abbildung π ist *nicht* surjektiv. Das Bild von π ist die so-genannte *eigentliche orthochrone Lorentz–Gruppe* $\mathrm{SO}^+_{(3,1)}(\mathbb{R})$.

62. Sei G eine endliche Untergruppe von $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$. Beweisen Sie, dass G zu einer endlichen Untergruppe von $\mathsf{SU}_n(\mathbb{C})$ konjugiert ist.

63.* Sei G eine Lie Gruppe, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $(\mathcal{H}, \pi)$, $(\mathcal{H}, \rho)$ zwei stetige unitäre Darstellungen von G. Beweisen Sie die folgende Aussage: Sind $(\mathcal{H}, \pi)$, $(\mathcal{H}, \rho)$ isomorph (mit stetigem Isomorphismus), so sind sie auch unitär äquivalent.
Hinweis: Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Isomorphismus. Dann ist $A = T^*T$ positiv, d.h. selbstadjungiert und $\langle Au, u\rangle > 0$ für alle $u \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$. Benutzen Sie dabei folgenden Fakt (ohne ihn zu beweisen): Es gibt einen positiven Operator B mit den Eigenschaften

- $B^2 = A$,
- für jedes $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $AX = XA$ gilt ebenfalls $BX = XB$.

Beweisen Sie, dass TB^{-1} der gesuchte unitäre Isomorphismus ist.

Abgabe: Dienstag, 28.01.2020, 9:00 Uhr.