

# Die Symmetrien der regulären Polyeder

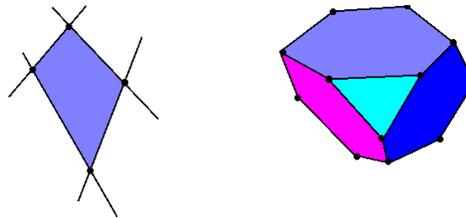
Margit Rösler

Lehrerfortbildung am Math. Institut der TU Clausthal, April 2008

## 1. Reguläre Polyeder

Ein Polyeder ist ein dreidimensionaler Körper, der berandet ist von endlich vielen ebenen Vielecken (den Flächen), wobei jede Kante eines Vielecks mit genau einer Kante eines weiteren Vielecks zusammenfällt. Wir werden uns dabei stets auf konvexe Polyeder beschränken, d.h. solche, bei denen die Verbindungsstrecke von je zwei Punkten des Polyeders wieder ganz in ihm liegt. Wir beginnen mit einer präziseren Definition:

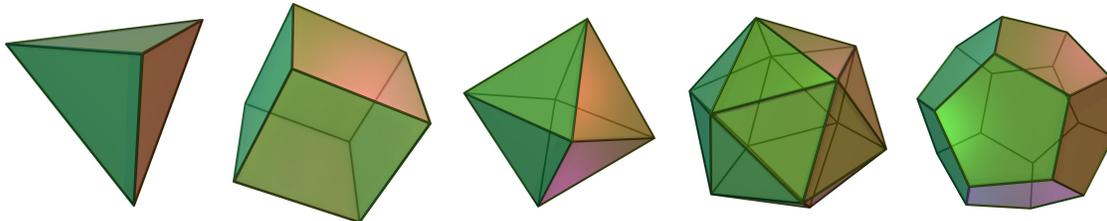
**Definition.** Ein (konvexes) *Polytop* im  $\mathbb{R}^d$  ist eine beschränkte Teilmenge  $P \subset \mathbb{R}^d$ , welche sich als Durchschnitt endlich vieler Halbräume darstellen läßt und nicht ganz in einer Ebene enthalten ist. Im Fall  $d = 2$  sprechen wir von einem *Polygon*, im Fall  $d = 3$  von einem *Polyeder*.



Ein Polygon heißt *regulär*, wenn seine Ecken ein regelmässiges  $n$ -Eck bilden. Ein Polyeder heißt regulär, wenn seine Flächen allesamt kongruente regelmäßige  $p$ -Ecke sind, und jede Ecke zu genau  $q$  Polygonflächen gehört. Das Paar  $\{p, q\}$  heißt das *Schläfli-Symbol* des Polyeders.

Es gibt genau 5 reguläre Polyeder, die in drei Gruppen aufgeteilt sind:

- Tetraeder
- Würfel und Oktaeder
- Ikosaeder und Dodekaeder.



Tetraeder

Würfel

Oktaeder

Ikosaeder

Dodekaeder

Dies sind die sogenannten *Platonischen Körper*. Platon hat sie in seinem Dialog *Timaios* (um 360 v. Chr.) ausführlich beschrieben und als Repräsentanten der 5 Elemente Feuer (Tetraeder), Wasser (Ikosaeder), Luft (Oktaeder), Erde (Würfel) und Kosmos (Dodekaeder) dargestellt. In seinen *Elementen* hat Euklid geometrische Konstruktionen der Platonischen Körper angegeben, und damit auch mathematisch stringent ihre Existenz bewiesen.

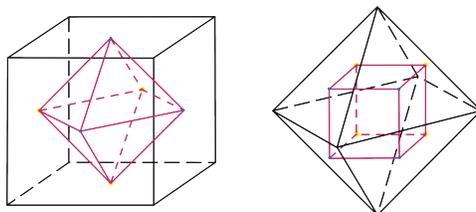
Der Rand eines Polyeders besteht aus Ecken, Kanten und Flächen. Wir bezeichnen mit  $e$  die Anzahl der Ecken, mit  $k$  die Anzahl der Kanten und mit  $f$  die Anzahl seiner Flächen.

Hier die Daten der Platonischen Körper:

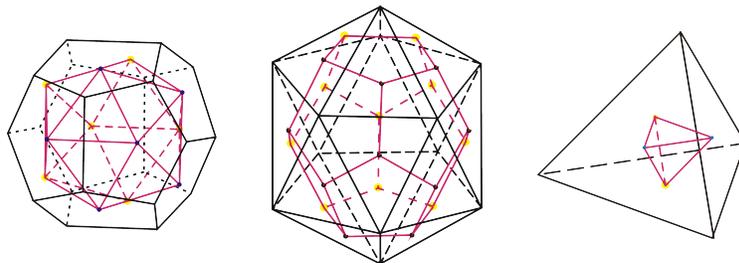
Polyeder	e	k	f	Schläfli-Symbol
Tetraeder	4	6	4	{3,3}
Würfel	8	12	6	{4,3}
Oktaeder	6	12	8	{3,4}
Ikosaeder	12	30	20	{3,5}
Dodekaeder	20	30	12	{5,3}

Würfel und Oktaeder sind zueinander *dual*:

1. Die Mittelpunkte der Flächen eines Würfels bilden einen Oktaeder.
2. Die Mittelpunkte der Flächen eines Oktaeders bilden einen Würfel.



Analog sind Dodekaeder und Ikosaeder zueinander dual. Der Tetraeder ist selbstdual.



Für alle platonischen Körper sieht man, dass  $e - k + f = 2$  gilt. Dies ist Spezialfall einer sehr allgemeinen Aussage:

**Theorem (Eulerscher Polyedersatz).** *Für einen beliebigen (konvexen) Polyeder  $P$  mit  $e$  Ecken,  $k$  Kanten und  $f$  Flächen gilt*

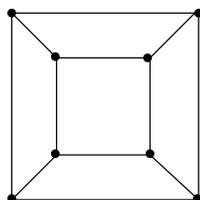
$$e - k + f = 2.$$

Diese Formel hat vielfältige Verallgemeinerungen, die in der Topologie und Differentialgeometrie eine wichtige Rolle spielen. So etwa besteht der Rand eines  $d$ -dimensionalen (konvexen) Polytops aus Flächen der Dimensionen 0 bis  $d - 1$ . Bezeichnet  $f_i$  die Anzahl der  $i$ -dimensionalen Flächen, so gilt

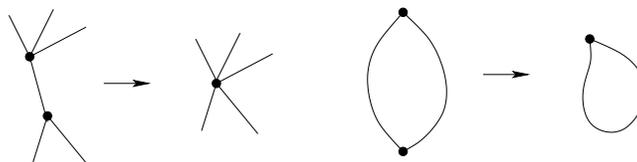
$$f_0 - f_1 + f_2 - f_3 \pm \dots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 + (-1)^{d-1}.$$

Die linke Seite dieser Formel nennt man die *Eulercharakteristik* des Polytops.

*Beweis des Eulerschen Polyedersatzes.* Wir entfernen eine der Flächen des Polyeders. Der verbleibende Polyederrand läßt sich dann stetig flach in eine Ebene biegen. Auf diese Weise erhält man einen planaren zusammenhängenden Graphen  $G$ , bestehend aus  $e$  Ecken,  $k$  Kanten und  $f$  Flächen inklusive der unbeschränkten Außenfläche. Planar heißt dabei, dass sich die Kanten nicht kreuzen. Im Fall eines Würfels erhält man den folgenden Graphen:



Setze  $\chi(G) = e - k + f$ . Wir reduzieren nun sukzessive die Zahl der Kanten: Wir wählen eine Kante von  $G$ , die ja 2 Ecken verbindet, und kontrahieren sie zu einer einzigen Ecke. Dabei entsteht ein neuer zusammenhängender Graph mit  $k - 1$  Kanten,  $e - 1$  Ecken,  $f$  Flächen. Es bleibt also  $\chi(G') = \chi(G)$ . Der Graph  $G'$  kann nun aber auch eine Schlinge enthalten, d.h. eine Kante, deren beide Ecken zusammenfallen. Entfernt man diese (unter Beibehaltung der Ecke) so entsteht ein neuer Graph mit einer Kante weniger und auch einer Fläche weniger, bei gleichbleibender Eckenzahl. Wieder bleibt  $\chi$  unverändert.



Iteration des Verfahrens führt auf einen Graphen  $G_0$  der keine Kanten mehr und nur noch eine Ecke enthält. Dabei ist  $f = 1$ , und es gilt daher  $\chi(G_0) = 1 - 0 + 1 = 2$ .  $\square$

Gibt es weitere reguläre Polyeder außer den Platonischen Körpern? Sei  $P$  ein beliebiger regulärer Polyeder. Der Typ sei  $\{p, q\}$ . Wir zählen die Kanten von  $P$ : pro Fläche sind es  $p$  Stück. Da jede Kante zu genau 2 Flächen gehört, gilt  $2k = fp$ . Andererseits stoßen an jeder Ecke  $q$  Kanten zusammen, wobei jede Kante zu zwei Ecken gehört; also ist  $2k = eq$ . Zusammengefaßt:

$$fp = 2k = eq.$$

Einsetzen in die Eulersche Formel liefert nach kurzer Rechnung:

$$k = 2pq / (2p + 2q - pq).$$

Der Nenner muss positiv sein, also folgt

$$(p - 2)(q - 2) < 4.$$

Aus offensichtlichen geometrischen Gründen ist ferner  $p, q > 2$ . Für die Schläfli-Symbole bleiben hiermit nur die folgenden Möglichkeiten

$$\{3, 3\}, \{4, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 3\}, \{3, 5\}.$$

Dies sind gerade die Symbole von Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Man überlegt sich leicht, dass es in jedem dieser Fälle tatsächlich nur einen regulären Polyeder mit diesem Symbol gibt:

Beim Tetraeder-Symbol  $\{3, 3\}$  startet man mit einem gleichseitigen Dreieck und fügt an jede Kante ein weiteres an. Hieraus läßt sich durch Zusammenfügen benachbarter Kantenpaare nur in einer Weise ein konvexer Körper bilden (modulo einer Spiegelung an der Ebene des Ausgangsdreiecks).

Beim Würfel-Symbol geht man analog vor; man erhält 4 zur Grundfläche vertikale Flächen, die nur auf eine Weise durch eine zur Grundfläche kongruente Fläche abzuschliessen sind. Da Würfel und Oktaeder zueinander dual sind, kann es auch nur einen Körper mit dem Symbol des Oktaeders geben. Beim Symbol des Ikosaeders startet man mit eine räumlichen Pyramide mit 5 gleichseitigen Dreiecken als Flächen. Dabei bleibt bei jedem Dreieck eine freie Kante, und an je zwei benachbarte Kanten muss man ein weiteres Dreieck anheften. Auf die entstehende Schale aus 10 Dreiecken läßt sich in genau einer Weise eine zweite, kongruente Schale aufsetzen. Beide zusammen dergeben den Ikosaeder. Die Eindeutigkeit beim Dodekaeder-Symbol folgt wieder aus Dualität.

## 2. Orthogonale Abbildungen und Bewegungen

Die regulären Polyeder besitzen zahlreiche schöne Symmetrieeigenschaften. Um diese mathematisch beschreiben zu können, stellen wir zunächst einige Grundbegriffe aus der linearen Algebra zusammen. Wir betrachten dabei stets den  $\mathbb{R}^d$  als euklidischen Raum mit Skalarprodukt  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$  und Norm  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ .

**Definition.** Eine Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt *orthogonal*, falls sie das Skalarprodukt erhält, d.h. falls gilt:

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Jede orthogonale Abbildung ist automatisch linear (dies ist eine Standardübung in linearer Algebra) und bijektiv. Die identische Abbildung ist natürlich orthogonal. Aus der Definition sieht man ferner, dass die Umkehrung einer orthogonalen Abbildung ebenfalls orthogonal ist, und ebenso die Hintereinanderschaltung zweier orthogonaler Abbildungen. Die Menge der orthogonalen Abbildungen des  $\mathbb{R}^d$  bildet also mit der Verknüpfung von Abbildungen eine *Gruppe*, die *orthogonale Gruppe*  $O(d)$ .

Jede lineare Abbildung des  $\mathbb{R}^d$  auf sich läßt sich bekanntlich durch eine Matrix

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1d} \\ a_{21} & \cdots & a_{2d} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{d1} & \cdots & a_{dd} \end{pmatrix}$$

darstellen; dabei sind die Spalten von  $A$  gerade die Bilder der Standardbasisvektoren  $e_1, \dots, e_d$ . Bei dieser Identifikation werden orthogonale Abbildungen dargestellt durch orthogonale Matrizen, d.h.  $A$  erfüllt  $A^T A = I$ .

Die Determinante einer orthogonalen Matrix (bzw. Abbildung) kann nur die Werte  $\pm 1$  annehmen. Man setzt

$$SO(d) = \{\varphi \in O(d) : \det \varphi = 1\}.$$

Dies ist die *spezielle orthogonale Gruppe* der Dimension  $d$ . Sie hat Index 2 in  $O(d)$ , d.h. mit einem beliebigen Element  $\sigma \in O(d) \setminus SO(d)$  hat man eine Zerlegung von  $O(d)$  in zwei disjunkte Nebenklassen:

$$O(d) = SO(d) \cup \sigma SO(d)$$

wobei rechts die Elemente mit Determinante  $-1$  stehen.

**Der Fall  $d=2$ .** Die Gruppe  $SO(2)$  besteht aus den Matrizen der Form

$$d_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$d_t$  beschreibt eine Drehung um den Winkel  $t$  gegen den Uhrzeigersinn.  $O(d) \setminus SO(d)$  besteht aus den Matrizen der Form

$$\sigma_t = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\sigma_t$  ist eine Spiegelung an der Geraden durch 0, welche mit der  $x$ -Achse den Winkel  $t/2$  einschließt.

**Der Fall  $d=3$ .** Jedes Element  $\varphi \in SO(d)$  besitzt 1 als Eigenwert. Sei  $v$  ein zugehöriger Eigenvektor. Ergänzt man  $v$  zu einer Orthonormalbasis  $\mathcal{B}$  von  $\mathbb{R}^3$ , so hat  $\varphi$  bezüglich dieser Basis die Matrixdarstellung

$$[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

mit geeignetem  $t \in \mathbb{R}$ . (Denn die untere Blockmatrix muss aus  $SO(2)$  sein.) Also ist  $\varphi$  eine Drehung um die Achse durch den Eigenvektor  $v$ .

Ist  $H$  eine Ebene durch den Ursprung, so erhält man durch Spiegelung an dieser Ebene eine orthogonale Abbildung  $\sigma$  mit Determinante  $-1$ . Wählt man eine Orthogonalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$  des  $\mathbb{R}^3$  so, dass  $v_2, v_3 \in H$  und  $v_1 \perp H$ , so ist die Matrix von  $\sigma$  in dieser Basis gegeben durch

$$[\sigma]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Definition.** Eine Abbildung  $\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  heißt *Bewegung*, falls

$$\|\beta(x) - \beta(y)\| = \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Die Hintereinanderausführung zweier Bewegungen ist offenbar wieder eine solche. Wichtige Klassen von Bewegungen sind die orthogonalen Abbildungen sowie die Translationen  $t_v : x \mapsto x + v$  um einen festen Vektor  $v \in \mathbb{R}^d$ .

**Lemma.** Sei  $\beta$  eine Bewegung des  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist die Abbildung  $\varphi(x) := \beta(x) - \beta(0)$  orthogonal.

*Beweis.* Zum einen gilt

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle.$$

Andererseits erhält man

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|\beta(x) - \beta(y)\|^2 = \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2 = \|\varphi(x)\|^2 + \|\varphi(y)\|^2 - 2\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle \\ &= \|x - 0\|^2 + \|y - 0\|^2 - 2\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle. \end{aligned}$$

Zusammen folgt:  $\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ . □

Einige Konsequenzen:

1. Jede Bewegung des  $\mathbb{R}^d$  ist von der Form  $\beta = t \circ \varphi$  mit einer orthogonalen Abbildung  $\varphi$  und einer Translation  $t$ .
2. Jede Bewegung ist bijektiv (denn orthogonale Abbildungen und Translationen sind bijektiv).
3. Eine Bewegung  $\beta$  des  $\mathbb{R}^d$  ist orthogonal genau dann, wenn  $\beta(0) = 0$  gilt.

Auch die Menge der Bewegungen des  $\mathbb{R}^d$  bildet also eine Gruppe, die sogenannte *affine Gruppe* des  $\mathbb{R}^d$ .

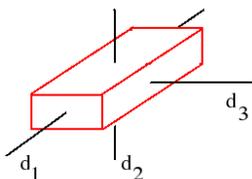
### 3. Symmetriegruppen

Der Grad der Symmetrie eines Polytops, oder einer allgemeineren Teilmenge des  $\mathbb{R}^d$ , drückt sich in der Anzahl und Reichhaltigkeit der Bewegungen aus, durch die es in sich selbst überführt wird.

**Definition.** Sei  $F \subseteq \mathbb{R}^d$ . Eine *Symmetrie* von  $F$  ist eine Bewegung  $\beta$  des  $\mathbb{R}^d$ , die  $F$  in sich selbst überführt, d.h.  $\beta(F) = F$ . Die Menge der Symmetrien von  $F$  bildet eine Untergruppe  $\Sigma(F)$  der affinen Gruppe. Sie heißt die *Symmetriegruppe* von  $F$ .

*Beispiele.* 1. Die Symmetriegruppe der Sphäre  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$  ist die volle orthogonale Gruppe  $O(3)$ . Analoges gilt in beliebiger Dimension  $d$ .

2. Wir betrachten einen Ziegelstein  $Z$  mit Kantenlängen 1, 2, 4, und legen das Koordinatensystem wie in der Skizze, mit dem Ursprung in seinem Mittelpunkt.



Dann läßt jede Drehung  $d_i$  mit Drehwinkel  $\pi$  um eine der Koordinatenachsen den Ziegel invariant, und  $D = \{id, d_1, d_2, d_3\}$  ist offenbar bereits die Gesamtheit aller Drehungen in der Symmetriegruppe von  $Z$ . Die zugehörigen Matrizen lassen sich leicht angeben; z.B. ist

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

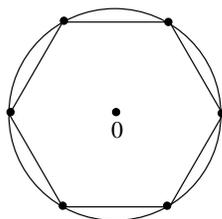
Jedes Element  $d_i$  hat die Ordnung 2, d.h.  $d_i^2 = 1$ . Ferner gilt  $d_1 d_2 = d_3$  etc., d.h.  $D$  ist tatsächlich eine Gruppe. Sie ist isomorph zur Kleinschen Vierergruppe.

Unser Ziel ist es, die Symmetriegruppen der regulären Polyeder zu bestimmen. Weil die Situation im  $\mathbb{R}^2$  geometrisch einfacher ist als im  $\mathbb{R}^3$ , wollen wir zuvor jedoch die Symmetriegruppen der regulären Polygone im  $\mathbb{R}^2$ , also der regelmässigen  $n$ -Ecke, betrachten.

### 3. Die Symmetrien der regulären Polygone: Diedergruppen

Wir beginnen mit einer geometrischen Betrachtung, die Rolle des Ursprungs betreffend: Sei  $P$  ein reguläres Polygon im  $\mathbb{R}^2$ . Wir legen den Ursprung des Koordinatensystems so, dass er mit dem Zentrum von  $P$  (d.h. dem Schwerpunkt der Eckenmenge von  $P$ ) zusammenfällt. Dann liegen die Ecken von  $P$  auf einem Kreis um 0. Ist  $\beta = \varphi + t_v$  eine Bewegung des  $\mathbb{R}^2$ , so ist  $\beta(P)$  ein Polygon, dessen Ecken auf einem verschobenen Kreis mit Mittelpunkt  $v$  liegen. Dabei werden die Ecken von  $P$  auf die Ecken von  $\beta(P)$  abgebildet. Die Bedingung  $\beta(P) = P$  ist daher nur zu erfüllen, wenn  $v = 0$  ist. Konsequenz:

Die Symmetriegruppe  $\Sigma(P)$  ist eine Untergruppe der  $O(2)$ , und jedes  $\varphi \in \Sigma(P)$  permutiert die Ecken von  $P$ .



Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Ecken von  $P$  gegeben sind durch die  $n$ -ten Einheitswurzeln

$$e_k = e^{2k\pi i/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Es bezeichne nun  $d$  die Drehung um den Winkel  $2\pi/n$  um den Ursprung, und  $s$  die Spiegelung an der  $x_1$ -Achse, in Matrixform

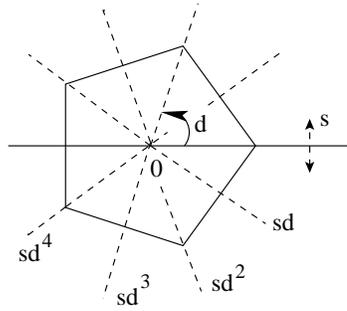
$$d = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}; \quad s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$d$  und  $s$  gehören offenbar zur Symmetriegruppe von  $P$ , und damit auch jede beliebige Hintereinanderausführung dieser beiden Operationen. Wie viele verschiedene hiervon gibt es? Zunächst sind  $id, d, d^2, \dots, d^{n-1}$  verschiedene Drehungen in  $\Sigma(P)$ . Weiter ist  $d^n = id$  und damit  $d^{n+1} = d, d^{n+2} = d^2, \dots, d^{-1} = d^{n-1}, \dots$ . Die von  $d$  erzeugte Untergruppe der Drehgruppe  $D(P) = \Sigma(P) \cap SO(2)$  ist also gegeben durch

$$\langle d \rangle = \{id, d, \dots, d^{n-1}\}.$$

Die Spiegelung  $s$  erfüllt  $s^2 = id$ . Wegen  $\det(sd) = -1$  ist ferner auch  $sd$  eine Spiegelung im  $\mathbb{R}^2$  und erfüllt damit  $(sd)^2 = id$ . Also haben wir die Relation  $ds = sd^{n-1}$ . Analog sieht man  $d^k s = sd^{n-k}$  für alle  $k$  mit  $1 < k < n$ . Damit ist die von  $d$  und  $s$  erzeugte Untergruppe von  $\Sigma(P)$  gegeben durch

$$\langle d, s \rangle = \{id, d, \dots, d^{n-1}, s, sd, \dots, sd^{n-1}\} =: D_n$$



Diese Gruppe heißt die  $n$ -te Diedergruppe. Sie enthält bereits alle Symmetrien von  $P$ , denn ist  $\varphi \in O(2)$  eine solche, so wird die Ecke  $e_0 = 1$  durch  $\varphi$  auf eine Ecke  $e_k = (\cos 2\pi k/n, \sin 2\pi k/n)$  abgebildet. Damit ist die Matrix von  $\varphi$  von der Form

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi k/n) & * \\ \sin(2\pi k/n) & * \end{pmatrix}.$$

Weil die Matrix orthogonal sein muss, gibt es für die Einträge in der zweiten Spalte nur zwei Möglichkeiten. Eine führt auf die Drehung  $\varphi = d^k$ , die andere auf die Spiegelung  $\varphi = d^k s = sd^{n-k}$ .

Umgekehrt gilt der folgende Satz:

**Theorem.** *Ist  $G$  eine endliche Untergruppe der  $O(2)$ , so ist  $G$  entweder eine zyklische Gruppe, die von einer Drehung um den Winkel  $2\pi/n$  erzeugt wird, oder eine Diedergruppe.*

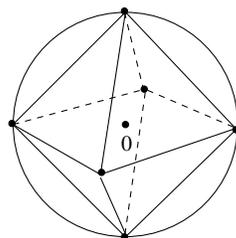
Ein Beweis findet sich in [4], Chapter 15.

### 3. Die Symmetrien der regulären Polyeder

Die Ecken eines regulären Polyeders  $P$  im  $\mathbb{R}^3$  liegen auf einer Sphäre, deren Mittelpunkt wir in den Ursprung des Koordinatensystems legen können. Wie beim Fall der Polygone sieht man, dass die Symmetriegruppe  $\Sigma(P)$  dann eine Untergruppe der  $O(3)$  ist, wobei jedes  $\varphi \in \Sigma(P)$  die Ecken von  $P$  permutiert. Die Drehgruppe von  $P$  ist die Untergruppe

$$D(P) := \Sigma(P) \cap SO(3).$$

Sie hat den Index 2 in  $\Sigma(P)$ .



Ist  $\sigma_0$  ein beliebiges Element aus  $\Sigma(P) \setminus D(P)$ , so erhält man  $\Sigma(P)$  als Vereinigung der beiden disjunkten Nebenklassen

$$\Sigma(P) = D(P) \cup \sigma_0 D(P).$$

Es genügt dann,  $D(P)$  zu bestimmen. Dieser Situation werden wir beim Würfel und beim Ikosaeder begegnen. Als Gruppe ist dann  $\Sigma(P) \cong D(P) \times \mathbb{Z}_2$ .

Wie bereits bemerkt, permutiert jedes  $\varphi \in \Sigma(P)$  die Ecken von  $P$ . Dabei gibt es nur eine Symmetrie, die alle Ecken festläßt, nämlich die identische Abbildung  $id$ . Zwei verschiedene Symmetrien induzieren also auch verschiedene Permutationen der Eckenmenge.

**Definition.** Die *Symmetrische Gruppe*  $S_n$  ist die Gruppe aller Permutationen der Menge  $\{1, \dots, n\}$ .

Numerieren wir die Ecken des Polyeders mit  $1, \dots, n$ , so können wir jedes Element von  $\Sigma(P)$  mit einer eindeutigen Permutation aus  $S_n$  und die Gruppe  $\Sigma(P)$  mit einer Untergruppe der  $S_n$  identifizieren.

### Einschub zur symmetrischen Gruppe:

Die symmetrische Gruppe  $S_n$  hat die Ordnung  $n!$ . Jedes ihrer Elemente läßt sich als Produkt von Zykeln  $(i_1, i_2, \dots, i_k)$  mit paarweise verschiedenen Einträgen  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$  schreiben. In einem solchen Zykel wird  $i_1$  auf  $i_2$  geschickt,  $i_2$  auf  $i_3$  und so weiter, und schließlich  $i_k$  auf  $i_1$ ; die übrigen Elemente werden festgelassen. Ein  $k$ -Zykel läßt sich in einfacher Weise als Produkt von  $k$  Transpositionen  $(i, j)$  darstellen, nämlich

$$(i_1, \dots, i_k) = (i_1, i_2) \cdots (i_{k-1}, i_k)(i_k, i_1).$$

Insbesondere wird  $S_n$  von den Transpositionen erzeugt. Ähnlich der Determinante auf  $O(n)$  hat man auf  $S_n$  die Signatur. Für eine Permutation  $\sigma \in S_n$  ist  $\text{sign}(\sigma) = 1$ , falls  $\sigma$  eine gerade Anzahl von Fehlständen  $i < j$  mit  $\sigma(i) > \sigma(j)$  hat, und  $\text{sign}(\sigma) = -1$  im Fall einer ungeraden Anzahl von Fehlständen.  $\text{sign}$  ist ein Gruppen-Homomorphismus

$$\text{sign} : S_n \rightarrow (\{\pm 1\}, \cdot).$$

Die Signatur einer Transposition ist  $-1$ , die eines  $k$ -Zykels daher  $(-1)^k$ . Die *Alternierende Gruppe* ist definiert als

$$A_n := \{\sigma \in S_n : \text{sign} \sigma = 1\}.$$

Ihre Ordnung ist  $|A_n| = n!/2$ . Die  $A_n$  wird bei den Symmetriegruppen der regulären Polyeder eine wichtige Rolle spielen.

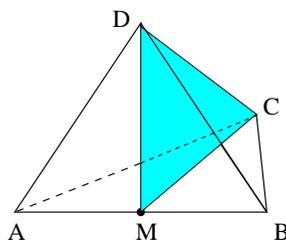
## I. Das Tetraeder

Die Ecken des Tetraeders  $T$  seien mit  $A, B, C, D$  bezeichnet. Die Symmetriegruppe  $\Sigma(T)$  permutiert die Ecken, läßt sich also mit einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $S_4$  identifizieren. Wir wollen zeigen, dass tatsächlich

$$\Sigma(T) = S_4$$

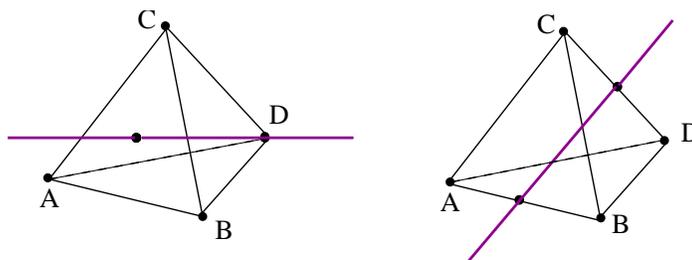
gilt. Betrachte dazu die Spiegelung  $\sigma$  an der Ebene  $CDM$ , wobei  $M$  den Mittelpunkt der Kante  $AB$  bezeichnet.  $\sigma$  läßt  $C, D$  fest und vertauscht  $A$  und  $B$ . In Zykelschreibweise:

$$\sigma = (AB)$$



Zu jedem der insgesamt 6 Eckenpaare gibt es eine solche Spiegelung. Also enthält  $\Sigma(T)$  alle Transpositionen der  $S_4$ . Da diese aber die  $S_4$  erzeugen, folgt die Behauptung.

Wir wollen nun noch die Drehgruppe  $D(T)$  des Tetraeders bestimmen. Sie muss die Ordnung  $12 = |\Sigma(T)/2|$  haben. Wir können aber insgesamt 12 verschiedene Drehungen aus  $D(T)$  explizit angeben. Neben der Identität haben wir:



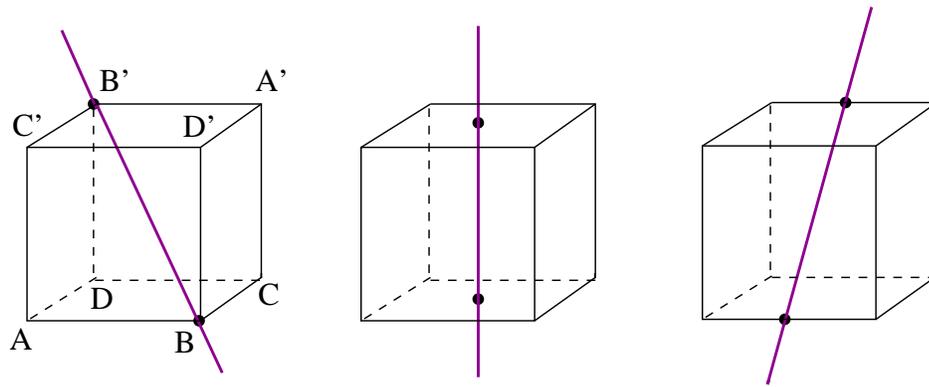
- 4 Drehachsen durch jeweils eine der Ecken und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Fläche. Betrachte wie in der Skizze den Fall der Ecke  $D$ . Sie hat 3 Nachbarecken, die durch Drehungen der Ordnung 3 (also um  $2\pi/3$  und  $4\pi/3$ ) zyklisch permutiert werden. Dies liefert die beiden Permutationen  $(ABC)$ ,  $(ACB)$ . Beide sind 3-Zykel und liegen daher in  $A_4$ . Die 3 weiteren Achsen liefern die weiteren 3-Zykel der  $A_4$ . Zusammen sind dies  $4 \times 2 = 8$  Elemente.
- 3 Drehachsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kantenpaare. Sie erlauben nur Drehungen der Ordnung 2. Für die Achse gemäss Skizze erhält man die Permutation  $(AB)(CD)$ , für die anderen Achsen die Permutationen  $(AC)(BD)$  und  $(AD)(BC)$ . Zusammen sind dies 3 Elemente, die jeweils als Produkte zweier Transpositionen in der  $A_4$  liegen.

Es sind damit alle Drehungen gefunden und als Elemente der  $A_4$  identifiziert. Wegen  $|A_4| = 12$  ist

$$D(T) = A_4.$$

## II. Würfel und Oktaeder

Da der Oktaeder dual ist zum Würfel  $W$ , hat er dieselbe Symmetriegruppe. Denn jedes  $\varphi \in \Sigma(W)$  läßt die Eckenmenge des Würfels fest, und damit auch die Menge der Seitenflächen und deren Mittelpunkte. Dies sind aber gerade die Ecken des dualen Oktaeders. Es genügt also, die Symmetriegruppe des Würfels  $W$  zu bestimmen. Ferner ist die Abbildung  $x \mapsto -x$  offenbar ein Element aus  $\Sigma(W) \setminus D(W)$ . Daher genügt es, die Drehgruppe  $D(W)$  des Würfels zu ermitteln. Da jede Drehung von  $W$  die Eckenmenge permutiert, ist klar, dass sich  $D(W)$  als Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $S_8$  auffassen läßt. Diese ist aber viel zu gross, um die  $D(W)$  darin identifizieren zu können. Eine wesentlich kleinere Menge, die von den Drehungen des Würfels ebenfalls permutiert wird, ist die Menge der 4 Hauptdiagonalen  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ .



Um  $D(W)$  mit einer Untergruppe der  $S_4$  identifizieren zu können, müssen wir nur noch nachweisen, dass verschiedene Elemente aus  $D(W)$  auch auf verschiedene Permutationen der  $S_4$  führen, bzw. dass die einzige Drehung aus  $D(W)$ , welche jede der Hauptdiagonalen (als Menge) festläßt, die Identität ist. Sei also  $\varphi$  eine solche Drehung. Dann ist entweder  $\varphi(A) = A$  oder  $\varphi(A) = A'$ , und Analoges gilt für die anderen Eckenpaare. Angenommen, es ist  $\varphi(A) = A'$ . Da  $B, C'$  und  $D$  auf von  $A$  ausgehenden Kanten liegen, ergibt sich dann folgende Zuordnung:

$$\varphi(B) = B', \quad \varphi(D) = D', \quad \varphi(C') = C.$$

Dies impliziert auch  $\varphi(A') = A, \varphi(B') = B, \varphi(D') = D, \varphi(C) = C'$ . Mit der Linearität von  $\varphi$  folgt nun  $\varphi = -id$ . Diese Abbildung hat aber Determinante  $-1$  und ist nicht in  $D(W)$  enthalten. Es muss daher  $\varphi(A) = A$  gelten, und hieraus folgt mit analoger Argumentation wie eben, dass  $\varphi$  die Identität ist.

Die Drehgruppe ist damit als Untergruppe der  $S_4$  erkannt. Wir zeigen nun noch, dass sie tatsächlich die volle  $S_4$  ist. Hierzu listen wir 24 verschiedene Drehungen des Würfels auf. Neben der Identität haben wir:

- Die Drehungen um die 3 Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Seitenflächen. Diese haben jeweils die Ordnung 4. Zusammen erhält man  $3 \times 3 = 9$  Drehungen.
- Die Drehungen um die insgesamt 6 Achsen, welche gegenüberliegende Kantenmittelpunkte verbinden. Diese haben jeweils die Ordnung 2. Dies ergibt  $6 \times 1 = 6$  Drehungen.
- Die Drehungen um die 4 Hauptdiagonalen. Diese haben jeweils die Ordnung 3 (jede Ecke hat 3 Nachbarecken, die dabei permutiert werden). Dies ergibt  $4 \times 2 = 8$  Drehungen.

Zusammen mit der Identität haben wir insgesamt 24 verschiedene Elemente aus  $D(W)$  gefunden. Also ist

$$D(W) = S_4.$$

Ist man nur an der Anzahl der Drehungen von  $W$  interessiert, so kann man diese einfacher auch mit der sogenannten Bahnenformel erhalten:

**Lemma (Bahnenformel).** *Sei  $G$  eine endliche Gruppe, die auf einer endlichen, nichtleeren Menge  $X$  operiert. Für  $x \in X$  bezeichnen wir mit  $G \cdot x$  die Bahn von  $x$  unter  $G$ , also die Menge aller Elemente aus  $X$ , auf die  $x$  durch die Wirkung eines Gruppenelements abgebildet werden kann. Ferner sei  $G_x$  der Stabilisator von  $x$ , das ist die Untergruppe aller  $g \in G$ , welche  $x$  festlassen. Dann gilt*

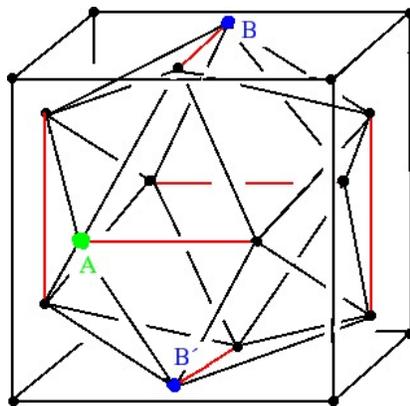
$$|G| = |G_x| \cdot |G \cdot x|.$$

In unserem Fall operiert die Drehgruppe  $D(W)$  auf der Eckenmenge des Würfels durch Permutationen. Jede Ecke kann durch eine Drehung um eine Hauptdiagonale auf jede ihrer Nachbarecken abgebildet werden, und damit durch eine Folge von Drehungen auf jede beliebige Ecke des Würfels. Die Bahn jeder Ecke  $x$  hat also die Länge 8. Diejenigen Drehungen aus  $D(W)$  welche  $x$  festlassen, sind genau diejenigen um die Hauptdiagonale durch  $x$ . Die Ordnung des Stabilisators von  $x$  ist daher 3. Mit der Bahnenformel erhalten wir  $|D(W)| = 3 \times 8 = 24$ .

### III. Ikosaeder und Dodekaeder

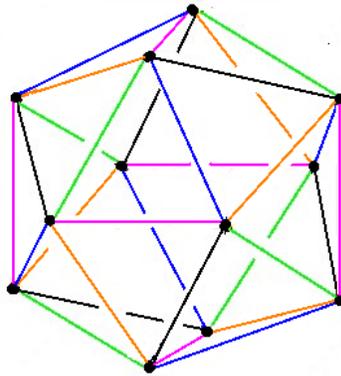
Da Ikosaeder und Dodekaeder zueinander dual sind, genügt es wieder die Symmetriegruppe eines von beiden zu bestimmen. Wir wählen das Ikosaeder  $I$ . Wie der Würfel ist auch  $I$  invariant unter der Abbildung  $x \mapsto -x$ ; daher genügt es, sich auf die Drehgruppe  $D(I)$  zu beschränken. Wir bestimmen die Ordnung von  $D(I)$  mit der Bahnenformel. Zunächst stellen wir fest, dass es auch beim Ikosaeder Drehungen um die Hauptdiagonalen (durch gegenüberliegende Eckenpaare) gibt; diese haben die Ordnung 5, denn jede Ecke besitzt 5 Nachbarecken. Jede Ecke  $x$  läßt sich außerdem durch eine Drehung um eine geeignete Hauptdiagonale in eine beliebige Nachbarecke überführen. Daher ist die Bahn von  $x$  unter der Drehgruppe  $D(I)$  die gesamte Eckenmenge. Sie hat also die Länge 12. Andererseits ist die Stabilisator-Untergruppe, welche  $x$  festläßt, gerade die Menge der Drehungen um die Hauptdiagonale durch  $x$ , hat also die Ordnung 5. Zusammen ergibt sich:

$$|D(I)| = 12 \times 5 = 60.$$



Die alternierende Gruppe  $A_5$  hat ebenfalls die Ordnung 60. Wir vermuten daher, dass es eine 5-elementige Menge von Objekten gibt, die von der Drehgruppe des Ikosaeders permutiert wird. Welche kann das sein? Im obigen Bild sehen wir das Ikosaeder einem Würfel eingeschrieben. Die Kanten des Ikosaeders, die in Seitenflächen des Würfels liegen, sind rot gefärbt.

Insgesamt gibt es 5 verschiedene Würfel, denen das Ikosaeder in dieser Weise eingeschrieben ist. Dies wird durch die Färbung der Kanten des Ikosaeders im Bild unten dargestellt: Jeder der umschriebenen Würfel entspricht einer der 5 Kantenfarben (orange, rosa, blau, grün, schwarz).



Jedes Element aus  $D(I)$  permutiert die 5 umschriebenen Würfel, und damit die 5 Farben. Um  $D(I)$  als Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $S_5$  auffassen zu können, ist nur noch zu zeigen: das einzige Element aus  $D(I)$ , welches die gegebene Färbung unverändert läßt, ist die Identität. Sei  $\varphi \in D(I)$  eine solche Drehung. Wir betrachten die grüne Kante an der vorne unten liegenden Ecke des Ikosaeders. Sie bildet zusammen mit einer schwarzen und einer rosa Kante ein Dreieck  $\Delta$ . Weil  $\varphi$  die Färbung nicht verändert, muss es dieses Dreieck auf eines derselben Farbkombination grün, schwarz, rosa abbilden. Das einzige solche ausser  $\Delta$  selbst ist das diametral gegenüberliegende Dreieck  $-\Delta$ . Bezeichnen  $x_1, x_2, x_3$  die Ecken von  $\Delta$ , so gilt also entweder  $\varphi(x_i) = x_i$  für alle  $i$  oder  $\varphi(x_i) = -x_i$  für alle  $i$ . Weil die Ecken  $x_i$  drei linear unabhängige Vektoren festlegen, ist aber  $\varphi$  durch die Werte auf diesen Ecken bereits festgelegt, und daher ist entweder  $\varphi = id$  oder  $\varphi = -id$ ; letzteres aber ist keine Drehung. Damit ist  $D(I)$  als Untergruppe der  $S_5$  realisiert.

In jeder Ecke des Ikosaeders stoßen Kanten aller 5 Farben zusammen. Die Drehungen um die Hauptdiagonalen permutieren die 5 Farben zyklisch, werden also durch 5-Zykel in der  $S_5$  dargestellt. Es gibt 6 Hauptdiagonalen mit Drehungen der Ordnung 5, diese ergeben sämtliche 5-Zykel der  $S_5$  und liegen alle in der  $A_5$ . Ferner gibt es Drehungen der Ordnung 3 um die insgesamt 10 Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Dreiecksflächen. Sie haben die Ordnung 3 und werden durch 3-Zykel in der  $S_5$  repräsentiert. Die verbleibenden 15 nichttrivialen Elemente der  $D(I)$  sind Drehungen um die Achsen durch die Mittelpunkte gegenüberliegender Kanten. Sie lassen deren Farbe fest und vertauschen je zwei der anderen 4 Farben, sind also ebenfalls in der  $A_5$  enthalten. Damit sehen wir:

$$D(I) = A_5.$$

Zum Abschluss erwähnen wir den folgenden Klassifikationssatz, der die Bedeutung der Platonischen Körper eindrucksvoll unterstreicht. Der Beweis erfordert nur einfache Tatsachen über Gruppenoperationen und ist z.B. in [4] nachzulesen:

**Theorem** (F. Klein, 1874). *Sei  $G$  eine endliche Untergruppe der  $SO(3)$ . Dann ist  $G$  entweder eine zyklische Gruppe von Drehungen um eine feste Achse, oder  $G$  ist die Drehgruppe eines regulären Polyeders.*

## Literatur

- [1] I. Agricola, T. Friedrich: Elementargeometrie. Vieweg-Verlag, 2005.

- [2] H.S.M. Coxeter: Regular Polytopes. Dover Publications, 1973.
- [3] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie. Springer-Verlag 1932.
- [4] P. Neumann, G. A. Stoy, E.C. Thompson: Groups and Geometry. Oxford University Press, 1994.
- [5] S.J. Patterson: Analytische Geometrie und Lineare Algebra, Teil II: Anschauliche Geometrie und Gruppentheorie. Vorlesungsskriptum, Mathematisches Institut der Universität Göttingen.
- [6] E. Quaisser: Diskrete Geometrie. Spektrum Akademischer Verlag, 1994.
- [7] G. Wüstholtz: Algebra. Vieweg-Verlag, 2004.