

§ 1 Gewöhnliche DGL - allgemeine Theorie

1. Einführung

Gew. DGL: Gleichung für eine Fkt $x = x(t)$ einer unabh. Variablen $t \in \mathbb{R}$ (oft Zeit) und deren Ableitungen

Implizite Form: $F(t, x(t), \dot{x}(t), \dots, x^{(n)}(t)) = 0$, $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Explizite " : $x^{(n)} = f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$

Ordnung der DGL: Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung

Bsp: 1. $\dot{x} = ax$, $a \in \mathbb{C}$

Allg. Lsg: $x(t) = c \cdot e^{at}$, $c \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$

Vorgabe eines Anfangswerts $x(t_0) = x_0$ macht die Lsg eindeutig: $x(t) = x_0 \cdot e^{a(t-t_0)}$

2. $\dot{x} = \sin(tx)$

Lsg nicht explizit angebbar. Existenz/Eindeutigkeit von Lsg?

Dagegen partielle DGL: Gleichung für Fkt mehrerer unabh. Variablen und deren part. Ableitungen

Bsp: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

Laplace-Gl. in Ω : $\Delta u = 0$

Gesucht: Lsg $u \in C^2(\Omega)$, i.R. mit Randbed. auf $\partial\Omega$

Beispiele:

1. Newtonsches Gesetz (Mechanik):

Auf Punktteilchen (Masse m) am Ort $x(t) \in \mathbb{R}^3$ wirke Kraft F , abh. von t , $x(t)$, $\dot{x}(t)$

$\uparrow$ Zeit

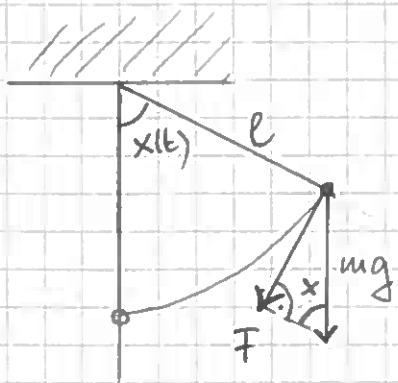
Bew. Gleichung:

$\uparrow$ Geschwindigkeit

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x})$$

$\uparrow$ Besch.

2. Mathem. Pendel



$x(t)$: Auslenkungswinkel zu Zeit t

$l \cdot x(t)$: Bogenlänge " "

Newton'sches Gesetz $\Rightarrow$

$$\underbrace{-mg \sin x}_{\text{Rückstellkraft } F \text{ (tangential)}} = m \ddot{x} \quad g: \text{Erdbeschl.}$$

Rückstellkraft F (tangential)

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Für kleine x : Näherung durch lineare Schwingungsgl.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\text{einfacher zu lösen})$$

3. Populationsmodelle (Biologie, Ökologie)

(a) Einfaches Modell

$p(t)$: Population einer geg. Spezies zu Zeit t

Annahme: Änderung pro Zeiteinheit prop. zum Bestand

$\leadsto$ Wachstumsgleichung

$$\dot{p} = r(t, p) \cdot p \quad r: \text{Wachstumsrate}$$

Konstante Rate $r \in \mathbb{R} \Rightarrow$ exponentielles Wachstum

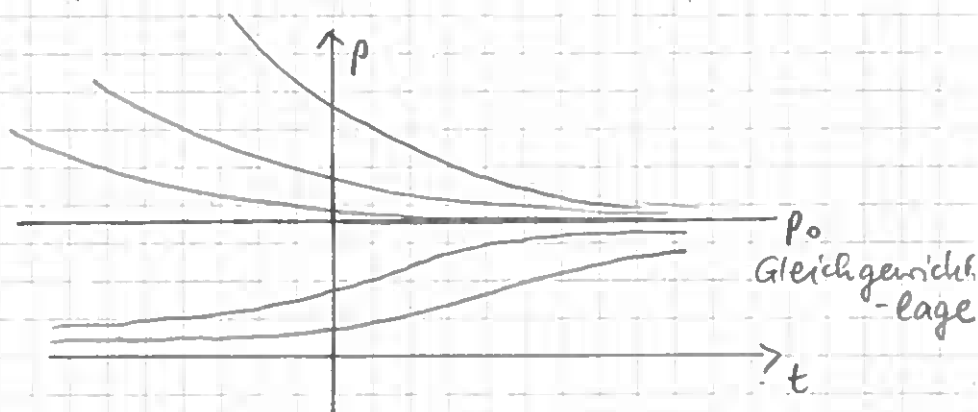
Realistischeres Modell: Beschränktes Wachstum, d.h.

$\exists$ Grenzpopulation $p_0 > 0$: $r(t, p) \leq 0$ für $p \geq p_0$

Bsp: Logistische Gl. $\dot{p} = (a - bp) \cdot p$, $a, b > 0$; $p_0 = \frac{a}{b}$

Explizite Lsg:

Ana 2!



(b) Räuber-Beute-System (Lotka-Volterra-Modell, 1925/26)

↑
amerik. Biologie

↑
ital. Mathematiker

$x(t)$: Bestand der Beute-Spezies zu Zeit t

$y(t)$: " " Räuber- " " "

Modell (konstante Wachstumsraten, die sich gegenseitig beeinflussen):

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha - \beta y) \cdot x \\ \dot{y} = (-\gamma + \delta x) \cdot y \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$$

Beachte: $y = 0 \rightarrow x$ wächst exponentiell, $y > 0 \rightarrow$ Wachstumsrate von x verringert.

Analog, aber gegenläufig für y .

Modell nicht explizit lösbar! Aber: man kann viel über die Lsg qualitativ aussagen (z.B. Existenz von zeitlich period. Lsg, Gleichgewichtslsg etc.)

2. Grundtypen gewöhnlicher DGL

(I) DGL 1. Ordnung:

Gleichung/System der Form

$$(*) \quad \dot{x} = f(t, x)$$

wo $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen

(*) explizit, mit $f = (f_1, \dots, f_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n)$$

$\vdots$

$$\dot{x}_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n)$$

Falls $n = 1$, so heißt (*) skalare DGL 1. Ordnung

Eine Lsg von (*) ist eine stetig diffbare Abb. $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall), kurz: $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, mit

$$(i) (t, x(t)) \in G \quad \forall t \in I$$

Generalvorausss:

$$(ii) \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad \forall t \in I$$

I nicht empty

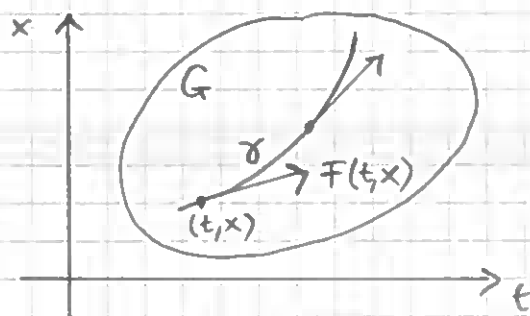
Geometrische Veranschaulichung:

Eine Lsg x auf I def. eine C^1 -Kurve

$$\gamma: I \rightarrow G, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ x(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, x(t)) \end{pmatrix}$$

Betrachte Vektorfeld $F(t, x) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(t, x) \end{pmatrix}, \quad G \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$



F : Richtungsfeld
der DGL (*)

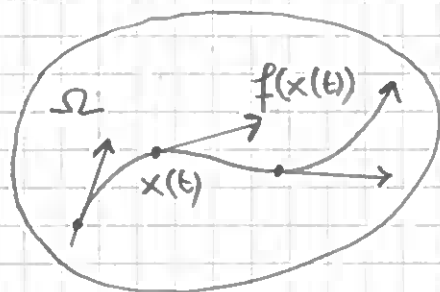
Die Lsg x verläuft so, dass F tangential an γ in jedem Kurvenpunkt

Wichtiger Spezialfall: Autonome Systeme

$$\dot{x} = f(x)$$

(rechte Seite nicht explizit zeitabh.)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetiges Vektorfeld, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen



Hier heißt f selbst das Richtungsfeld der DGL

Ω : Phasenraum

Jede Lsg-Kurve $x(t)$ verläuft so, dass f tangential an x in jedem Kurvenpunkt

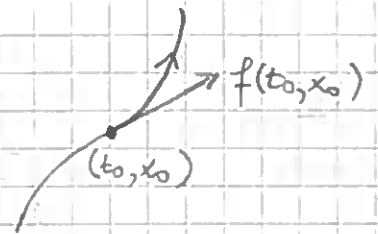
$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Autonome Systeme sind bzgl. der Zeit translationsinvariant

dh: $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lsg, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \tilde{x}(t) = x(t - \alpha)$ ist Lsg auf $I + \alpha$.

Anfangswertproblem (AWP):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{mit } (t_0, x_0) \in G$$



Wir werden sehen: unter schwachen Bed. an f hat dieses eine eindeutige (in gewissem Intervall um t_0 definierte) Lsg

(2) Skalare DGL n-ter Ordnung:

$$(*) \quad x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

$F: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen

Gesucht: Lsg $x \in C^n(I, \mathbb{R})$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Reduktion von (*) auf ein System 1. Ordnung:

$$\text{Hilfsvariable: } \left. \begin{aligned} y_1 &:= x \\ y_2 &:= \dot{x} \\ &\vdots \\ y_n &:= x^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Sei $x \in C^n(I)$ Lsg von (*) $\Rightarrow y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, und es füllt System 1. Ordnung:

$$(**) \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = y_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_{n-1} = y_n \\ \dot{y}_n = F(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

kurz:

$$\dot{y} = f(t, y) \quad \text{mit}$$

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ F(t, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

Umgekehrt: Sei $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Lsg des Systems (**)

$$\Rightarrow y_2 = \dot{y}_1, y_3 = \dot{y}_2 = \ddot{y}_1, \dots, y_n = y_1^{(n-1)}$$

$$\Rightarrow y_1 \text{ n-mal (stetig) diffbar, und } y_1^{(n)} = \dot{y}_n = F(t, y_1, \dots, y_1^{(n-1)})$$

d.h. y_1 löst (*)

Also: (*) und (**) sind äquivalent.

Übersehen von AWP:

$$y(t_0) = y_0 = \begin{pmatrix} y_{0,1} \\ \vdots \\ y_{0,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow y_1(t_0) = y_{0,1}, \overbrace{\dot{y}_1(t_0)}^{= y_2(t_0)} = y_{0,2}, \dots, \\ y_1^{(n-1)}(t_0) = y_{0,n}$$

Für DGL n-ter Ordnung gibt man daher als Anfangswerte vor:
 $y(t_0), \dot{y}(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0)$

Bsp: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (Schwingungsgl.), $\omega > 0$

Umform. in System: $y_1 := x, y_2 := \dot{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega^2 y_1 \end{cases}$$

AWP: $x(t_0) = x_{0,1}, \dot{x}(t_0) = x_{0,2}$

Beur: Viele DGL nicht explizit lösbar, daher wichtig:

- Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit, max. Def. Bereich von Lsg
Dabei reicht oft Studieren von Systemen 1. Ordnung
- Qualitative Anss. über Eigenschaften der Lsg

3. Elementare Lösungsmethoden (skalare DGL)

(I) Separierbare DGL (vgl. Ana II)

DGL der Form

$$\dot{x} = f(t)g(x)$$

$f: I \rightarrow \mathbb{R}, g: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $I, J \subseteq \mathbb{R}$ offene Intervalle

Idee: $\frac{dx}{dt} = f(t)g(x) \xRightarrow{g(x) \neq 0} \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$

Integration mit Anfangsbed. $x(t_0) = x_0$:

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + \text{Auflösen nach } x(t)$$

1.1. Satz Sei $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in J$. Betrachte das AWP

$$(A) \begin{cases} \dot{x} = f(t)g(x) \\ x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I, x_0 \in J \end{cases}$$

Setze $F(t) := \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau$, $G(x) := \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{g(\xi)}$ (streng monoton)

$\Rightarrow \exists$ offenes Intervall $I' \subseteq I$ mit $t_0 \in I'$, auf dem (A) eine eindeutige Lsg $x \in C^1(I')$ hat. (Bed: $F(I') \subseteq G(J)$)

Man erhält sie durch Auflösen von

$$G(x(t)) = F(t)$$

Beweis: AnaII (vgl. Skript)

Zusatz: $x(t) \equiv x_0$ ist konst. Lsg von $\dot{x} = f(t)g(x) \Leftrightarrow g(x_0) = 0$
AWP mit $x(t_0) = x_0$ sind i. A. nicht eindeutig lösbar!

Bsp: $\dot{x} = \sqrt{|x|}$ (autonom)

Konst. Lsg: $x \equiv 0$.

Betrachte AWP $x(0) = x_0 \neq 0$

1. $x_0 \geq 0$. Separation: $\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{|\xi|}} = \int_0^t d\tau$

Auflösung im Bereich $x > 0$:

$$t = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} = 2(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}), \quad x = x(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(\sqrt{x_0} + \frac{t}{2}\right)^2$$

max. Def. Bereich:

$$D_{\max} = (-2\sqrt{x_0}, \infty) \quad (\text{da } x(t) \geq 0)$$

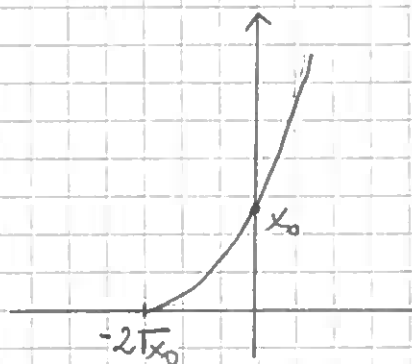
Die Lsg mündet für $t \rightarrow -2\sqrt{x_0}$

diffbar in die konst. Lsg 0 ein, da

$$\dot{x}(t) = \sqrt{x_0} + \frac{t}{2} \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow -2\sqrt{x_0}$$

2. $x_0 < 0$: Sep. im Bereich $x < 0 \Rightarrow$

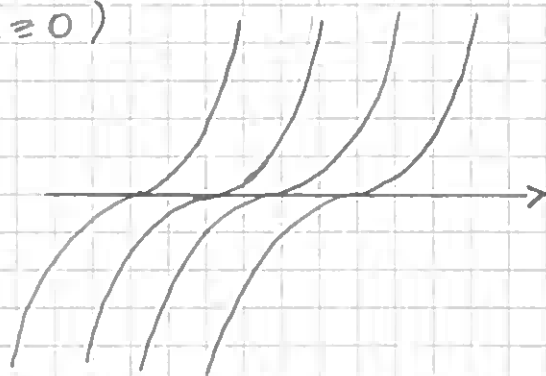
$$x(t) = -\left(\sqrt{|x_0|} - \frac{t}{2}\right)^2; \quad D_{\max} = (-\infty, 2\sqrt{|x_0|})$$



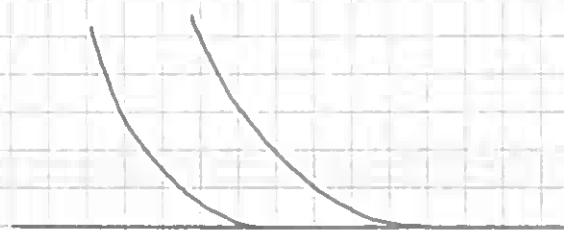
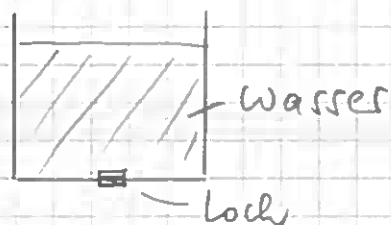
Beachte: das AWP mit $x(t_0) = 0$ hat in jeder (bel. kleinen) Umgeb. von t_0 unendlich viele Lsg!

(Verzweigung der Lsg in der konst. Lsg $x \equiv 0$)

Grund ($\leadsto$ später): $g(x) = \sqrt{|x|}$
ist in keiner Umgeb. von $x = 0$
Lipschitz-stetig.



Physikalische Interpretation:



$p(t)$: Pegelstand zur Zeit t

Torricelli: $\dot{p}(t) = -a\sqrt{p(t)}$, $a > 0$

$\Rightarrow x(t) = p(-\frac{1}{a}t)$ löst $\dot{x} = \sqrt{|x|}$

Wenn der Behälter leer ist, kann man nicht rückschließen, wann es ausgelaufen ist.

(II) Skalare lineare DGL 1. Ordnung (vgl. Ana II)

(D) $\dot{x} = a(t)x + b(t)$, $a, b: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig
↑
offenes Intervall

homogen, falls $b \equiv 0$, sonst inhomogen.

1. Lösungsraum der homog. Gleichung (H) $\dot{x} = a(t)x$

$$L_H = \{x(t) = c \cdot e^{A(t)}, c \in \mathbb{R}\} \quad (1\text{-dim } \mathbb{R}\text{-VR})$$

wobei $A(t) = \int a(t)dt$ eine Stammfkt von a

2. Ansatz für inhom. Gl. (Variation d. Konstanten): $x(t) = u(t)e^{A(t)}$

Liefert partikuläre Lsg $x_p(t) = \left(\int e^{-A(t)} b(t) dt \right) \cdot e^{A(t)}$

Denn: Mit $\varphi = e^A$ ($\Rightarrow \dot{\varphi} = a\varphi$)

liefert der Ansatz $x = u\varphi$ in (D):

$$\ddot{u}\varphi + \underbrace{u\dot{\varphi}}_{a\varphi} = \dot{x} \stackrel{!}{=} ax + b = au\varphi + b$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u}\varphi = b \Leftrightarrow \ddot{u} = e^{-A} b$$

$$\Leftrightarrow u(t) = \int e^{-A(t)} b(t) dt$$

3. Allg. Lsg von (D): $x(t) = x_p(t) + c e^{A(t)}$, $c \in \mathbb{R}$

Lsg-Raum von (D): $L = x_p + L_H$, x_p bel. part. Lsg von (D)

Jede Lsg von (D) ist global, d.h. auf ganz I def.

Jedes AWP $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in I$) hat end. Lsg.

(III) Variablen-Trafo (alles skalare DGL)

1. (*) $\dot{x} = f(at+bx+c)$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$

Substitution: $y(t) := at + bx(t) + c$

$$\dot{y} = a + b\dot{x} \Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{b}(\dot{y} - a)$$

Also: $x(t)$ löse (*) auf $I \Leftrightarrow y$ löst auf I die DGL
 $\dot{y} = a + bf(y)$ (separierbar!)

2. Ähnlichkeits-DGL: $\dot{x} = f\left(\frac{x}{t}\right)$, $t \neq 0$ (vgl. Ana II - Üb)

Subst. $y(t) := \frac{x(t)}{t}$ führt auf separable DGL für y :

$$\dot{y} = \frac{1}{t}(f(y) - y)$$

(IV) Die skalare DGL $\ddot{x} = f(x)$

dabei $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $J \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Wähle $u \in C^1(J)$ mit $f = -u' \Rightarrow$

$$(D) \quad \ddot{x} = -u'(x)$$

Beschreibt Bewegung eines Teilchens im Potentialfeld $f = -u'$.

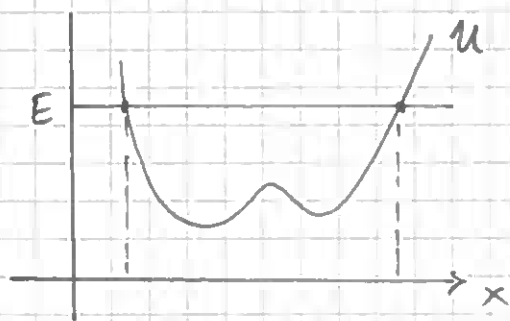
Sei $x \in C^2(I)$ Lsg von (D)

$$\Rightarrow \dot{x}\ddot{x} = -u'(x)\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 + u(x)\right) = 0$$

$\Rightarrow \exists$ konst. $E \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + u(x) = E \text{ auf } I$$

(Energiesatz)



Konsequenz:

die Lsg bleibt stets im

"Potentialtopf" $\{x \in \mathbb{R} : U(x) \leq E\}$

AWP: $\ddot{x} = -U'(x), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$

(o.E. $t_0 = 0$, da DGL autonom)

Legt E fest: $E = \frac{1}{2}v_0^2 + U(x_0)$

Annahme im Folgenden: $\dot{x}$ nullstellenfrei $\Rightarrow$

x löst auf I eine der DGL

(i) $\dot{x} = \sqrt{2(E - U(x))}$

(ii) $\dot{x} = -\sqrt{2(E - U(x))}$

separierbar!

(i) oder (ii) je nach Vorzeichen von v_0

Falls $v_0 > 0 \Rightarrow \dot{x} > 0 \Rightarrow$ (sep. in (i))

$t = G(x(t))$ mit $G(x) = \int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}}$

Zur expliziten Auflösung benötigt man G^{-1}

4. Existenz- und Eindeigkeitsätze

Betrachte System 1. Ordnung:

$\dot{x} = f(t, x)$, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen
 $\mathbb{R}^n$ versehen mit bel. Norm $\|\cdot\|$ (alle äquivalent!)

Vorbereitung: Vektorwertige Integration

Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$

Def.: $\int_a^b g(t) dt := \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b g_n(t) dt \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

1.2. Lemma $\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt$
(Standardabschätzung)

Beweis: 1. Fall: g (vekturwertige) Treppenfkt, d.h. $g = c_i \in \mathbb{R}^n$
auf (x_i, x_{i+1}) , wo $a = x_1 < \dots < x_N = b$ Unterteilung von $[a, b]$
 $\Rightarrow \left\| \int_a^b g(t) dt \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{N-1} c_i (x_{i+1} - x_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^{N-1} \|c_i\| (x_{i+1} - x_i)$
 $= \int_a^b \|g(t)\| dt$

2. Fall: g stetig $\Rightarrow g$ gleichmäßig auf $[a, b]$ durch Treppenfkt
approx. bar, d.h. $\exists$ Folge (h_k) von T.F. auf $[a, b]$ mit
 $\sup_{t \in [a, b]} \|g(t) - h_k(t)\| \rightarrow 0$

(approx. die Komponenten von g durch $\mathbb{R}$ -wertige T.F. auf
gemeinsamer Unterteilung von $[a, b]$)

Dann: $\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| = \left\| \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b h_k(t) dt \right\| \leq \lim_{\substack{1. \text{ Fall } k \rightarrow \infty \\ a}} \int_a^b \|h_k(t)\| dt$
 $= \int_a^b \|g(t)\| dt \quad \square$

Anfangswertprobleme in Integralform

Betrachte das AWP

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad f: G \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig, } G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

1.3. Lemma Sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall mit $t_0 \in I$ und $(t, x(t)) \in G \quad \forall t \in I$. Dann sind äquiv:
 x löst das AWP $(*)$

$$\Leftrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t \in I$$

Beweis: folgt komponentenweise aus dem HDI.

Def. (Lipschitz-Bedingung) Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt auf G Lipschitz (-stetig) bzgl. x $\Leftrightarrow \exists L > 0$:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \forall (t, x), (t, y) \in G$$

f heißt lokal Lipschitz bzgl. x $\Leftrightarrow$ jedes $(t_0, x_0) \in G$

besitzt eine offene Umgeb. $U \subseteq G$, so dass $f|_U$ Lipschitz bzgl. x (die L -Konst. wird dabei von U abhängen)

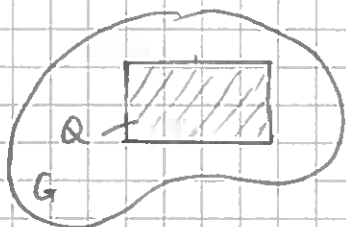
Wichtiges Kriterium:

1.4. Satz Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei auf G stetig partiell diffbar bzgl. $x_1, \dots, x_n \Rightarrow$

f ist auf G lokal Lipschitz bzgl. x .

Genauer: f ist Lipschitz bzgl. x auf jedem Kompaktum

$Q = I \times K \subseteq G$, wo I komp. Intervall, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ komp. + konvex.



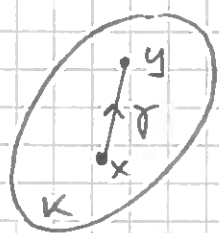
Beweis: $(t, x) \mapsto (\partial_{x_1} f(t, x), \dots, \partial_{x_n} f(t, x))$
 $=: D_2 f(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

nach Vorausss.

ist ∇ stetig auf G . Q kompakt $\Rightarrow \exists M > 0$:

$$\|D_2 f(t, x)\| \leq M \quad \forall (t, x) \in Q$$

Dabei $\|\cdot\|$ die von der Norm auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. $\|A\| = \sup \{ \|Ax\| : x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\| \leq 1 \}$



Fixiere $t \in I$, $x, y \in K$. Setze

$$\text{Dann: } \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$$

$$\varphi(s) := f(t, \underbrace{sy + (1-s)x}_{= \gamma(s)})$$

$$= \gamma(s) \in K; \quad \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

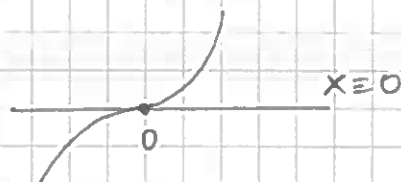
$$\Rightarrow \|f(t, y) - f(t, x)\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| =$$

$$= \left\| \int_0^1 \dot{\varphi}(s) ds \right\| = \text{Kettenregel}$$

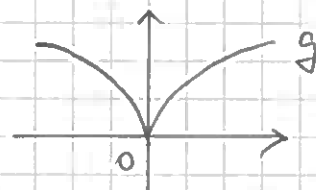
$$= \left\| \int_0^1 D_2 f(t, \gamma(s)) \cdot \underbrace{\dot{\gamma}(s)}_{= y-x} ds \right\| \leq \int_0^1 \|D_2 f(t, \gamma(s))\| \cdot \|\dot{\gamma}(s)\| ds \leq M \cdot \|y-x\|$$

Erinnerung: $\dot{x} = \sqrt{|x|}$, $x(0) = 0$

hat in jeder Umgeb. von $t=0$ ∞ viele Lsg.



Beachte: $g(x) = \sqrt{|x|}$ ist in keiner Umgeb. von $x=0$ Lipschitz!



1.5. Globales Eindeigkeitsatz $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen

sei $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz bzgl. x .

Seien $x_1, x_2: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lsg von $\dot{x} = f(t, x)$ auf einem Intervall I mit $x_1(t_0) = x_2(t_0)$ für ein $t_0 \in I$

$$\Rightarrow x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in I$$

Zum Beweis:

1.6. Lemma von Gronwall

Sei $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $g \geq 0$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall. Es gelte

$$g(t) \leq A + B \left| \int_{t_0}^t g(s) ds \right| \quad \forall t \in I$$

mit $t_0 \in I$ und konst. $A, B \geq 0$

$$\Rightarrow g(t) \leq A e^{B(t-t_0)} \quad \forall t \in I$$

Beweis: o.E. $t_0 = 0$ (betrachte sonst $\tilde{g}(t) = g(t+t_0)$ auf $I-t_0$)

Wir zeigen die Beh. für $t > 0$; $t < 0$ analog.

$$\tilde{I} := I \cap [0, \infty)$$

$$h(t) := A + B \int_0^t g(s) ds, \quad t \in I$$

$\Rightarrow h \in C^1(I)$, $g \leq h$ auf $\tilde{I}$ nach voraus.

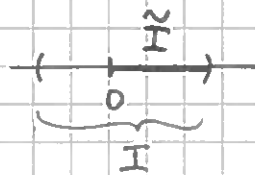
Auf $\tilde{I}$ gilt: $\dot{h} = Bg \stackrel{B \geq 0}{\leq} Bh \Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}(h e^{-Bt}) = (\dot{h} - Bh) e^{-Bt} \leq 0$$

$\Rightarrow h e^{-Bt}$ ist monoton fallend auf $\tilde{I}$

$$\Rightarrow h(t) e^{-Bt} \leq h(0) = A \quad \forall t \in \tilde{I}$$

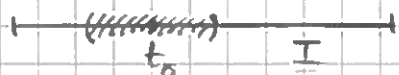
$$\Rightarrow g(t) \leq h(t) \leq A e^{Bt} \quad \text{auf } \tilde{I} \quad \square$$



L.v. Gronwall ist nützlich für Wachstumsabschätzungen von
Lsgen von DGL ($\leadsto$ Übungen)

Beweis v. Satz 1.5.:

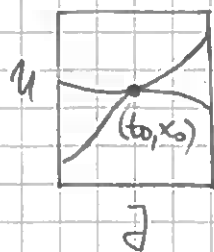
1. Schritt: $\exists \varepsilon > 0$, so dass $x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in I$ mit $|t - t_0| < \varepsilon$



Dabei: Setze $x_0 := x_1(t_0) = x_2(t_0)$

Sei $J \times U$ offene Umg. von (t_0, x_0) so, dass
 f Lipschitz bzgl. x auf $J \times U$ mit Konst. $L > 0$

$$\text{Dabei } J = \{t \in I : |t - t_0| < \varepsilon\}$$



$$\text{o.E. } x_i(t) \in U \quad \forall t \in J, \quad i = 1, 2$$

(verkleinere sonst J)

$$y := x_2 - x_1 \Rightarrow y(t_0) = 0. \quad \text{z. zeigen: } y(t) = 0 \quad \forall t \in J$$

Integralversion von AWPs $\Rightarrow$

$$\forall t \in J: \quad y(t) = \int_{t_0}^t (f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))) ds$$

$$\Rightarrow \|y(t)\| \leq \int_{t_0}^t L \cdot \|x_2(s) - x_1(s)\| ds = L \int_{t_0}^t \|y(s)\| ds.$$

l.v. Gronwall mit $A=0 \Rightarrow y(t)=0 \forall t \in J$.

2. Schritt: Beh: $x_1(t) = x_2(t) \forall t \in I$ mit $t > t_0$
(analog $\forall t \in I$ mit $t < t_0$)

Beweis: Fixiere $t \in I, t > t_0$. $y := x_2 - x_1$

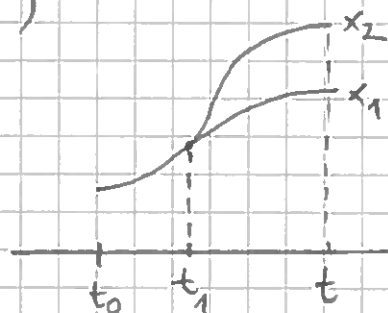
$$t_1 := \sup \{ \tau \in [t_0, t] : y(\tau) = 0 \}$$

$$y \text{ stetig} \Rightarrow y(t_1) = 0$$

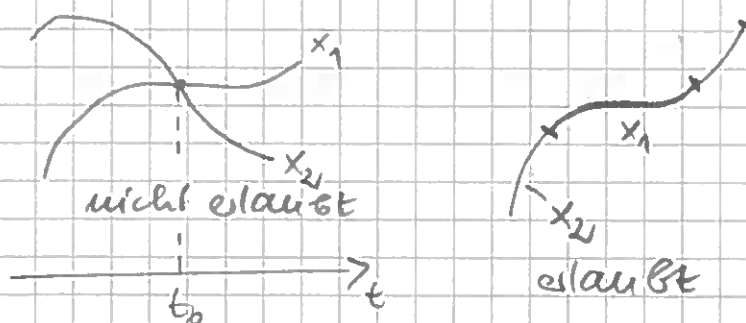
Ang. $t_1 < t \rightarrow$ (1. Schritt für t_1 statt t_0)

$\exists \delta > 0$ mit $t_1 + \delta < t$ und $y(t_1 + \delta) = 0$, im Widerspruch zu Def. von t_1

Also folgt $t_1 = t \Rightarrow x_1(t) = x_2(t)$ ■



Konsequenz: In der Situation des Eindeutigkeitssatzes
kommen sich 2 Lsg x_1, x_2 nicht schneiden, es sei denn,
sie sind identisch oder eine ist Fortsetzung der anderen



$x_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ Fortsetzung
von $x_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$: $\Leftrightarrow$
 $I_1 \subseteq I_2, x_2|_{I_1} = x_1$
(I_1, I_2 Intervalle)

Nun: zur Existenz von Lsg des AWP

$$\dot{x} = f(t, x), x(t_0) = x_0$$

($f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig,
 $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen)

Äquivalente Integralform:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Grundidee: Fasse dies als Fixpunktgleichung für x (als
Element eines geeigneten vollst. metr. Raums) auf;

Dann: Banachscher Fixpunktsatz

1.7. Lemma $I \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall $\Rightarrow$

$$X = C(I, \mathbb{R}^n) = \{u: I \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig}\}$$

ist Banachraum mit Norm $\|u\|_\infty := \sup_{t \in I} \|u(t)\|$ ($< \infty$!)

Konvergenz in X : $u_k \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u \Leftrightarrow u_k \rightarrow u$ glm. auf I

$\Leftrightarrow$ alle Komp. von u_k konv. glm. gegen die von u

Beweis: Sei $(u_k) \subseteq X$ Cauchyfolge bzgl. $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow$

$\forall t \in I$ ist $(u_k(t))_k \subseteq \mathbb{R}^n$ C.F., also konvergent:

$$u_k(t) \rightarrow u(t), \quad u: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Sogar $u_k \rightarrow u$ glm. auf I , denn

$$\|u_k(t) - u(t)\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|u_k(t) - u_m(t)\| \rightarrow 0 \text{ f\"ur } k \rightarrow \infty, \text{ glm. auf } I$$

$\Rightarrow u$ stetig $\blacksquare$

1.8. Satz v. Picard - Lindelöf (lokale Existenz + Eindeutigkeit)

Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig + lokal Lipschitz bzgl. x

Dann exist. zu jedem $(t_0, x_0) \in G$ ein offenes Intervall

$$I_\delta(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \text{ so dass das AWP}$$

$$(*) \quad \dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

genau 1 Lsg auf $I_\delta(t_0)$ besitzt.

Genauer: Wähle komp. Quader $Q = I \times J \subseteq G$ um (t_0, x_0) ,

$$I = \overline{I_\delta(t_0)}, \quad J = \overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x - x_0\| \leq r\}, \text{ so dass}$$

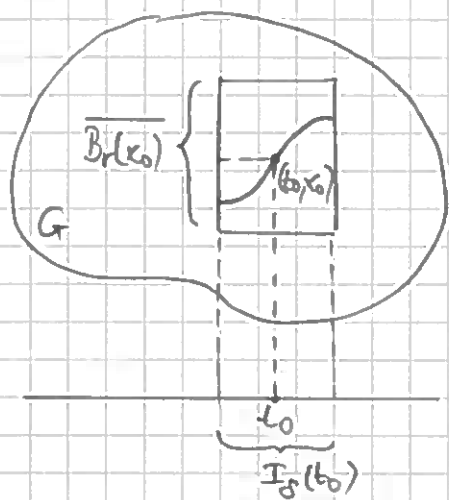
$f|_Q$ Lipschitz bzgl. x mit Konst. $L > 0$.

Dabei sei $\delta > 0$ so, dass

$$\delta L < 1 \text{ und } \delta \cdot \|f\|_{\infty, Q} \leq r$$

$\Rightarrow (*)$ hat auf $I = \overline{I_\delta(t_0)}$ genau 1 Lsg

Diese verläuft in $\overline{B_r(x_0)}$ und ist gleichmäßiger Limes der Folge der Picard-Iterierten



$$x_0(t) := x_0$$

$$x_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_k(s)) ds, \quad t \in I$$

Beweis: Wegen Eind. Sak. 1.5. nur Existenz einer Lsg auf I zu zeigen (+ Zusatzeigensch.)

$$\mathcal{M} := \{u \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|u(t) - x_0\| \leq r \quad \forall t \in I\} = C(I, J)$$

1. Picard-Operator: Für $u \in \mathcal{M}$ setze

$$Pu(t) := x_0 + \int_{t_0}^t \underbrace{f(s, u(s))}_{\in J} ds, \quad t \in I$$

Pu stetig (HDI)

$Pu \in \mathcal{M}$, denn:

$$t \in I \Rightarrow \|Pu(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(s, u(s))\|}_{\in Q} ds \leq \delta \cdot \|f\|_{\infty, Q} \leq r$$

2. $\mathcal{M}$ ist vollständiger metrischer Raum mit $d(u, v) = \|u - v\|_\infty$
(Achtung: $\mathcal{M}$ ist kein VR!)

$$\text{Beweis: } \mathcal{M} = \{u \in C(I, \mathbb{R}^n) : \|u - x_0\|_\infty \leq r\}$$

$\Rightarrow \mathcal{M}$ abgeschl. in $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$.

Wegen der Vollständigkeit von $(C(I, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ist
auch $\mathcal{M}$ vollst.

3. $P: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ist Kontraktion, denn: $u, v \in \mathcal{M} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|Pu - Pv\|_\infty &= \sup_{t \in I} \left\| \int_{t_0}^t \underbrace{(f(s, u(s)) - f(s, v(s)))}_{\in Q} ds \right\| \\ &\leq \sup_{t \in I} \left| \int_{t_0}^t \underbrace{\|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|}_{\leq L \cdot \|u(s) - v(s)\|} ds \right| \\ &\leq \underbrace{\delta L}_{\leq 1} \cdot \|u - v\|_\infty \quad \square \end{aligned}$$

4. Banachscher Fixpunktsatz $\Rightarrow \exists! x \in \mathcal{M}$ mit $Px = x$
 x löst das AWP und hat die behaupteten Eigenschaften

Bsp: $\dot{x} = x$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Picard-Iterationen: $x_0(t) = x_0$; $x_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t x_k(s) ds$

$$x_1(t) = x_0 + \int_0^t x_0 ds = x_0(1+t)$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_0^t x_0(1+s) ds = x_0(1+t+\frac{t^2}{2})$$

$$\text{Induktion} \Rightarrow x_k(t) = x_0(1+t+\dots+\frac{t^k}{k!}) \rightarrow \underbrace{x_0 e^t}_{\text{end. Lsg des AWP}}$$

Konvergenz $\forall t \in \mathbb{R}$!

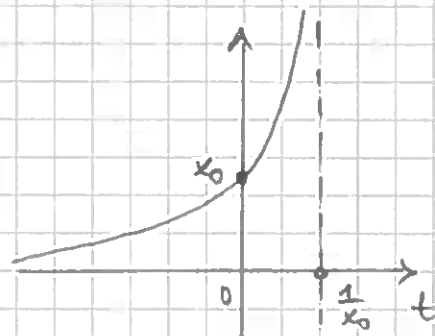
end. Lsg des AWP

Beachte: Selbst wenn die rechte Seite von $\dot{x} = f(t, x)$ auf ganz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ def. + überall lokal L-stetig ist, sind die Lsg eines AWP evtl. nur in einer kleinen Umgeb. von t_0 definiert!

Bsp: $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0 > 0$. Separation $\Rightarrow$

$$x(t) = \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \quad \text{auf } (-\infty, \frac{1}{x_0})$$

Lsg explodiert für $t \uparrow \frac{1}{x_0}$



Bei Verzicht auf (lokale) Lipschitzbed. hat man immer noch einen Existenzsatz:

1.9. Satz v. Peano (ohne Beweis, siehe z.B. Aufbach, Gew.DGL)

Sei $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig

$\Rightarrow$ Jedes AWP $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$

besitzt eine Lsg auf einem offenen Intervall um t_0 .

Aber: Die Lsg ist nicht notwendig eindeutig.

(Bsp: $\dot{x} = \sqrt{|x|}$)

Zu DGL höherer Ordnung:

$$(*) \quad x^{(n)} = F(t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$$

$F: G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen

Äquiv. System: $\dot{y} = f(t, y) = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ F(t, y) \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Man ersieht: f (lokal) Lipschitz bzgl. $y \iff$
 F " " " "

Globaler End. Satz sowie die Sätze v. Picard-Lindelöf und Peano
übertragen sich auf AWP zu (*). siehe 19'

Beim: Manchmal betrachtet man DGL mit $\mathbb{C}$ -wertigen Lsg/
Koeff. Bei Systemen:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f: G \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ stetig, } G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \text{ offen}$$

Gesucht: Lsg $x: I \rightarrow \mathbb{C}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall

Alle bisherigen Sätze gelten entsprechend, mit ident. Beweis
Wichtig bei lin. Systemen $\rightarrow$ nächstes Kap.

5. Maximale Lösungen

Betrachte AWP

$$(A) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} f: G \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ stetig + lokal Lipschitz} \\ \text{bzgl. } x, \quad G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ offen} \end{array}$$

(alles analog für $\mathbb{C}^n$ statt $\mathbb{R}^n$)

Def. Eine Lsg $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ von (A) heißt maximal, falls sie
keine echte Fortsetzung besitzt (dabei Lsg stets auf Intervallen
def.)

1.10. Satz Das AWP (A) hat genau eine maximale Lsg
 $x: I_{\max} \rightarrow \mathbb{R}^n$

Das max. def. Intervall $I_{\max}$ ist offen.

Bsp: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ ($\omega > 0$) Schwingungsgleichung
 $= -F(t, x, \dot{x})$

AWP: $x(0) = a, \dot{x}(0) = b, a, b \in \mathbb{R}$

Lsg: $x(t) = a \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t \quad (t \in \mathbb{R})$

Diese Lsg ist eindeutig nach globalem End. Sak, da

$F(t, y) = -\omega^2 y_1$ (global) L-stetig bzgl $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Beweis: $I := \bigcup \{ J \text{ Intervall: } (A) \text{ hat Lsg } x_J: J \rightarrow \mathbb{R}^n \}$

Es ist $I \neq \emptyset$ nach Picard-Lindelöf, I Intervall um t_0

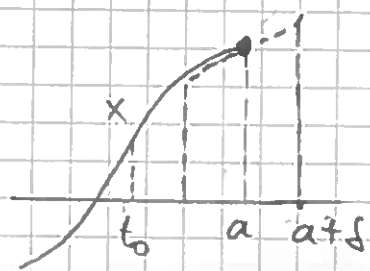
Def. $x: I \rightarrow \mathbb{R}^n$

$x(t) := x_J(t)$ falls $t \in J$

x wohldef. nach Eind. Satz: $t \in J \cap \tilde{J} \Rightarrow x_J(t) = x_{\tilde{J}}(t)$

x löst (A): klar. Also: I max. def. Intervall

I offen: Angen. mein. sei etwa der rechte Randpkt $a \in I$



Picard-Lindelöf $\Rightarrow$ das AWP

$y' = f(t, y), y(a) = x(a)$

hat Lsg auf Intervall $(a-\delta, a+\delta)$,

die (wegen Eind. Satz) x echt fortsetzt ∇

Wie sehen max. Lsg aus?

1.11. Satz Sei $x: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ die max. Lsg des AWP (A),
 $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty, t_0 \in (\alpha, \beta)$.

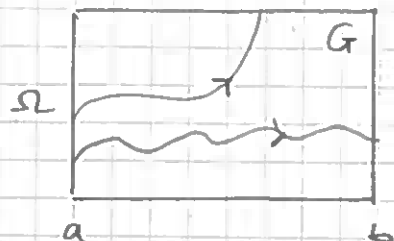
$\Rightarrow$ die Vorwärts-Lsg-Kurve $\{(t, x(t)) : t \in [t_0, \beta)\} \subseteq G$

ist in keinem Kompaktum $K \subseteq G$ enthalten,

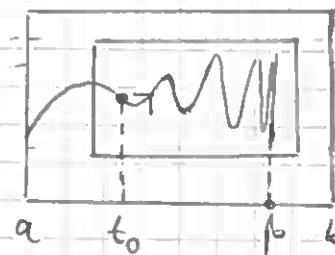
Dasselbe gilt für die Rückwärts-Lsg-Kurve $\{(t, x(t)) : t \in (\alpha, t_0]\}$

Sprechweise: „Die Lsg verläuft von Rand zu Rand in G “

Spezialfall: $G = (a, b) \times \Omega, \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $-\infty \leq a < b \leq \infty$



Bsp für max.
Lsgen



nicht
möglich

Sei $x: (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$ max. Lsg.

Ang. $\beta < b \Rightarrow$ der Vorwärts-Orbit $\{x(t) : t \in [t_0, \beta)\}$

verläßt jedes Kompaktum $L \in \Omega$.

Analog für Rückwärts-Lösung $\{x(t): t \in (\alpha, t_0]\}$

Beweis v. 1.11. Für Vorwärtslösung

Ang. $\exists$ Komp. $K \subseteq G: (t, x(t)) \in K \quad \forall t \in [t_0, \beta]$

Beh: $\lim_{t \uparrow \beta} x(t)$ existiert.

Nach Cauchy-Krit. für Grenzwerte ist dafür z. zeigen:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \|x(t) - x(s)\| < \varepsilon \quad \forall s, t \geq t_0$ mit $|t - \beta|, |s - \beta| < \delta$

$$\begin{aligned} \text{Dazu: } \|x(t) - x(s)\| &= \left\| \int_s^t \dot{x}(\tau) d\tau \right\| \leq \left| \int_s^t \|f(\tau, x(\tau))\| d\tau \right| \\ &\leq \|f\|_{\infty, K} \cdot \underbrace{|t - s|}_{< 2\delta} \Rightarrow \text{Beh} \end{aligned}$$

Konsequenz: x hat stetige Fortsetzung auf $(\alpha, \beta]$

$$t < \beta \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$$

Wegen Stetigkeit gilt das auch noch für $t = \beta$

$\Rightarrow x$ löst (A) auf $(\alpha, \beta]$, ∇ zu Max. von (α, β) $\blacksquare$

Def. Sei $f: (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, $-\infty \leq a < b \leq \infty$

f linear beschränkt: $\Leftrightarrow \exists$ stetige $g, h: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\|f(t, x)\| \leq g(t) \|x\| + h(t) \quad \forall (t, x) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$$

1.12. Satz Sei x max. Lsg von $\dot{x} = f(t, x)$, wo $f: (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

lokal Lipschitz bzgl. x und linear beschränkt $\Rightarrow$

x ist global, d.h. auf ganz (a, b) definiert.

Beweis: Sei (α, β) das def. Intervall von x . Ang. $\beta < b$

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds \quad \forall t_0, t \in (\alpha, \beta)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|x(t)\| &\leq \|x(t_0)\| + \left| \int_{t_0}^t (g(s) \|x(s)\| + h(s)) ds \right| \\ &\leq \underbrace{\|x(t_0)\| + (\beta - t_0) \|h\|_{\infty, [t_0, \beta]}}_{A < \infty} + \underbrace{\|g\|_{\infty, [t_0, \beta]}}_{B < \infty} \cdot \left| \int_{t_0}^t \|x(s)\| ds \right| \end{aligned}$$

L.v. Gronwall $\Rightarrow \forall t \in [t_0, \beta) : \|x(t)\| \leq A e^{B(t-t_0)} \leq A e^{B(\beta-t_0)}$

$\Rightarrow x$ beschr. auf $[t_0, \beta)$ $\stackrel{!}{\Leftarrow}$ zw Satz 1.11 ■

Bsp: $\dot{x} = t|x|$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

↓ da $\|x\| - \|y\| \leq |x - y|$

$|f(t, x)| = |t| \cdot |x| \Rightarrow f$ Lipschitz bzgl. x und linear beschr. $\Rightarrow$
alle (max.) Lsg sind auf ganz $\mathbb{R}$ def.; jedes AWP hat
also eine eind., auf ganz $\mathbb{R}$ def. Lsg.

§2 Lineare Differentialgleichungen

1. Lineare Systeme 1. Ordnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$\mathbb{K}^n$ mit Norm $\|\cdot\|$, $\mathbb{K}^{n \times n}$ mit der von $\|\cdot\|$ induzierten Operatornorm $\|A\| = \sup \{\|Ax\| : x \in \mathbb{K}^n, \|x\| \leq 1\}$

$C^1(I, \mathbb{K}^n) = \{x : I \rightarrow \mathbb{K}^n \text{ stetig diffbar}\}$

Dabei $x : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ diffbar in $t \in I \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} =: \dot{x}(t) \in \mathbb{K}^n$ exist.

Seien $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig, d.h. alle a_{ij}, b_i stetig

Lineares DGL-System mit Koeff. matrix A und Inhomogenität b :

$$(S) \quad \dot{x} = A(t)x + b(t)$$

(S) homogen $\Leftrightarrow b \equiv 0$, sonst (S) inhomogen

Falls $A = \text{konst.}$: Lineare DGL mit konst. Koeffizienten

2.1. Satz (Existenz- und Eindeigkeitsatz f. lineare Systeme)

Jedes AWP zu (S) mit $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{K}^n$, $t_0 \in I$, hat eine eindeutige, auf ganz I definierte Lsg $x \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$

Beweis: Mit Satz 1.12, $f(t, x) = A(t) \cdot x + b(t)$ ($t \in I, x \in \mathbb{K}^n$)

ist lokal Lipschitz bzgl. x , denn: $J \subseteq I$ kompakt $\Rightarrow$

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad \text{mit} \quad L = \max_{t \in J} \underbrace{\|A(t)\|}_{\text{stetig}} < \infty$$

$$\text{f. lineares Beschr. : } \|f(t, x)\| \leq \underbrace{\|A(t)\|}_{\text{stetig}} \cdot \|x\| + \underbrace{\|b(t)\|}_{\text{stetig}} \Rightarrow \text{Beh.} \quad \begin{matrix} 1.10. \\ + 1.12 \end{matrix}$$

Betrachte neben (S) das homogene System

$$(H) \quad \dot{x} = A(t)x$$

$$L_H := \{x: I \rightarrow \mathbb{K}^n, x \text{ löst } (H)\}$$

Beachte: $x, y \in L_H, c_1, c_2 \in \mathbb{K} \Rightarrow c_1 x + c_2 y \in L_H$

2.2. Satz (1) L_H ist n -dim. $\mathbb{K}$ -VR (UVR von $C^1(I, \mathbb{K}^n)$)

(2) Für Lsg $x_1, \dots, x_k \in L_H$ sind äquiv:

(i) $x_1, \dots, x_k$ sind linear unabh. (als Fkt auf I)

(ii) $\forall t \in I$ sind $x_1(t), \dots, x_k(t)$ lin. unabh. in $\mathbb{K}^n$

(iii) $\exists t_0 \in I: x_1(t_0), \dots, x_k(t_0)$ sind lin. unabh.

(3) Sei $x_p: I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine beliebige (partikuläre) Lsg von (5) (Existenz nach Satz 2.1) $\Rightarrow$

Die Menge L der Lsgen von (5) ist geg. durch

$$L = x_p + L_H = \{x_p + x: x \in L_H\}$$

Beweis: (1) Zu $t_0 \in I$ betrachte

$$\alpha_{t_0}: L_H \rightarrow \mathbb{K}^n, \alpha_{t_0}(x) = x(t_0)$$

$$\alpha_{t_0} \text{ ist VR-Homom.: } \alpha_{t_0}(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) \\ = c_1 \alpha_{t_0}(x_1) + c_2 \alpha_{t_0}(x_2)$$

„Anfangswerthomom.“

Existenzteil des EE-Satzes 2.1 $\Rightarrow \alpha_{t_0}$ surjektiv

Endteil " " " $\Rightarrow \alpha_{t_0}$ injektiv

$\Rightarrow \alpha_{t_0}$ Isomorphismus $\Rightarrow \dim L_H = \dim \mathbb{K}^n = n$

(2) Jedes α_{t_0} ist Isom., führt also lin. unabh. Tupel

$x_1, \dots, x_k \in L_H$ in lin. unabh. Tupel $x_1(t), \dots, x_k(t) \in \mathbb{K}^n$

über, und umgekehrt

$$(3) x \in L \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(x - x_p) = \dot{x} - \dot{x}_p = \overset{\text{„A(t)“}}{(Ax + b)} - \overset{\text{„b(t)“}}{(Ax_p + b)} \\ = A(x - x_p)$$

$$\Leftrightarrow x - x_p \in L_H$$

■

Def. Seien $x_1, \dots, x_n \in L_H$ Lsgn von (H) $\dot{x} = A(t)x$

$\Rightarrow X := (x_1, \dots, x_n) : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt Lösungsmatrix von (H)

Eine Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ von L_H heißt Fundamentalsystem (Lösungsbasis) von (H)

Die Matrix $X = (x_1, \dots, x_n)$ heißt dann Fundamentalmatrix von (H).

Fakten: Sei $X = (x_1, \dots, x_n)$ Lsg-Matrix von (H) $\Rightarrow$

(1) $\dot{X}(t) = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_n(t)) = A(t)(x_1(t), \dots, x_n(t)) = A(t)X(t)$

(2) X ist F-Matrix $\Leftrightarrow \det X(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$
Satz 2.2.
 $\Leftrightarrow \exists t_0 \in I : \det X(t_0) \neq 0$

(3) Sei X F-Matrix $\Rightarrow$ die allg. Lsg von (H) ist geg. durch
$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = X(t) \cdot c, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

Ein AWP $x(t_0) = x_0$ legt c eindeutig fest: $c = X(t_0)^{-1} x_0$

Bsp: $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} x, \quad \omega \in \mathbb{R}$; explizit: $\begin{cases} \dot{x}_1 = -\omega x_2 \\ \dot{x}_2 = \omega x_1 \end{cases}$

Lösungen: $x(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad y(t) = \begin{pmatrix} -\sin \omega t \\ \cos \omega t \end{pmatrix}$

$X(t) := \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \Rightarrow \det X(t) = 1 \quad \forall t \Rightarrow (x, y)$ ist
F-System

Nun: Bestimme partikuläre Lsg der inhomogenen DGL
(S) $\dot{x} = A(t)x + b(t)$

Ansatz (variation d. Konstanten): $x(t) = X(t) \cdot c(t)$

X : F-Matrix von (H), $c \in C^1(I, \mathbb{K}^n)$ gesucht

In (S): $\underbrace{\dot{X}c}_{\underbrace{AXc}} + X\dot{c} = \dot{x} \stackrel{!}{=} Ax + b = \underbrace{AXc}_{\text{Also:}} + b \Leftrightarrow \dot{c} = X^{-1}b$

2.3. Satz. Sei X F-Matrix von $\dot{x} = A(t)x \Rightarrow$
 $x_p(t) = X(t)c(t)$ mit $c(t) = \int X(t)^{-1}b(t)dt$ (Stammfkt)
 ist partikuläre Lsg von (5),

Nächstes Ziel: Lsg von $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ konstant
 Falls $n=1 \Rightarrow x(t) = c \cdot e^{tA}$ ($t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$)
 Hat höherdim. Verallgemeinerung! Dazu:

2. Die Matrix-Exponentialfunktion

Def. Sei $(X, \|\cdot\|)$ Banachraum, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$
 Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$ existiert in X
 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konv. absolut $\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$

Eine absolut konv. Reihe konvergiert, da ihre Partialsummenfolge eine Cauchyfolge bildet. Denn: $n \geq m \Rightarrow$
 $\left\| \sum_{k=m}^n x_k \right\| \leq \sum_{k=m}^n \|x_k\| \rightarrow 0$ für $n, m \rightarrow \infty$ (Cauchy-Krit.)

Nun: $X = \mathbb{K}^{n \times n}$ mit Operatornorm $\|\cdot\|$ (vollständig!) $\otimes^{s.u.}$

Bsp: Operatornorm zu $\|x\| = \|x\|_{\infty}$ auf $\mathbb{K}^n$ ($\rightarrow$ Ana 2):

$$\|A\| = \|A\|_{\infty} = \sup_{1 \leq i \in n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{Zeilensummennorm})$$

Beachte für Folgen in $\mathbb{K}^{n \times n}$:

$$\|A_k - A\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|A_k - A\|_{\infty} \rightarrow 0 \Leftrightarrow a_{k,ij} \rightarrow a_{ij} \quad \forall i,j \quad A = (a_{ij}) \text{ etc.}$$

Ferner: $B \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow A \mapsto AB, A \mapsto BA$ ist stetig auf $\mathbb{K}^{n \times n}$

$$\text{denn: } A_k \rightarrow A \Rightarrow \|A_k B - A B\| \leq \|A_k - A\| \cdot \|B\| \rightarrow 0.$$

$$\otimes \quad A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \quad (\text{Submultiplikativität})$$

$$\text{denn: } \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Cauchy-Produkt: Für absolut konvergente Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} A_k, \sum_{k=0}^{\infty} B_k$ in $(\mathbb{K}^{n \times n}, \|\cdot\|)$ gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n A_k B_{n-k}\right) \quad (\text{wieder abs. konvergent})$$

Beweis wie für Reihen in $\mathbb{C}$.

2.4. Satz (Matrix-Exponentialfkt)

(1) $A \in \mathbb{K}^{n \times n} \Rightarrow e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ konvergiert (sogar absolut) in $\mathbb{K}^{n \times n}$ ($A^0 := I$)

(2) $e^A e^B = e^{A+B}$, sofern $AB = BA$

(3) $e^A \in GL(n, \mathbb{K}), (e^A)^{-1} = e^{-A}$

(4) $S \in GL(n, \mathbb{K}) \Rightarrow e^{S^{-1}AS} = S^{-1}e^A S$

Beweis: (1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|} < \infty$

(2) $e^A e^B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}\right) \stackrel{\text{Cauchy-Pr.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k B^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)$
 $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n = e^{A+B}$

(3) $e^A \cdot e^{-A} \stackrel{(2)}{=} e^{A+(-A)} = e^0 = I \Rightarrow \text{Beh.}$

(4) $e^{S^{-1}AS} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}AS)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} S^{-1} \frac{A^k}{k!} S \underset{\text{mult. stetig}}{=} S^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) S$

Bsp: 1. $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

2. A nilpotent mit $A^k = 0 \Rightarrow e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB \neq BA, e^A e^B \neq e^{A+B}$

2.5. Satz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}, x(t) = e^{tA}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ diffbar mit $\dot{x}(t) = Ax(t)$

Beweis: $\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \frac{e^{hA} - I}{h} \cdot e^{tA} \xrightarrow{h \rightarrow 0} A \cdot e^{tA}$

Denn: $\left\| \frac{1}{h} \underbrace{(e^{hA} - I)}_{hA + \frac{1}{2}h^2 A^2 + \dots} - A \right\| = \frac{1}{|h|} \left\| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k A^k}{k!} \right\| \leq |h| \|A\|^2 \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-2} \|A\|^{k-2}}{(k-2)!}}_{\leq e^{|h|A}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

3. Homogene lineare Systeme mit konst. Koeffizienten

$$(*) \quad \dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{K}^{n \times n} \quad (\text{konst.})$$

2.6. Satz (1) Das AWP zu (*) mit $x(0) = x_0 \in \mathbb{K}^n$ hat die (eindeutige) Lsg

$$x(t) = e^{tA} x_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

(2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis des $\mathbb{K}^n \iff \{e^{tA} v_1, \dots, e^{tA} v_n\}$ ist F-System für (*)

Insbes: $X(t) = e^{tA}$ ist F-Matrix von (*)

Beweis: (1) $\dot{x}(t) \stackrel{\text{Satz 2.5}}{=} A e^{tA} x_0 = A x(t)$; $x(0) = e^0 \cdot x_0 = x_0$

(2) $\Rightarrow$ die $e^{tA} v_i$ sind Lsg nach (1), lin. unabh. nach Satz 2.2. $\Leftarrow$ aus Satz 2.2. $\blacksquare$

Berechnung von e^{tA} über exp-Reihe i.A. schwierig

Nützlich: Jordansche Normalform (JNF)

Einfacher Fall: Sei v Eigenvektor (EV) von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ (EW)
d.h. $v \neq 0$ und $Av = \lambda v \Rightarrow e^{tA} v = e^{t\lambda} v$ (da $A^k v = \lambda^k v \quad \forall k$)

Damit:

2.7. Propos. Sei A diagonalisierbar, d.h. $\exists$ Basis $(v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{K}^n$ bestehend aus EV von A mit $Av_i = \lambda_i v_i \Rightarrow$
 $\{e^{\lambda_1 t} v_1, \dots, e^{\lambda_n t} v_n\}$ ist F-System von $\dot{x} = Ax$

Allgemein: Hauptvektorbasis, JNF (WH aus LA 2)

Das charakt. Polynom $p_A(t) := \det(A - tI)$ zerfällt über $\mathbb{K}$:

$$(*) \quad p_A(t) = \pm \prod_{i=1}^r (t - \lambda_i)^{k_i} \quad (p_A: \text{Polyn. vom Grad } n \text{ in } t)$$

λ_i : die paarweise verschiedenen Eigenwerte, k_i ihre sog. algebraischen Vielfachheiten.

(Bem.: über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ zerfällt p_A stets in Lin. Faktoren)

$$\Rightarrow \mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^r H_{\lambda_i}$$

$$H_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i I)^{k_i}$$

soq. Hauptraum zum EW λ_i

Sei λ EW, alg. Vielfachheit k

$\Rightarrow \dim H_\lambda = k$, und $\exists$ Basis B_λ von H_λ , die zusammen-
gesetzt ist aus HV-Ketten $(v_1, \dots, v_s)$, wobei
 v_1 EV zu λ , v_ℓ HV der Stufe ℓ zu λ mit

$$(A - \lambda I)v_\ell = v_{\ell-1}$$

(Stufe ℓ heißt: $(A - \lambda I)^\ell v_\ell = 0$, $(A - \lambda I)^{\ell-1} v_\ell \neq 0$)

Vorgehen: Bestimme Basis des Eigenraums zu λ , und zu
jedem dieser EV eine HV-Kette (allen automatisch lin. unabh.)

$\Rightarrow$

Zusammen-
setzen $B := (B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_r})$ ist Basis des $\mathbb{K}^n$
bestehend aus HV von A

$S \in GL(n, \mathbb{K})$: die durch B spaltenweise geg. Matrix

$$\Rightarrow S^{-1}AS = J = \begin{pmatrix} \overline{J_{\lambda_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{J_{\lambda_r}} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{JNF von } A \\ \text{(block-diagonal)} \end{array}$$

J_{λ_i} : Jordan-Block zum EW λ_i (Größe k_i)

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & * & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \quad * \in \{0, 1\}$$

$J = D + N$, $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_r)$, N nilpotent,
 $DN = ND$,

$$A = SJS^{-1} \Rightarrow e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1}$$

$$e^{tJ} = e^{t(D+N)} = \underbrace{e^{tD}}_{DN=ND} e^{tN} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_r t} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{e^{tN}}_{\text{Reihe bricht ab}}$$

Explizites F-System von $\dot{x} = Ax$:

Sei $v \in HV$ von A der Stufe ℓ zum EW $\lambda \Rightarrow$

$$e^{tA} v = e^{t(\lambda I + A - \lambda I)} v = e^{\lambda t} \cdot e^{t(A - \lambda I)} v$$

$$= e^{\lambda t} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k}_{=: p_v(t)} v$$

$=: p_v(t)$ Polynom in t , Grad $\ell-1$

$e^{\lambda t} \cdot p_v(t)$: „Exponentialpolynom“ ($v \in EV \Rightarrow p_v(t) = v$)

Damit:

28. Satz p_A zerfällt über $\mathbb{K}$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ sei HV-Basis des $\mathbb{K}^n$

zu EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n \Rightarrow$

$\left\{ \underbrace{e^{\lambda_1 t} p_{v_1}(t)}_{e^{tA} v_1}, \dots, \underbrace{e^{\lambda_n t} p_{v_n}(t)}_{e^{tA} v_n} \right\}$ ist F-System von $\dot{x} = Ax$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$; $\lambda = 1$ 3-fache EW

Eigenraum: $\ker(A - I) = \mathbb{K} v_1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

HV-Kette dazu: $(A - I)v_2 = v_1 \leadsto v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, HV 2. Stufe

$(A - I)v_3 = v_2 \leadsto v_3 = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ HV 3. Stufe

$\Rightarrow$ F-System $\left\{ e^t v_1, e^t (I + t(A - I)) v_2 = e^t (v_2 + t v_1), \right.$
 $\left. e^t (v_3 + t v_2 + \frac{t^2}{2} v_1) \right\}$

Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, und p_A nicht über $\mathbb{R}$ zerfällt?

Bestimme erst komplexes F-System $F_{\mathbb{C}}$, bestehend aus Lsg d. Form

(i) $e^{tA} v$, $v \in \mathbb{R}^n$ HV zu EW $\lambda \in \mathbb{R}$

(ii) $e^{tA} v$, $e^{tA} \bar{v}$, $v \in \mathbb{C}^n$ HV zu EW $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
 $\bar{v}$ " " " $\bar{\lambda}$ (gleiche Stufe!)

Ersetze $\{e^{tA}v, e^{tA}\bar{v}\}$ in $F_{\mathbb{C}}$ durch
 $\underbrace{\{ \operatorname{Re}(e^{tA}v), \operatorname{Im}(e^{tA}v) \}}_{e^{tA} \operatorname{Re} v, e^{tA} \operatorname{Im} v}$

Beachte dazu: $\operatorname{Re} v = \frac{1}{2}(v + \bar{v})$, $\operatorname{Im} v = \frac{1}{2i}(v - \bar{v})$ sind $\mathbb{R}$ -linear unabh.,
 da $v, \bar{v}$ $\mathbb{C}$ -lin. unabh. als EV zu verschiedenen EW.
 Dies liefert reelles F-System.

Qualitativer Aspekt:

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $J = S^{-1}AS$ die JNF von A als Matrix aus $\mathbb{C}^{n \times n}$.

x löst $\dot{x} = Ax \iff y = S^{-1}x$ löst $\dot{y} = S^{-1}A \tilde{S} y = Jy$

Sei $S = (v_1, \dots, v_n)$ (v_i : Spalten von S)

$$x(t) = Sy(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) v_i$$

$\Rightarrow$ die Komponenten $y_i(t)$ sind die Koordinaten von $x(t)$
 bzgl. der Basis $(v_1, \dots, v_n)$

Konsequenz: die Lsg von $\dot{x} = Ax$ und $\dot{y} = Jy$ sind qualitativ
 sehr ähnlich!

Bsp: $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

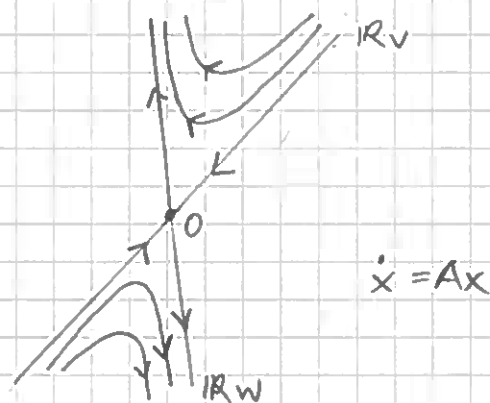
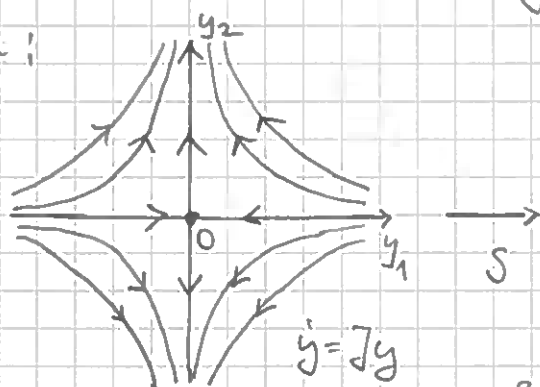
A habe 2 reelle EW $\lambda < \mu$. EV dazu: v, w

Allg. Lsg von $\dot{x} = Ax$: $x(t) = c_1 e^{\lambda t} v + c_2 e^{\mu t} w$, $c_i \in \mathbb{R}$

$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Allg. Lsg von $\dot{y} = Jy$: $y(t) = c_1 e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{\mu t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Phasenporträts (d.h. Verläufe der Lsg-Bahnen im $\mathbb{R}^2$) im Fall

$\lambda < 0 < \mu$:



4. Skalare lineare DGL n-ter Ordnung

Bauart: (*) $x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = b(t)$

mit $a_i, b: I \rightarrow \mathbb{K}$ stetig (I offenes Intervall)

(*) homogen: $\Leftrightarrow b \equiv 0$, sonst inhomogen

Äquiv. System 1. Ordnung für $y = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}$:

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$\vdots$

$$\dot{y}_{n-1} = y_n$$

$$\dot{y}_n = -a_0(t)y_1 - \dots - a_{n-1}(t)y_n + b(t)$$

$$\text{kurz: } \dot{y} = A(t)y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & -a_{n-1} & \end{pmatrix}$$

Koeff a_i konst. $\Leftrightarrow A$ konst.

$L \subseteq C^n(I, \mathbb{K})$: Lsg-Menge von (*)

L_H " : Lsg-Menge der assoz. homog. DGL

$$(H) \quad x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0$$

$L' \subseteq C^1(I, \mathbb{K}^n)$: Lsg-Raum des Systems $\dot{y} = A(t)y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$

L'_H " : " von $\dot{y} = A(t)y$

Betrachte $\Phi: C^n(I, \mathbb{K}) \rightarrow C^1(I, \mathbb{K}^n)$

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} =: y$$

$\Rightarrow \Phi$ linear und $\Phi: L \rightarrow L'$ bij.

$L_H \rightarrow L'_H$ bij.; $\Phi^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1$ (linear)

Mit Sak 2.1, 2.2 folgt:

2.9. Satz. (1) Jedes AWP zu (*) d. Form $x(t_0) = x_{0,1}$,

$\dot{x}(t_0) = x_{0,2}, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n}$ hat eine eindeutige,

auf ganz I def. Lsg $x \in C^n(I, \mathbb{K})$

(2) Die Lsg-Menge L_H von (H) ist ein n -dim. UVR von $C^n(I, \mathbb{K})$,

(3) Die Lsg-Menge L von $(*)$ ist geg. durch

$$L = x_p + L_H, \quad x_p \text{ eine bel. part. Lsg von } (*)$$

(4) Seien $x_1, \dots, x_n \in L_H$ und

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ \dot{x}_1(t) & & \dot{x}_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad \text{Wronski-Det}$$

Dann sind äquiv:

(i) $\{x_1, \dots, x_n\}$ ist ein Fundamentalsystem von (H) , d.h. Basis von L_H

(ii) $W(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

(iii) $\exists t_0 \in I: W(t_0) \neq 0$

Bsp: $\ddot{x} - \frac{1}{2t} \dot{x} + \frac{1}{2t^2} x = 0$ auf $I = (0, \infty)$

Ansatz: $x(t) = t^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$0 \stackrel{!}{=} \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} - \frac{\alpha}{2}t^{\alpha-2} + \frac{1}{2}t^{\alpha-2} \Leftrightarrow \alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Lsg } x_1(t) = t, x_2(t) = \sqrt{t}$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & \sqrt{t} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{t}}{2} \neq 0 \text{ auf } I \Rightarrow \{x_1, x_2\} \text{ ist F-System.}$$

Allgemeine Lsg: $x(t) = c_1 t + c_2 \sqrt{t}, c_i \in \mathbb{R}$

Partikuläre Lsg der inhomog. Gleichung $(*)$:

2.10. Satz (Variation d. Konstanten)

Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ F-System von $(H) \rightarrow (*)$ besitzt partikuläre Lsg d. Form

$$x_p(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) x_i(t) \quad \text{mit Koeff. } c_i: I \rightarrow \mathbb{K}.$$

Beweis: Das äquiv. System hat part. Lsg

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) y_i(t), \quad \{y_1, \dots, y_n\} \text{ F-System von (H)}$$

1. Komp. davon ist part. Lsg von (*).

5. Lineare DGL n-ter Ordnung mit konst. Koeff.

$$(*) \quad x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = b(t); \quad a_i \in \mathbb{K}, b: I \rightarrow \mathbb{K} \text{ stetig}$$

Assoz. homogene DGL:

$$(H) \quad x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0$$

Def $P(t) := t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0 \in \mathbb{K}[t]$

Charakteristisches Polynom von (*)

Setze $D := \frac{d}{dt}$; $P(D) := D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0$

lin. Differentialoperator zu P

Damit lautet (*): $P(D)x = b(t)$

(H): $P(D)x = 0$

Ansatz für Lsg von (H): $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow Dx = \lambda e^{\lambda t}, \quad P(D)x = P(\lambda)e^{\lambda t}$

Also: $e^{\lambda t}$ löst (H) $\Leftrightarrow P(\lambda) = 0$

2. H. Satz F-System für (H):

Vorausss: P zerfalle in lin. Faktoren über $\mathbb{K}$ (erfüllt, falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ die verschiedenen NS von P mit

Vielfachheiten $k_1, \dots, k_r$ ($k_1 + \dots + k_r = n$) $\Rightarrow$

$$F = \bigcup_{i=1}^r \{e^{\lambda_i t}, t e^{\lambda_i t}, \dots, t^{k_i-1} e^{\lambda_i t}\} \text{ ist F-System von (H)}$$

Beweis: Zu (H) äquiv. System: $\dot{y} = Ay$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

L_H : Lsg-Raum von (H)

L'_H : " " " $\dot{y} = Ay$

$L_H \cong L'_H$ via

$$\Phi: L_H \rightarrow L'_H, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix}; \quad \Phi^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1$$

Char. Polynom von A:

$$p_A(t) = \det(A - tI) = (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} t & -1 & & 0 \\ 0 & t & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_0 & a_1 & \dots & t + a_{n-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{entw. nach} \\ = \\ \text{letzte Zeile} \end{matrix}$$

$$= (-1)^n p(t), \quad \text{also selbes NS!} \quad /$$

Satz 2.8. $\Rightarrow L'_H = \bigoplus_{i=1}^r L'_{\lambda_i}$

$$L'_{\lambda} = \langle e^{\lambda t} p_{v_1}(t), \dots, e^{\lambda t} p_{v_k}(t) \rangle, \quad (v_1, \dots, v_k): \text{HV-Basis des Hauptraums } H_{\lambda}$$

p_{v_i} : Polyn. vom Grad $\ell_i - 1$ mit Koeff. aus $\mathbb{C}^n$

$\Rightarrow \Phi^{-1}$ anwenden $L_H = \bigoplus_{i=1}^r L_{\lambda_i}$, wo

$$L_{\lambda} = \langle e^{\lambda t} p_1(t), \dots, e^{\lambda t} p_k(t) \rangle, \quad p_i \in \mathbb{C}[t], \quad \text{grad } p_i \leq \ell_i - 1$$

$$= \langle e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda t} \rangle \quad (\text{da } \dim L_{\lambda} = k) \quad \blacksquare$$

Fall $K = \mathbb{R}$, P nicht zerfallend über $\mathbb{R}$: Rechne über $\mathbb{C}$!

Sei $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ NS von P , $\beta \neq 0 \Rightarrow$

$\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ ebenfalls, selbe Vielfachheit

Ersetze $\{t^{\ell} e^{\lambda t}, t^{\ell} e^{\bar{\lambda} t}\}$ im komplexen F-System durch $\{t^{\ell} e^{\alpha t} \cos \beta t, t^{\ell} e^{\alpha t} \sin \beta t\}$ (lin. unabh. über $\mathbb{R}$!)

Bsp: $x^{(4)} + 2x^{(2)} + x = 0$

Char. Polynom: $P(t) = t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2$

NS: $\pm i$, je 2-fach

Komplexes F-System: $\{e^{it}, te^{it}, e^{-it}, te^{-it}\}$

Reelles " $\{\cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t\}$

§3 Topologischer Exkurs

Def. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Topologie auf X ist ein System $\tau \subseteq P(X)$ (Potenzmenge von X) mit

(1) $\emptyset, X \in \tau$

(2) $U_i \in \tau, i \in I$ (bel. Indexmenge) $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

(3) $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$

(X, τ) : top. Raum. Die $U \in \tau$ heißen offen in (X, τ)

Bsp: 1. (X, d) metr. Raum $\Rightarrow \tau_d = \{U \subseteq X : U \text{ offen bzgl. } d\}$
ist Top. auf X

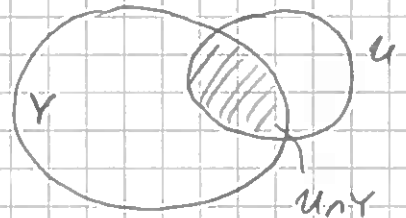
2. X Menge $\Rightarrow \tau := P(X)$ diskrete Top. auf X ;
 $\tau := \{\emptyset, X\}$ triviale Top. auf X

3. $X = \mathbb{R}, \tau = \{\emptyset\} \cup \{\text{Vereinigungen von Intervallen d. Form } (-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$

4. (X, τ) top. Raum, $Y \subseteq X$

Induzierte Topologie (Spurtop.) auf Y :

$$\tau_Y := \{U \cap Y : U \in \tau\}$$



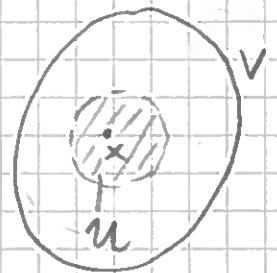
Def. Sei (X, τ) top. Raum

1. $A \subseteq X$ heißt abgeschlossen, falls $X - A$ offen

2. $V \subseteq X$ heißt Umgebung von $x \in X$: $\Leftrightarrow$

$\exists U \in \tau$ mit $U \subseteq V$ und $x \in U$.

(Umgebungen müssen nicht offen sein!)*



3. (X, τ) Hausdorff-Raum: $\Leftrightarrow$

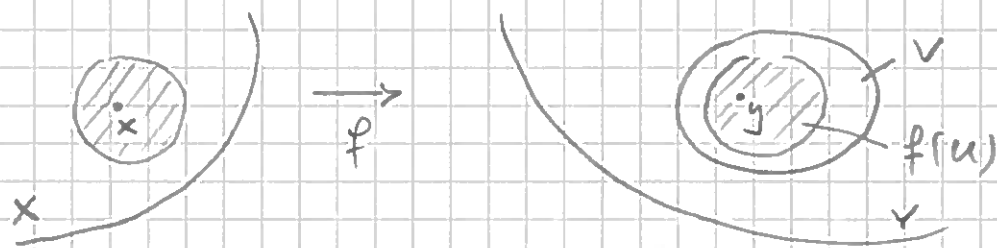
$\forall x, y \in X$ mit $x \neq y \quad \exists$ Umgeb. U von x, V von y mit $U \cap V = \emptyset$

Jeder metr. Raum ist Hausd. $(\mathbb{R}, \tau)$ aus Bsp 3 oben ist nicht Hausd.

(*) aber: jede Umgeb. von x enthält eine offene Umgeb. von x

Def. Seien X, Y top. Räume, $f: X \rightarrow Y$ Abb.

- (1) f stetig in $x \in X : \Leftrightarrow \forall$ Umgeb. V von $y = f(x)$ exist. Umgeb. U von x mit $f(U) \subseteq V$



- (2) f stetig (auf X) : $\Leftrightarrow f$ stetig in allen $x \in X$

3.1. Satz. Für $f: X \rightarrow Y$ sind äquiv:

- (1) f stetig
- (2) $V \subseteq Y$ offen $\Rightarrow f^{-1}(V) \subseteq X$ offen
(Urbilder offener Mengen sind offen)
- (3) $A \subseteq Y$ abgeschl. $\Rightarrow f^{-1}(A) \subseteq X$ abgeschl.

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) Sei $V \subseteq Y$ offen, o. E. $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, sei $x \in f^{-1}(V)$
 $\rightarrow V$ ist Umgeb. von $f(x) \Rightarrow \exists$ offene Umgeb. U von x
mit $f(U) \subseteq V$, also $U \subseteq f^{-1}(V)$
 $\Rightarrow f^{-1}(V)$ ist Vereinigung von offenen Umgebungen seiner Punkte, also offen.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sei $x \in X, y = f(x), V \subseteq Y$ Umgeb. von y , Wähle offene Umg. $V' \subseteq V$ von $y \Rightarrow U := f^{-1}(V')$ ist offene Umg. von x in X mit $f(U) = V' \subseteq V$.

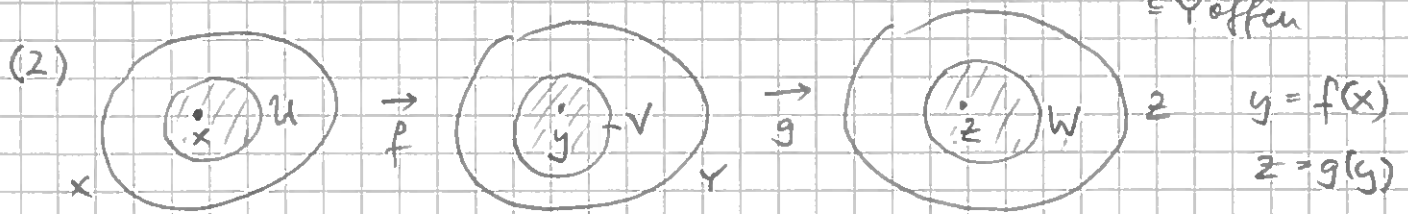
(2) $\Leftrightarrow$ (3) mit Komplementbied. (wie in metr. Räumen) ■

3.2. Lemma. Seien X, Y, Z top. Räume, $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ Abb.

Dann gilt:

- (1) f, g stetig $\Rightarrow g \circ f$ stetig
- (2) f stetig in x, g stetig in $f(x) \Rightarrow g \circ f$ stetig in x

Beweis: (1) Sei $W \subseteq Z$ offen $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(W)}_{\subseteq Y \text{ offen}}) \subseteq X$ offen



Sei $W \subseteq Z$ Umg. von z . g stetig in $y \Rightarrow \exists$ Umg. $V \subseteq Y$ um y :

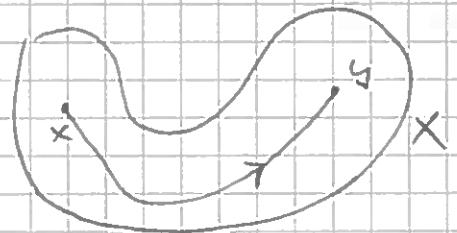
$g(V) \subseteq W$. f stetig in $x \Rightarrow \exists$ Umg. $U \subseteq X$ um x :

$f(U) \subseteq V$. Also: $(g \circ f)(U) \subseteq W \Rightarrow g \circ f$ stetig in x $\square$

Def. Ein top. Raum X heißt

• weg zusammenhängend : $\Leftrightarrow \forall x, y \in X \exists$ stetige Kurve („Weg“)

$\gamma: [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = x, \gamma(b) = y$

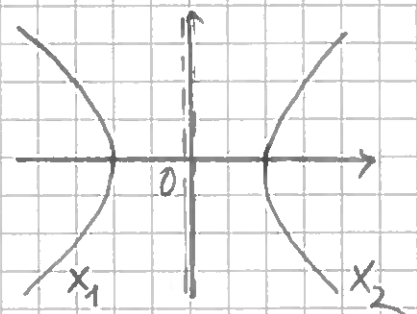


• zusammenhängend : $\Leftrightarrow \nexists$ Zerlegung $X = U \cup V$ in disjunkte, nichtleere, offene Teilmengen $U, V \subseteq X$

Bsp: $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$

Hyperbel (mit induz. Top.)

X nicht zslg: beide Äste X_1, X_2 sind offen in X .



3.3 Satz Sei $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$. Dann: X zslg $\Leftrightarrow X$ Intervall.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “ augen. X kein Intervall $\Rightarrow \exists a, b \in X: a < b$

und $\exists s \in \mathbb{R} \setminus X: a < s < b$

$U := \{x \in X: x < s\}, V := \{x \in X: x > s\} \Rightarrow$

$X = U \cup V, U \cap V = \emptyset, U, V \neq \emptyset$ und offen in X $\nsubseteq$

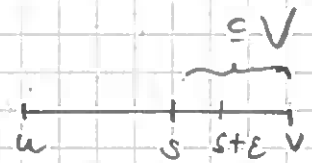
„ $\Leftarrow$ “ Ang. $X = U \cup V, U \cap V = \emptyset, U, V \neq \emptyset$, offen.

Wähle $u \in U, v \in V, 0 \in U, u < v$. $[u, v] \subseteq X$, da X Intervall

$$s := \sup([u, v] \cap U) \in X$$

$u = X \setminus V$ abg., in $X \Rightarrow s \in U$

$s < v$, da $v \notin U$. Ferner $(s, v] \subseteq V$



Andererseits: $U \subseteq X$ offen $\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: [s, s+\varepsilon) \subseteq U$ $\nRightarrow$ $\square$

3.4. Satz X top. Raum, X wegzshgd $\Rightarrow X$ zshgd

Bew: Übung

Bsp: $\mathbb{R}^n$ wegzshgd, also auch zshgd.

3.5. Lemma Sei X zshgd/wegzshgd, $f: X \rightarrow Y$ stetig (X, Y top. Räume) $\Rightarrow f(X)$ auch zshgd/wegzshgd

Beweis: zshg: Sei $f(X) = U \cup V$, $U, V \neq \emptyset$, offen, disj. $\Rightarrow$
 $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ ist analoge Zerleg. von X $\nRightarrow$

Wegzshg: Wie in Ana 2 (transportiere Wege mittels f) $\square$

3.6. Satz Sei Z normierter Raum, $X \subseteq Z$ offen + zshgd $\Rightarrow$
 X wegzshgd

„Offen“ ist wichtig! Bsp: Übungen

Beweis: Fixiere $a \in X$

$$U := \{x \in X: \exists \text{ Weg in } X \text{ von } a \text{ nach } x\}$$

(i) $U \neq \emptyset$ ($a \in U$), U offen in X , denn:

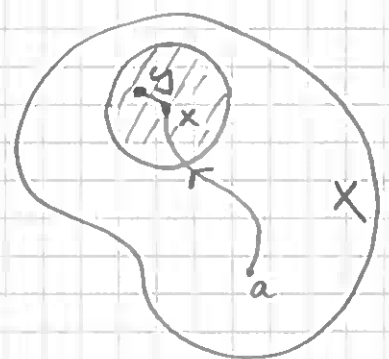
Sei $x \in U \xRightarrow{X \text{ offen}} \exists \varepsilon > 0: B_\varepsilon(x) \subseteq X$.

Jedes $y \in B_\varepsilon(x)$ ist durch Strecke in X mit x verbindbar, also auch mit $a \Rightarrow B_\varepsilon(x) \subseteq U$

(ii) $V := X \setminus U$ auch offen, denn: Sei $x \in V$, $B_\varepsilon(x) \subseteq X$

$\Rightarrow B_\varepsilon(x) \cap U = \emptyset$, denn sonst gäbe es Weg von a zu $y \in B_\varepsilon(x)$, also auch zu x . Also $B_\varepsilon(x) \subseteq V$.

X zshgd. $\Rightarrow V = \emptyset \Rightarrow U = X \Rightarrow$ Behw $\square$



§4 Mengensysteme und Maße

Ziel: Ordne möglichst vielen $A \subseteq \mathbb{R}^d$ (oder $A \subseteq X$, X allg. Menge) ein Maß (Volumen) zu. Darauf später aufbauend: leistungsfähiger Integralbegriff

Wunsch (naiv): Definiere für jedes $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Maß $\mu(A) \in [0, \infty]$, so dass

(1) $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $A_1, A_2, \dots \subseteq \mathbb{R}^d$ disjunkt, dh. $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \Rightarrow$

$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \dots$ (Konvention: $x + \infty = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$)

(3) $Q = [0, 1]^d$ (Einheitsquadrat)

$\Rightarrow \mu(Q) = 1$



(4) Translationsinvarianz:

$A \subseteq \mathbb{R}^d, x + A = \{x + a, a \in A\} \quad (x \in \mathbb{R}^d) \Rightarrow \mu(x + A) = \mu(A)$

Es gibt kein $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$ mit (1) - (4)!

(Beweis benötigt Auswahlaxiom $\rightarrow$ später + ÜE)

Problem: $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ist zu groß

Abschwächung: Betrachte geeignete kleinere Mengensysteme

1. σ -Algebren und Ringe

Def. Sei $X \neq \emptyset$ Menge

(1) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt σ -Algebra (auf X), falls

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

(iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$

($\mathcal{A}$ ist stabil unter abz.baren Vereinigungen und Komplementbildung)

(2) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Ring, falls

(a) $\emptyset \in \mathcal{R}$

(b) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ stabil unter endl. Vereinig.)

(c) $A, B \in \mathcal{R}, A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{R}$

Beachte: 1. $\mathcal{A}$ σ -Alg. auf $X \Rightarrow \mathcal{A}$ Ring. Denn:

$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ wo $A_1 = A, A_2 = B, A_n = \emptyset$ sonst

$B \setminus A = B \cap A^c \stackrel{\text{de Morgan}}{=} (B^c \cup A)^c \in \mathcal{A}$

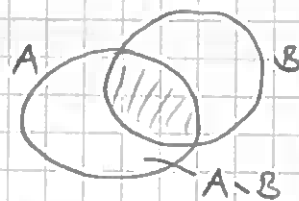
2. $A, B \in \mathcal{R}$ bel. $\Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{R}$, da $B \setminus A = \underbrace{(A \cup B)}_{\in \mathcal{R}} \setminus A$

Regeln v. de Morgan: $(A_i)_{i \in I} \subseteq X \Rightarrow \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c; \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c$

4.1. Lemma 1. $\mathcal{R}$ Ring $\Rightarrow \mathcal{R}$ ist $\cap$ -stabil, d.h.:

$A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{R}$

Denn: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$



2. $\mathcal{A}$ σ -Alg., $A_n \in \mathcal{A} (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

denn: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}$ nach (ii) + (iii)

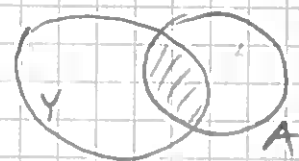
Bsp: 1. $\mathcal{R} = \{\emptyset\}$ kleinster Ring auf X , $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ kleinste σ -Alg.

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ größte σ -Alg. auf X

2. Sei $\mathcal{A}$ σ -Alg. auf X , $\emptyset \neq Y \subseteq X \Rightarrow$

$\mathcal{A}_Y := \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$

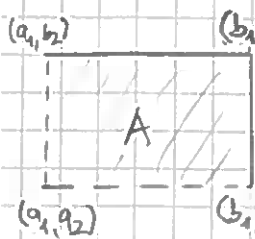
ist σ -Alg. auf Y (Spus- σ -Algebra)



4.2. Bsp: Der von den halboffenen Quadern im $\mathbb{R}^d$ erzeugte Ring

$\mathcal{R}_d := \left\{ \bigcup_{i=1}^n A_i : n \in \mathbb{N}, A_i \subseteq \mathbb{R}^d \text{ disjunkte halboffene Quadern} \right.$

$\left. \text{der Form } A = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] : a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i \right\}$



Beh: $\mathcal{R}_d$ ist Ring

Beweis: (a) $\emptyset = (0, 0]^d \in \mathcal{R}_d$

(c) Seien $A, B \in \mathcal{R}_d$, $A \subseteq B$

1. Fall: A, B h.o. Quader $\Rightarrow B \setminus A$ ist endl. disj. Vereinigung von h.o. Quadern, vgl. Skizze



2. Fall: A h.o. Quader, $B \in \mathcal{R}_d$ bel.

dh. $B = B_1 \cup \dots \cup B_n$, B_i disj. h.o. Quader

$$\Rightarrow B \setminus A = \bigcup_{i=1}^n (B_i \setminus (A \cap B_i)) \rightarrow \text{ist h.o. Quader!}$$

endl. disj. Vereinig von h.o. Quadern nach 1. Fall $\Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{R}_d$

3. Fall: $A, B \in \mathcal{R}_d$ bel., $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ (A_i disj. h.o. Quader)

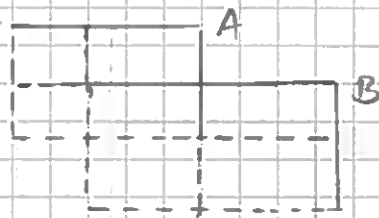
$$\Rightarrow B \setminus A = (\dots ((B \setminus A_1) \setminus A_2) \dots) \setminus A_n \in \mathcal{R}_d$$

(b) ähnlich zu (c).

$B \setminus A_1$

Beachte: A, B h.o. Quader $\Rightarrow$

$A \cup B \in \mathcal{R}_d$, vgl. Skizze



Bem! 1. Für offenen (oder abgeschlossenen) statt h.o. Quaden erhält man keinen Ring; (c) ist verletzt.

2. $\mathcal{R}_d$ Ring $\Rightarrow$ bel. Vereinigungen von h.o. Quaden sind als disjunkte solche Vereinigungen schreibbar.

4.3. Lemma Sei $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von σ -Algebren auf X (I Indexmenge) $\Rightarrow$

$$\mathcal{A} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \text{ ist } \sigma\text{-Alg. auf } X$$

Beweis: (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, da $\emptyset \in \mathcal{A}_i \forall i$

(iii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{A}_i \forall i \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}_i \forall i \Rightarrow X \setminus A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$

(ii) analog

4.4. Kor. + Def. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow$

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ } \sigma\text{-Alg. auf } X \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \}$$

ist σ -Alg. auf X (kleinste σ -Alg., die $\mathcal{E}$ enthält)

„von $\mathcal{E}$ erzeugte σ -Algebra“

Beachte: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$; $\mathcal{E} \text{ } \sigma\text{-Alg} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$

Def. Sei X topologischer Raum. Borel- σ -Algebra auf X :

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\{U \subseteq X : U \text{ offen}\})$$

Die $A \in \mathcal{B}(X)$ heißen Borelmengen auf X

Für uns wichtig: $X = \mathbb{R}^d$ mit Standardtop.

Für $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$ schreibe:

$$a \leq b : \Leftrightarrow a_i \leq b_i \quad \forall i, \text{ analog } a < b \text{ etc.}$$

$$(a, b] := (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d] ; \text{ analog } [a, b], [a, b), (a, b)$$

4.5. Satz Die Borel- σ -Alg. $\mathcal{B}_d := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ wird ebenfalls erzeugt von

$$(1) \mathcal{E}_1 = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b\} \quad (\text{u.o. Quader})$$

$$(2) \mathcal{E}_2 = \mathbb{R}^d$$

$$(3) \mathcal{E}_3 = \{A \subseteq \mathbb{R}^d : A \text{ abgeschl.}\} \quad (\text{d.h. } \sigma(\mathcal{E}_3) = \mathcal{B}_d)$$

Beweis: (1) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\Rightarrow$ zu jedem $x \in U$ exist. u.o. Quader $Q \subseteq U$ mit Eckpunkten aus $\mathbb{Q}^d$ und

$$x \in Q \quad (\text{da } \mathbb{Q}^d \subseteq \mathbb{R}^d \text{ dicht}) \Rightarrow$$

$$U = \bigcup \{(a, b] \in \mathcal{E}_1 : a, b \in \mathbb{Q}^d\}$$

abz. bare Vereinigung

$$\Rightarrow U \in \sigma(\mathcal{E}_1) \Rightarrow \mathcal{B}_d = \sigma(U) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$$

Zu "2": Sei $Q = (a, b] \in \mathcal{E}_1 \Rightarrow$

$$Q = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a, b + \frac{1}{n}) \Rightarrow Q \in \mathcal{B}_d \text{ nach Lemma 4.1.} \Rightarrow \sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{B}_d$$

$(b_1 + \frac{1}{n}, \dots, b_d + \frac{1}{n})$

(2) klar mit (1); (3) klar, da in jeder σ -Alg. $\mathcal{A}$ gilt:

$$A \in \mathcal{A} \Leftrightarrow X \setminus A \in \mathcal{A} \quad \square$$

Bsp: $x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \{x\} \in \mathcal{B}_d$; $A \subseteq \mathbb{R}^d$ abz. bar $\Rightarrow A \in \mathcal{B}_d$

Es gibt $A \in \mathbb{R}^d$ mit $A \notin B_d$! Nicht leicht zu konstruieren
(Bsp. zu Einleitung, man benötigt das Auswahlaxiom)

Auswahlaxiom: Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen $X_i \neq \emptyset$
(I Indexm.) $\Rightarrow \exists$ Fkt $f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$ mit $f(i) \in X_i$

D.h. f ordnet jedem $i \in I$ genau 1 Element aus X_i zu (Auswahlfkt)

2. Maße

Bez. $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ erweiterte reelle Zahlengerade

Fortsetzung der nat. Ordnung auf $\bar{\mathbb{R}}$ durch

$$-\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Intervalle in $\bar{\mathbb{R}}$: $-\infty \leq a \leq b \leq \infty \Rightarrow$

$$[a, b] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}, \text{ etc.}$$

Rechnen in $\bar{\mathbb{R}}$: $x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty, \text{ falls } x > 0, -\infty, \text{ falls } x < 0$$

Further Konvention: $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ (!)

Alles analog mit $-\infty$ statt ∞

Aber: $\infty + (-\infty)$, $-\infty + \infty$ sind nicht definiert!

Konvergenz in $\bar{\mathbb{R}}$: Sei $(a_n) \in \bar{\mathbb{R}}$.

$$a_n \rightarrow a \in \mathbb{R} : \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq n_0, \text{ und } a_n \rightarrow a \text{ in } \mathbb{R}$$

$$a_n \rightarrow \infty : \Leftrightarrow \forall H > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \geq H \quad \forall n \geq n_0.$$

$$a_n \rightarrow -\infty \text{ analog}$$

Def. Sei $X \neq \emptyset$ Menge, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Ring auf X

(1) Eine Abb. $\mu: \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ heißt Inhalt, falls

$$(i) \mu(\emptyset) = 0$$

$$(ii) A, B \in \mathcal{R} \text{ disjunkt} \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(endliche Additivität)

(2) Ein Inhalt μ auf $\mathcal{R}$ heißt Prämaß : $\Leftrightarrow$

$\forall$ disjunkten $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}$ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$) mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$
gilt: $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ σ -Additivität

(3) Ein Prämaß auf einer σ -Algebra $\mathcal{A}$ heißt Maß.

D.h. $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ Maß : $\Leftrightarrow \mu(\emptyset) = 0$ und μ σ -additiv

$X \neq \emptyset$ Menge, $\mathcal{A}$ σ -Alg. auf X , μ Maß auf $\mathcal{A} \Rightarrow$

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt Maßraum.

μ endlich : $\Leftrightarrow \mu(X) < \infty$

Bsp: (1) $\mathcal{A}$ σ -Alg. auf X , $x \in X \Rightarrow \delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Ist endliches Maß auf X (Punktmaß in x)

Denn: $\mu(\emptyset) = 0 \vee \sigma$ -Add.:

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ disj. $\Rightarrow \delta_x(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \exists n_0: x \in A_{n_0} \\ 0, & \text{" } x \notin A_n \forall n \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_x(A_n)$

(2) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ (X Menge), $\mu(A) = |A|$ ($:= \infty$, falls A unendlich)

$\Rightarrow \mu$ ist Maß (Zählmaß auf X)

Denn: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X)$ disj. $\Rightarrow |\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$

(3) μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$, $\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow (\alpha\mu + \beta\nu)(A) := \alpha\mu(A) + \beta\nu(A)$

def. Maß $\alpha\mu + \beta\nu$ auf $\mathcal{A}$.

4.6. Lemma Sei μ Inhalt auf Ring $\mathcal{R}$; $A, B \in \mathcal{R}$

(1) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ Monotonie

Falls zusätzlich $\mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

(keine Aussage, falls $\mu(A) = \infty$!)

(2) $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

Beweis: (1) $B = A \cup (B \setminus A)$ disj. Vereinig. $\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$.

(2) Übung

Wichtigstes Bsp eines Prämaßes:

4.7. Satz (Lebesguesches Prämaß auf $\mathbb{R}^d$)

Sei $A \in \mathcal{R}_d$, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ mit disj. h.o. Quadern $A_i = (a_i, b_i] \in \mathbb{R}^d$

Setze

$$\lambda(A) := \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1}^d (b_{ij} - a_{ij}) \right)$$

$\Rightarrow \lambda$ ist wohldef. (d.h. unabh. von der Darst. von A mit disj. h.o. Quadern), und λ ist Prämaß auf $\mathcal{R}_d$

Beweis: z. zeigen: (a) λ wohldef.

(b) λ Inhalt

(c) λ σ -additiv

Zu (a): 1. Sei $A = (a, b]$, $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d)$

Sei $a_{i_0} \leq x \leq b_{i_0}$ ($1 \leq i_0 \leq d$) $\Rightarrow$

die Hyperebene $x_{i_0} = x$ zerschneidet A in 2 disjunkte h.o. Quader:

$$A_1 = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_{i_0}, x] \times \dots \times (a_d, b_d]$$

$$A_2 = \quad \quad \quad (x, b_{i_0}] \times \dots \quad \quad \quad$$

$$\lambda(A) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2)$$

2. Analog bei Zerleg. von $(a, b]$ mittels HE in k disjunkte h.o. Quader.

3. Sei A h.o. Quader, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, A_i disj. h.o. Quader

$$\Rightarrow \lambda(A) = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i)$$

Denn: Schneide A mit allen HE $x_j = a_{ij}$ und $x_j = b_{ij}$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq d$)

$\Rightarrow A$ zerfällt in disj. h.o. Quader $B_1, \dots, B_k$,

und jedes A_i in gewisse dieses B_e

Mit 2. folgt:

$$\lambda(A) = \sum_{e=1}^k \lambda(B_e) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{e: B_e \subseteq A_i} \lambda(B_e) \right) = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i)$$

	A_1	A_2
A_3	A_4	
	A_5	

4. λ wohldef.: Sei $A \in \mathcal{R}_d$, $A = \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_{j=1}^m B_j$, A_i, B_j jeweils disj. h.o. Quader $\Rightarrow$

$$A_i = \bigcup_j (A_i \cap B_j) \quad \text{disj. h.o. Quader}$$

$$B_j = \bigcup_i (A_i \cap B_j) \quad "$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda(A_i) = \sum_{i,j} \lambda(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \lambda(B_j)$$

Zu (b): Sei $A = \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{R}_d$, $B = \bigcup_{j=1}^m B_j \in \mathcal{R}_d$, A, B disj.;

A_i, B_j jeweils disj. h.o. Quader $\Rightarrow$

$$\lambda(A \cup B) \stackrel{\text{def. von } \lambda}{=} \sum_i \lambda(A_i) + \sum_j \lambda(B_j) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

$$\lambda(\emptyset) = \lambda([0,0]^d) = 0.$$

Zu (c): Seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R}_d$ disj. mit $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}_d$

$$\text{Beh: } \lambda(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

$$\text{Setze } B_n := A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow B_n \in \mathcal{R}_d, \quad B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$$

$$\lambda(B_n) \stackrel{\text{Lemma 4.6.}}{=} \lambda(A) - \lambda(A_1 \cup \dots \cup A_n), \quad \text{wobei } \lambda\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda(A_i) < \infty$$

$$\text{Also: } \lambda(B_n) = \lambda(A) - \sum_{i=1}^n \lambda(A_i)$$

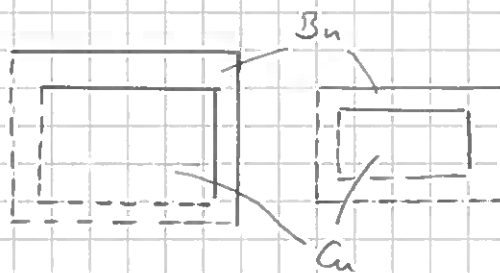
Zu zeigen: $\lambda(B_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

Angenommen nein $\Rightarrow \lambda(B_n)$ monoton $\exists \varepsilon > 0: \lambda(B_n) \geq \varepsilon \quad \forall n \geq N$

Wir folgern nun einen Widerspruch zu $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$:

Zu (1) wähle $C_n \in \mathcal{R}_d$ mit $\bar{C}_n \subseteq B_n$ und

$$\lambda(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$



$$B_n = \underbrace{(B_n \setminus (C_1 \cap \dots \cap C_n))}_{\bigcup_{i=1}^n (B_n \setminus C_i)} \cup (C_1 \cap \dots \cap C_n) \quad \text{disj. Vereinig.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lambda(C_1 \cap \dots \cap C_n) &= \underbrace{\lambda(B_n)}_{\geq \varepsilon} - \underbrace{\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n (B_n \setminus C_i)\right)}_{\substack{\text{L. 4.6.} \\ \leq \sum_{i=1}^n \lambda(B_n \setminus C_i) \\ \leq \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda(B_i \setminus C_i)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}}} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Also: } \lambda(C_1 \cap \dots \cap C_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow C_1 \cap \dots \cap C_n \neq \emptyset \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \bar{C}_1 \cap \dots \cap \bar{C}_n \neq \emptyset \quad \text{" (1)}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n \neq \emptyset \quad (2)$$

$$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset, \text{ Widerspruch}$$

Zu (2): Kompaktheitsargument: Ang. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{C}_n = \emptyset$

$$\Rightarrow \bar{C}_1 \subseteq \left(\bigcap_{n=2}^{\infty} \bar{C}_n\right)^c = \bigcup_{n=2}^{\infty} \underbrace{\bar{C}_n^c}_{\text{offen in } \mathbb{R}^d}$$

$\bar{C}_1$ kompakt $\Rightarrow$ bereits endlich viele der $\bar{C}_n^c$ überdecken $\bar{C}_1$,

$$\text{d.h. } \exists N \in \mathbb{N}: \bar{C}_1 \subseteq \bigcup_{n=2}^N \bar{C}_n^c = \left(\bigcap_{n=2}^N \bar{C}_n\right)^c$$

$$\Rightarrow \bar{C}_1 \cap (\bar{C}_2 \cap \dots \cap \bar{C}_N) = \emptyset, \text{ Widerspruch zu (1)} \quad \square$$

Wir werden das Lebesgue-Prämaß in Kürze zu einem Maß auf der Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}_d$ fortschreiben.

Zuvor: Einige wichtige Eigenschaften von Mäßen

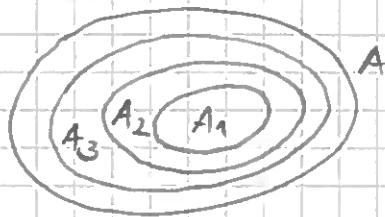
4.6. Satz (Eigenschaften von Maßen)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

(1) Stetigkeit von unten: seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$

und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (kurz: $A_n \uparrow A$)

$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

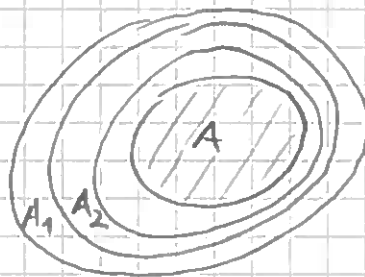


(2) Stetigkeit von oben: seien $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$

mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

(kurz: $A_n \downarrow A$) und $\mu(A_1) < \infty$

$$\Rightarrow \mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$



(3) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ bel. $\Rightarrow$

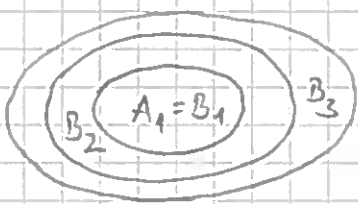
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Beweis: (1) $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ mit $A_0 := \emptyset \Rightarrow B_n \in \mathcal{A}$, disjunkt

$$A_n = B_1 \cup \dots \cup B_n, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$\Rightarrow \mu(A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(B_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) = \mu(A)$$

μ σ -add.



($\mu(A) = \infty$ möglich!)

(2) $B_n := A_1 \setminus A_n \rightarrow B_n \uparrow A_1 \setminus A$

$$\mu(A_n) \leq \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$$

$\downarrow (1)$

$$\mu(A_1 \setminus A) \stackrel{\mu(A) < \infty}{=} \mu(A_1) - \mu(A)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mu(A_n) \leq \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(B_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n) \\ \downarrow (1) \\ \mu(A_1 \setminus A) \stackrel{\mu(A) < \infty}{=} \mu(A_1) - \mu(A) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Beh.}$$

(3) Übung

Bem: Auf die Bed. $\mu(A_1) < \infty$ in (2) kann nicht verzichtet werden.

Bsp: $X = \mathbb{N}$, μ : Zählmaß auf $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

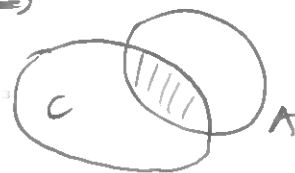
$$A_n := \{n, n+1, n+2, \dots\} \Rightarrow A_n \downarrow \emptyset, \text{ aber } \mu(A_n) = \infty \quad \forall n$$

Bem.: Einschränkung von Maßen

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Fixiere $C \in \mathcal{A}$, $C \neq \emptyset \Rightarrow$

$$\mathcal{A}_C = \{ \underbrace{A \cap C}_{\in \mathcal{A}} : A \in \mathcal{A} \} = \{ B \in \mathcal{A} : B \subseteq C \}$$

Spur- σ -Alg.



Sei μ Maß auf $\mathcal{A} \Rightarrow \mu|_C(B) := \mu(B)$ ist Maß auf $\mathcal{A}_C$
(Einschränkung von μ)

Nun zur wichtigen Fortsetzung Prämaß $\rightarrow$ Maß! Dazu:

Def. Ein Prämaß μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ auf X heißt σ -endlich

$\Leftrightarrow \exists$ abzählbar viele $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$ mit

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{und} \quad \mu(A_n) < \infty \quad \forall n$$

Bsp. Das Lebesgue-Prämaß auf $\mathbb{R}^d$ ist σ -endl., denn

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n]^d \quad \text{und} \quad \lambda((-n, n]^d) = (2n)^d < \infty$$

4.7. Fortsetzungssatz v. Carathéodory

Sei $\mathcal{R}$ Ring auf X und μ σ -endliches Prämaß auf $\mathcal{R}$

$\Rightarrow \exists!$ Maß $\tilde{\mu}$ auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ -Algebra $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$

welches μ fortsetzt, d.h. mit

$$\tilde{\mu}(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{R}$$

$\tilde{\mu}$ ist ebenfalls σ -endlich.

Zum Beweis d. Eindeutigkeit (und zur Identifikation von σ -Algebren)
nützlicher Begriff:

Def. Sei $X \neq \emptyset$. $\omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Dynkin-System, falls

(i) $X \in \omega$

(ii) $A, B \in \omega$, $A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \omega$

(iii) $A_n \in \omega$ ($n \in \mathbb{N}$) disj. $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \omega$

Jede σ -Alg. ist Dynkin-System (klar)

Von $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ erzeugtes Dynkin-System:

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) := \bigcap \{ \mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ Dynkin-Syst. auf } X \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D} \}$$

(wieder Dynkin-Syst.)

4.8. Satz. Für $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$ gilt:

- (1) $\mathcal{D}$ σ -Algebra $\Leftrightarrow \mathcal{D}$ ist n -stabiles Dynkin-System
 $\uparrow$ d.h. $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$
- (2) $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ n -stabil $\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E})$

Beweis: Handout

Beweis d. Fortsetzungssatzes v. Carathéodory (Skizze; Details im Handout)

Schritt 1: Eindeutigkeit von $\tilde{\mu}$

Seien μ_1, μ_2 Maße auf $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$ mit $\mu_1|_{\mathcal{R}} = \mu = \mu_2|_{\mathcal{R}}$
 μ σ -endl. $\Rightarrow X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $A_n \in \mathcal{R}$, $\mu_1(A_n) = \mu_2(A_n) < \infty$
o. $\in$, A_n disj. (ersetze sonst A_n durch $A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}) \in \mathcal{R}$)

$$\mathcal{D}_n := \{ A \in \sigma(\mathcal{R}) : \mu_1(A_n \cap A) = \mu_2(A_n \cap A) \}, n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow \mathcal{R} \subseteq \mathcal{D}_n$, und $\mathcal{D}_n$ ist Dynkin-Syst. ($\rightarrow$ Handout)

$$\mathcal{R} \text{ } n\text{-stabil} \xRightarrow{\text{Satz 4.8. (2)}} \sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{D}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{D}_n$$

$$\Rightarrow \forall A \in \sigma(\mathcal{R}) \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \mu_1(A_n \cap A) = \mu_2(A_n \cap A)$$

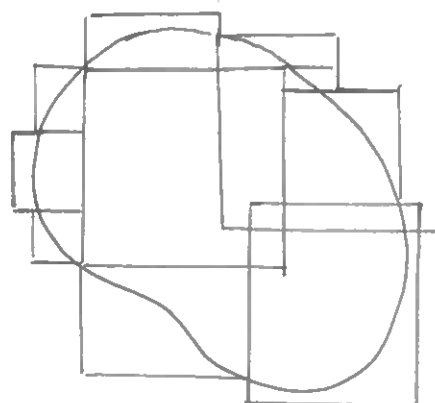
$$\mu_i \text{ } \sigma\text{-additiv} \Rightarrow \mu_1(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(A_n \cap A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(\dots) = \mu_2(A) \quad \square$$

Schritt 2: Existenz der Fortsetzung $\tilde{\mu}$

Für bel. $H \in \mathcal{P}(X)$ setze

$$\mu^*(H) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{R} \right. \\ \left. \text{mit } H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

(die A_n überdecken H)



Dabei $\mu^*(M) := \infty$, falls keine solche Überdeckung von M exist.
 $\mu^*: P(X) \rightarrow [0, \infty]$: äußeres Maß zu μ

Lemma 1: (a) $\mu^*(\emptyset) = 0$ und $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \mu^*(M_1) \leq \mu^*(M_2)$ (klar)

(b) $A \in \mathcal{R} \Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A)$ ($\leq$ klar)

(c) $\forall (M_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq P(X)$ gilt:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(M_n) \quad (\sigma\text{-Subadditivität})$$

(d) $A \in \mathcal{R}, M \in P(X) \Rightarrow$

$$(S) \quad \mu^*(M) = \mu^*(M \cap A) + \mu^*(M \cap A^c)$$

Beweis: Handout

Setze $\mathcal{A}^* := \{A \subseteq X : (S) \text{ gilt für } \underbrace{\text{alle } M \in P(X)}_{A \text{ und für}}\}$

Lemma 1 $\Rightarrow \mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}^*$

Lemma 2: $\mathcal{A}^*$ ist σ -Algebra, und die Restriktion

$\mu^*|_{\mathcal{A}^*}: \mathcal{A}^* \rightarrow [0, \infty]$ ist ein Maß

Beweis: Man zeigt, dass $\mathcal{A}^*$ ein σ -stabiles Dynkin-System ist ($\rightarrow$ Handout), und daher σ -Alg, nach Satz 4.8.

Weiter bei Schritt 2: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}^*, \mathcal{A}^* \sigma\text{-Alg.} \Rightarrow \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}^*$

$\Rightarrow \tilde{\mu} := \mu^*|_{\mathcal{A}}$ ist Maß, wobei $\tilde{\mu}|_{\mathcal{R}} = \mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$ wegen

Lemma 1(b)

$\tilde{\mu}$ σ -endl., klar; da μ σ -endl. und $\tilde{\mu}|_{\mathcal{R}} = \mu$

Caratheodory fertig □

Also ist $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{A}$ def. durch

$$\tilde{\mu}(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{R}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \quad (\text{evtl. } \infty)$$

3. Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$

Lebesgue-Prämaß λ auf Ring $\mathcal{R}_d$: σ -endl.

$$\sigma(\mathcal{R}_d) = \mathcal{B}_d = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Carathéodory $\Rightarrow \exists!$ Maß $\lambda_d := \tilde{\lambda}$ auf $\mathcal{B}_d$ mit

$$\lambda_d((a, b]) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \quad \forall a \leq b \in \mathbb{R}^d$$

λ_d : Lebesgue (-Borel) Maß auf $\mathcal{B}_d$ bzw. auf $\mathbb{R}^d$
(d -dim. Lebesgue-Maß); σ -endlich

Nach Bem. v. Carath.: $A \in \mathcal{B}_d \Rightarrow$

$$\lambda_d(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(Q_n) : Q_n = (a_n, b_n] \in \mathcal{R}_d \text{ k.o. Quader, } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right\}$$

(solche Q_n exist., z.B. $Q_n = (-n, n]^d$)

Bsp: $Q := [a, b] \in \mathbb{R}^d$, $a \leq b$; $Q' = (a, b)$, $Q'' = [a, b)$

$Q, Q', Q'' \in \mathcal{B}_d$, da Q komp., Q' offen, $Q'' = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b)$

$$\lambda_d(Q) = \lambda_d(Q') = \lambda_d(Q'') = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) \quad (a_1 - \frac{1}{n}, \dots, a_d - \frac{1}{n})$$

$$\text{Denn: } Q = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a - \frac{1}{n}, b]}_{=: Q_n \in \mathcal{R}_d} \quad Q_n \downarrow Q \Rightarrow \lambda_d(Q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_d(Q_n) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

$$\text{Analog: } Q' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{(a, b - \frac{1}{n}]}_{Q_n} \quad Q_n \uparrow Q' \Rightarrow \lambda_d(Q') = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_d(Q_n) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

Q'' analog.

Folgerung: $\partial Q = Q \setminus Q' \in \mathcal{B}_d$ hat Lebesgue-Maß 0: $\lambda_d(\partial Q) = 0$

Def. Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. $N \subseteq X$ heißt μ -Nullmenge, falls $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$.

Eine λ_d -Nullmenge heißt Lebesgue-Nullm.

Eine abzählbare Vereinigung $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ von μ -Nullmengen N_i ist ebenfalls μ -Nullm.

Denn: $\mu(N) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(N_i) = 0$

Bsp: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \{x\}$ ist Lebesgue-Nullm. $\Rightarrow \mathbb{Q}$ ebenfalls

Betrachte nun B_d mit Lebesgue-Maß

$A \in B_d, x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow x+A := \{x+a : a \in A\} \in B_d$ (Übung)

4.9. Satz (Translationsinvarianz d. Lebesgue-Maßes)

$A \in B_d \Rightarrow \lambda_d(x+A) = \lambda_d(A) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Beweis: 1. $A = (a, b]$ h.o. Quader $\Rightarrow x+A = (x+a, x+b] \Rightarrow$

$\lambda_d(x+A) = \lambda_d(A)$

2. $A \in B_d$ bel. $\Rightarrow \lambda_d(x+A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(Q_n), Q_n = (a_n, b_n], x+A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right\}$

$\Rightarrow \lambda_d(x+A) = \inf_{Q_n = x+R_n} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda_d(x+R_n)}_{\lambda_d(R_n)}, R_n \text{ h.o. Quader}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \right\}$

$= \lambda_d(A) \quad \square$

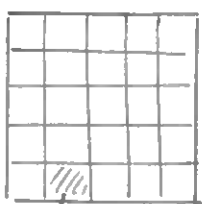
4.10. Satz (Eindeutige Charakterisierung von λ_d)

Sei μ translationsinvar. Maß auf B_d , d.h.

$\mu(x+A) = \mu(A) \quad \forall A \in B_d, x \in \mathbb{R}^d$, mit $\mu((0,1]^d) =: c \in (0, \infty)$

$\Rightarrow \mu = c \cdot \lambda_d$, d.h. $\mu(A) = c \cdot \lambda_d(A) \quad \forall A \in B_d$

Beweis: 1. Für $k \in \mathbb{N}$ teile $(0,1]^d$ in k^d h.o. disj. Teilwürfel W_i der Kantenlänge $\frac{1}{k}$



W_i

μ transl. invar. + endl. additiv $\Rightarrow$

$\mu(W_i) = \frac{1}{k^d} \cdot c = c \cdot \lambda_d(W_i)$

2. Sei $Q = (a, b] \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^d \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} :$

$\mathcal{Q}$ = endl. disj. Vereinigung von h.o. Würfeln der Kantenlänge $\frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \mu(\mathcal{Q}) = c \cdot \lambda_d(\mathcal{Q})$$

3. $\mathcal{Q} = (a, b] \subseteq \mathbb{R}^d$ bel. $\Rightarrow \mathcal{Q}$ ist abzählbare disj. Vereinigung von h.o. Quadern mit rat. Ecken $\Rightarrow \mu, \lambda_d$ σ -add. $\mu(\mathcal{Q}) = c \cdot \lambda_d(\mathcal{Q})$

4. Teil 3 $\Rightarrow \mu = c \cdot \lambda_d$ auf $\mathcal{R}_d \Rightarrow$ auch μ σ -endl.

$\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{R}_d)$. Eind. Aussage in Carathéodory-Satz $\Rightarrow \mu = c \cdot \lambda_d$ ■

4.11. Korollar $\exists A \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $A \notin \mathcal{B}_d$.

Beweis: Ang. $\mathcal{B}_d = \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \lambda_d$ ist triv. Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ mit $\lambda_d([0, 1]^d) = 1$ (zu Zusatzaufg. HS, Bl. 5)

4.12. Satz (Regularität von λ_d) Sei $A \in \mathcal{B}_d \Rightarrow$

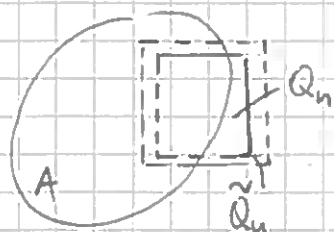
$$\begin{aligned} \lambda_d(A) &= \sup \{ \lambda_d(K) : K \subseteq A \text{ kompakt} \} \\ &= \inf \{ \lambda_d(U) : U \supseteq A \text{ offen} \} \end{aligned}$$



Beweis: I. Zu $\inf$: o.E. $\lambda(A) < \infty, \lambda = \lambda_d$. Sei $\varepsilon > 0$.

Carathéod. $\Rightarrow \exists$ h.o. Quader $Q_n \in \mathcal{R}_d$ ($n \in \mathbb{N}$): $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(Q_n) - \lambda(A) \right| < \varepsilon$$



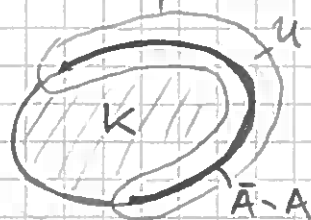
Zu Q_n wähle offenen Quader $\tilde{Q}_n \supseteq Q_n$:

$$\lambda(\tilde{Q}_n \setminus Q_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (*)$$

$U := \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{Q}_n \Rightarrow U$ offen, $U \supseteq A$, und

$$\begin{aligned} \lambda(U \setminus A) &= \lambda(U) - \lambda(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\tilde{Q}_n) - \lambda(A) \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(Q_n) - \lambda(A) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

II. Zu $\sup$: 1. Fall: A beschränkt



Teil I für $\bar{A} \setminus A (\subseteq \partial A) \Rightarrow$

Zu $\varepsilon > 0 \exists$ offene Umgeb. U von $\bar{A} \setminus A$ mit

$$\lambda(U) < \lambda(\bar{A} \setminus A) + \varepsilon < \infty \quad (\bar{A} = A \Rightarrow U := \emptyset)$$

$$K := \bar{A} \setminus U \Rightarrow K \text{ kompakt}, K \subseteq A \quad (\text{da } \bar{A} \setminus A \subseteq U)$$

$$\lambda(K) = \lambda(\bar{A} \setminus A) + \lambda(A \setminus U)$$

$$\geq \lambda(\bar{A} \setminus A) + \lambda(A) - \lambda(U) \geq \lambda(A) - \varepsilon.$$

2. Fall: A unbeschränkt.

$$A_n := A \cap (-n, n)^d \Rightarrow A_n \text{ beschr.}, A_n \uparrow A$$

$$\Rightarrow \lambda(A) = \sup \lambda(A_n)$$

$$= \sup \{ \lambda(K) : K \subseteq A_n \text{ komp.} \}$$

$\Rightarrow$ Behw. $\blacksquare$

$$(2) (A_i)_{i \in I} \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i)$$

$$(3) A \subseteq Y \Rightarrow f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$$

Wichtiges Messbarkeitskriterium:

5.2. Satz Seien $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ Messräume, und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}'$ ein Erzeugendensystem für $\mathcal{A}'$, d.h. $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}'$

Dann gilt für $f: X \rightarrow X'$

$$f \text{ messbar} \Leftrightarrow f^{-1}(E) \in \mathcal{A} \quad \forall E \in \mathcal{E}$$

Beweis: " $\Rightarrow$ " klar. Zu " $\Leftarrow$ ": Setze

$$\mathcal{G} := \{A' \subseteq X' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}. \quad \text{Zu zeigen: } \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{G}$$

klar: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{G}$, und $\mathcal{G}$ ist σ -Algebra nach Regeln für Urbilder:

$$\emptyset \in \mathcal{G} \text{ da } f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$$

$$A' \in \mathcal{G} \Rightarrow X' \setminus A' \in \mathcal{G}, \text{ da } f^{-1}(X' \setminus A') = X \setminus \overbrace{f^{-1}(A')}^{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

$$A'_n \in \mathcal{G}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \in \mathcal{G}, \text{ da } f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A'_n) \in \mathcal{A}$$

$$\text{Es folgt: } \mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{G} \Rightarrow \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

5.3. Korollar Seien X, Y topologische Räume, $f: X \rightarrow Y$ stetig

$\Rightarrow f$ ist Borel-messbar, d.h. messbar bzgl. der Borel-

σ -Algebren $B(X), B(Y)$

Beweis: Die offenen $U \subseteq Y$ erzeugen $B(Y)$, und: $U \subseteq Y$ offen

$$\Rightarrow f^{-1}(U) \in B(X), \text{ da offen in } X \quad \blacksquare$$

Falls nichts anderes gesagt: Top. Raum X stets mit $B(X)$ versehen.

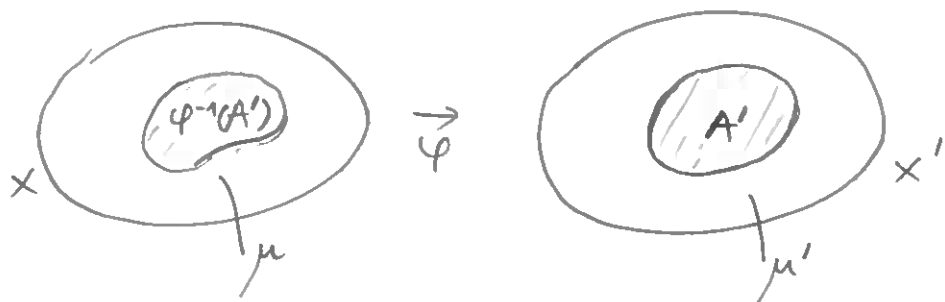
5.4. Satz (Bildmaße) Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(X', \mathcal{A}')$ Messräume, μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ und $\varphi: X \rightarrow X'$ messbar $\Rightarrow$ durch

$$\mu'(A') := \mu(\varphi^{-1}(A')), \quad A' \in \mathcal{A}'$$

wird ein Maß auf $\mathcal{A}'$ definiert (Beachte: $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}!$)

Bez: $\mu' = \varphi(\mu)$ Bildmaß von μ unter φ

Beweis: üB.



Bsp: Fixiere $a \in \mathbb{R}^d$. $\varphi(x) := x + a$, $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ist messbar, da stetig
Bildmaß von λ_d (Lebesgue-Maß) unter φ :

$$A \in \mathcal{B}_d \Rightarrow \varphi(\lambda_d)(A) = \lambda_d(\varphi^{-1}(A)) = \lambda_d(A - a) = \lambda_d(A)$$

$\uparrow$
 λ_d transl. invar.

5.5. Satz Sei $(X, \mathcal{A})$ Maßraum. Für $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sind äquiv:

- (1) f messbar (bzgl. Borel- σ -Alg. $\mathcal{B}_1$ auf $\mathbb{R}$)
- (2) $\{x \in X : f(x) \geq b\} \in \mathcal{A} \quad \forall b \in \mathbb{R}$
- (3) $\{x \in X : f(x) < b\} \quad " \quad "$
- (4) $\{x \in X : f(x) \leq b\} \quad " \quad "$
- (5) $\{x \in X : f(x) > b\} \quad " \quad "$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) $\cdot \{f \geq b\} = f^{-1}(\underbrace{[b, \infty)}_{\in \mathcal{B}_1}) \in \mathcal{A}$, da f messbar

(2) $\Rightarrow$ (3): $\{f < b\} = \{f \geq b\}^c \in \mathcal{A}$

(3) $\Rightarrow$ (4): $\{f \leq b\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f < b + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{A}$

(4) $\Rightarrow$ (5): $\{f > b\} = \{f \leq b\}^c \in \mathcal{A}$

(5) $\Rightarrow$ (1): Die Intervalle $(-\infty, b]$, $b \in \mathbb{R}$ erzeugen $\mathcal{B}_1$ (Lemma unten)

Also erzeugen^{auch} die $(b, \infty) = (-\infty, b]^c$ die σ -Alg. $\mathcal{B}_1$

Satz 5.2. $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

5.6. Lemma $\mathcal{B}_1$ wird erzeugt von den $(-\infty, b], b \in \mathbb{R}$;
ebenso von den $(-\infty, b), b \in \mathbb{R}$

Beweis: $a \leq b \in \mathbb{R} \Rightarrow \underbrace{(a, b]}_{\text{erzeugen } \mathcal{B}_1} = (-\infty, b] - (-\infty, a] ; (-\infty, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, b + \frac{1}{n}) \Rightarrow \text{Beh. } \blacksquare$

Im Folgenden stets: $(X, \mathcal{A})$ Messraum.

5.7. Satz (1) Für $f: X \rightarrow \mathbb{R}^d$, $f = (f_1, \dots, f_d)$ gilt:

f messbar $\Leftrightarrow$ alle Komponenten $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ sind messbar

(2) Seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar $\Rightarrow$

$f+g, f \cdot g, cf (c \in \mathbb{R}), |f|: X \rightarrow \mathbb{R}$ sind messbar

Falls $g(x) \neq 0 \ \forall x \in X \Rightarrow$ auch $\frac{f}{g}$ messbar

Beweis: (1) $f_j = \pi_j \circ f$, $\pi_j: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_j$ Koordinateaufst

π_j stetig $\Rightarrow \pi_j$ messbar $\Rightarrow f_j$ messbar

$\Leftarrow$ " $a \leq b \in \mathbb{R}^d \Rightarrow f^{-1}(\underbrace{(a, b]}_{\text{erzeugen } \mathcal{B}_d}) = \bigcap_{j=1}^d \underbrace{f_j^{-1}((a_j, b_j])}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \Rightarrow$ Satz 5.2
Beh.

(2) $f+g = \varphi \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ mit $\varphi \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1 + y_2$, $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

φ stetig, $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ messbar nach (1) $\xRightarrow{\text{Lemma 5.1}}$ $f+g$ messbar

Analog $f \cdot g, \frac{f}{g}$. Rest NB. $\blacksquare$

$\mathbb{C}$ -wertige messbare Fkt:

Identifiziere $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ via $z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Betrachte $\mathbb{C}$ mit Borel- σ -Alg. $\mathcal{B}(\mathbb{C}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$
 $\uparrow$ Ident. oben

Dann: $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar $\Leftrightarrow$

$\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar

5.8. Korollar $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar $\Rightarrow f+g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (falls g NS-frei),
 $\bar{f}, cf$ ($c \in \mathbb{C}$) messbar

(folgt aus 5.7. durch Zerlegen in Re- und Im-Teile)

Feiner: $|f|: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar (wie für $\mathbb{R}$ -wertiges f)

Def. Eine Fkt $u: X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Elementarfkt, falls

$$(*) \quad u = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{C}, A_i \in \mathcal{A} \text{ disjunkt,} \\ \bigcup_{i=1}^n A_i = X$$

5.9. Lemma $u: X \rightarrow \mathbb{C}$ Elementarfkt $\Leftrightarrow u$ messbar, und
 u nimmt nur endlich viele Werte an.

Beweis: " $\Rightarrow$ " klar mit Kor. 5.8, da $A \in \mathcal{A} \Rightarrow 1_A$ messbar

Zu " $\Leftarrow$ " seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Werte von u

$$A_i := u^{-1}(\{\alpha_i\}) \Rightarrow A_i \in \mathcal{A}, A_i \text{ disj.}, \bigcup_{i=1}^n A_i = X$$

$$\text{Feiner: } u(x) = \alpha_i \Leftrightarrow x \in A_i, \text{ d.h. } u = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} \quad \blacksquare$$

Also: Jede Fkt $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ mit nicht notwendig
disjunkten $A_i \in \mathcal{A}$ ist Elem. fkt!

Darst. (*) mit disjunkten A_i : Normaldarstellung

Bzgl: $E(X) := E(X, \mathcal{A}) := \{u: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ Elem. fkt}\}$ (ist $\mathbb{C}$ -VR!) -

$$E^+(X) := \{u: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ Elem. Fkt mit } u \geq 0\}$$

$\bar{\mathbb{R}}$ -meßbare Funktionen

Fkt $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißen numerische Fkt auf X

Borel- σ -Alg. auf $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$:

$$B(\bar{\mathbb{R}}) := \{A \subseteq \bar{\mathbb{R}} : A \cap \mathbb{R} \in B(\mathbb{R})\}$$

$$= \{A, A \cup \{\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{\pm \infty\} : A \in B(\mathbb{R})\}$$

tatsächlich σ -Alg.!

5.10. Lemma (1) $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ wird erzeugt von den Mengen $(b, \infty]$, $b \in \mathbb{R}$,
ebenso von den $[-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}$

(2) Für $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sind äquiv:

$$\begin{aligned} f \text{ messbar} &\Leftrightarrow \{f \geq b\} \in \mathcal{A} \quad \forall b \in \mathbb{R} & \{f \geq b\} &= f^{-1}(\underbrace{[b, \infty]}_{\in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})}) \\ &\Leftrightarrow \{f < b\} \quad " \quad " & & \\ &\Leftrightarrow \{f \leq b\} \quad " \quad " & \{f \leq b\} &= f^{-1}([-\infty, b]) \\ &\Leftrightarrow \{f > b\} \quad " \quad " & & \end{aligned}$$

Beweis: (1) üb.; (2) wörtlich wie Satz 5.5. (Zirkelschluss)

Nächstes Ziel: Limiten messbarer Fkt

Betrachte Fkt $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ punktweise:

$$(\sup f_n)(x) := \sup f_n(x) \quad x \in X$$

Beachte: $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $M \neq \emptyset \Rightarrow \sup M, \inf M$ exist. in $\overline{\mathbb{R}}$

Ebenso: • $\inf f_n$

$$\bullet \limsup f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} f_k = \inf_{n \in \mathbb{N}} (\sup_{k \geq n} f_k)$$

$$\bullet \liminf f_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} (\inf_{k \geq n} f_k) \quad (\text{alles Fkt } X \rightarrow \overline{\mathbb{R}})$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (\text{sofern pktweise exist.})$$

Beachte: $\lim f_n = f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \limsup f_n = f = \liminf f_n$

5.11. Satz Seien $f_n: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ messbar ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow$

$\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ sind messbar. Ebenso $\lim f_n$, sofern exist.

Beweis: $g := \sup f_n$. Sei $b \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\{x \in X: g(x) \leq b\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x: f_n(x) \leq b\}}_{\in \mathcal{A} \text{ nach L. 5.10.}} \in \mathcal{A}. \quad \text{Analog } \inf f_n.$$

Der Rest folgt hieraus $\square$

5.12. Korollar. 1. $f, g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar $\Rightarrow$

$\max(f, g), \min(f, g): X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar

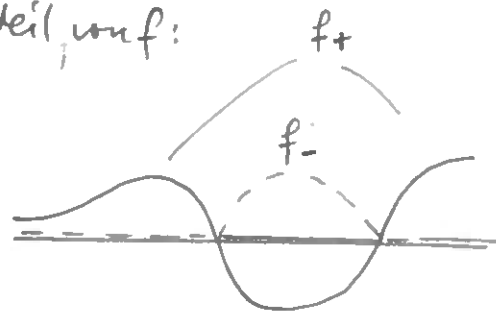
" $\sup(f, g, g, g, \dots)$ "

2. Sei $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Positiv-/Negativteil von f :

$$f_+ := \max(f, 0), f_- := \max(-f, 0)$$

$\Rightarrow f_+, f_- \geq 0$, messbar.

$$f = f_+ - f_-, |f| = f_+ + f_-$$



Für $f_n, f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ schreibe $f_n \uparrow f$, falls $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend $\forall x \in X$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$
 $\quad \quad \quad = \sup f_n(x)$

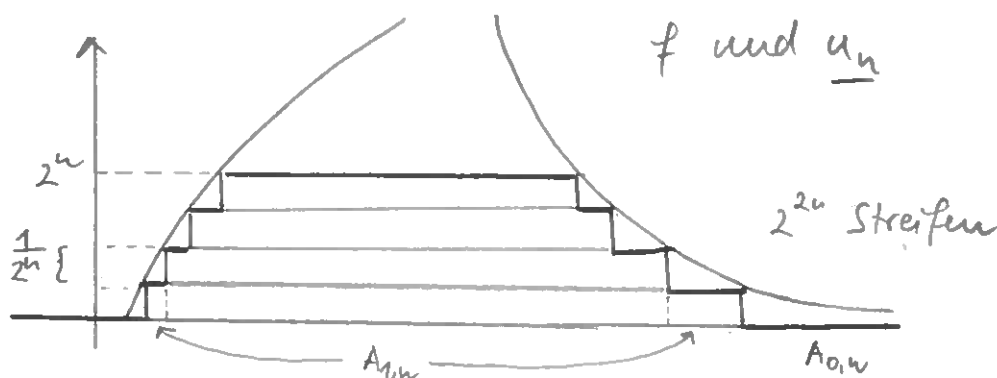
Analog $f_n \downarrow f$ $[(f_n)$ mon. pktweise monoton wachsend / fallend gegen $f]$

Wichtiges Approximationssatz:

5.13. Satz Sei $f: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar (d.h. als Fkt $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ mit $f \geq 0$)

$\Rightarrow \exists$ Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nichtnegativer Elem. fkt $u_n \in E^+(X)$ mit $u_n \uparrow f$.

Beweis:



Setze

$$u_n(x) := \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{falls } x \in A_{k,n} = \{x \in X: \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\} \\ 2^n, & \text{falls } x \in A_{2^n,n} = \{x \in X: f(x) \geq 2^n\} \end{cases} \quad (0 \leq k \leq 2^{2n}-1)$$

Alle $A_{k,n}$ sind messbar, und $u_n \in E^+(X)$ mit $u_n \uparrow f$ $\blacksquare$

§6 Integration

1. Definition des Integrals auf einem Maßraum

Fixiere Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$

1. Schritt: Integral nichtneg. Elementarfkt

Def. Sei $u \in E^+(X)$, $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ Normaldarst.
(d.h. $\alpha_i \geq 0$, $X = \dot{\cup} A_i$)

Integral von u bzgl. μ über X :

$$\int_X u(x) d\mu(x) := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) \in [0, \infty] \quad \text{kurz: } \int_X u d\mu$$

Speziell: $\int_X 1_A d\mu = \mu(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

Vorsicht: Die Normaldarst. von $u \in E^+(X)$ ist nicht eindeutig.

Die Def. ist aber sinnvoll, da unabh. von der Wahl der Normaldarst.:

6.1. Lemma Seien $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j 1_{B_j}$ Normaldarst. von u
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j)$

Bew: $X = \dot{\cup} A_i = \dot{\cup} B_j \Rightarrow \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m \mu(\overbrace{A_i \cap B_j}^{\text{disj.}})$
 $\mu(B_j) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j)$

Sei $A_i \cap B_j \neq \emptyset \Rightarrow \forall x \in A_i \cap B_j$ ist $u(x) = \alpha_i = \beta_j \Rightarrow \alpha_i = \beta_j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j)$$

6.2. Eigenschaften des Integrals auf $E^+(X)$

(1) Linearität: $a, b \geq 0$, $u, v \in E^+(X) \Rightarrow$

$$\int_X \underbrace{(au + bv)}_{\in E^+(X)} d\mu = a \int_X u d\mu + b \int_X v d\mu$$

(2) Monotonie: $u \leq v$ auf $X \Rightarrow \int_X u d\mu \leq \int_X v d\mu$

Beweis: (1) $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$, $v = \sum_{j=1}^m \beta_j 1_{B_j}$ Normaldarst. $\Rightarrow$

$$au + bv = \sum_{i,j} (\alpha_i + b\beta_j) 1_{A_i \cap B_j} \quad \text{Normaldarst.}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_X (au + bv) d\mu &= \sum_{i,j} (\alpha_i + b\beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \\ &= a \underbrace{\sum_{i,j} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j)}_{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)} + b \underbrace{\sum_{i,j} \beta_j \mu(A_i \cap B_j)}_{\sum_{j=1}^m \beta_j \mu(B_j)} = a \int_X u d\mu + b \int_X v d\mu \end{aligned}$$

$$(2) \quad v = u + (v - u), \quad u, v - u \in E^+(X) \xrightarrow{(1)} \int_X v d\mu = \int_X u d\mu + \underbrace{\int_X (v - u) d\mu}_{\geq 0} \quad \square$$

Bsp: λ Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} 1_{\mathbb{Q}} d\lambda = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$.

2. Schritt: Integral nichtnegativer messbarer Fkt

6.3. Monotonie-Lemma: Seien $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E^+(X)$ mit $u_n \leq u_{n+1}$ auf $X \quad \forall n$, und sei $v \in E^+(X)$ mit $v \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ auf X
 $\Rightarrow \int_X v d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X u_n d\mu$ (auf beiden Seiten ist ∞ möglich)

Beweis: Sei $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i 1_{A_i}$ Normaldarst.

Fixiere $c \in \mathbb{R}, c > 1$.

$$B_n := \{x \in X : c \cdot u_n(x) \geq v(x)\} \Rightarrow B_n \in \mathcal{A}, \quad B_n \subseteq B_{n+1} \quad \leftarrow u_n \leq u_{n+1}$$

$$x \in X \Rightarrow v(x) \leq \sup_n u_n(x) \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : v(x) \leq c \cdot u_N(x)$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

$$\Rightarrow A_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_i \cap B_n), \quad A_i \cap B_n \uparrow A_i \quad \left(\begin{array}{l} \text{gilt wegen } c > 1 \text{ falls} \\ v(x) > 0, \text{ falls } v(x) = 0 \text{ trivial} \end{array} \right.$$

$$\xrightarrow{\text{Monotonie v. unten}} \mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_i \cap B_n)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_X v d\mu &= \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap B_n) \\ &= \int_X \underbrace{v \cdot 1_{B_n}}_{\in E^+(X)} d\mu \leq \int_X c u_n d\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_X v d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X c u_n d\mu = c \cdot \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X u_n d\mu.$$

$c > 1$ bel. $\Rightarrow$ Bclv $\blacksquare$

Def. Sei $f: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^+(X)$ mit $u_n \uparrow f$ (exist. nach Sak 5.13). Setze

$$\int_X f d\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_X u_n d\mu \in [0, \infty] \quad (\sup_n(\dots) = \lim_{n \rightarrow \infty}(\dots)!))$$

Integral von f bzgl. μ über X

Die Def. ist sinnvoll, da unabh. von der Wahl der approx. Folge (u_n) , gemäß folgendem

6.4. Lemma: Seien $(u_n), (v_n) \in E^+(X)$ mit $u_n \uparrow f, v_n \uparrow f$
 $\Rightarrow \sup_n \int_X u_n d\mu = \sup_n \int_X v_n d\mu \quad (*)$

Beweis: $m \in \mathbb{N} \Rightarrow v_m \leq f = \sup_n u_n \xRightarrow{\text{Monotonie-L.}} \int v_m d\mu \leq \sup_n \int u_n d\mu$
 m bel. $\Rightarrow \sup_n \int v_n d\mu \leq \sup_n \int u_n d\mu$ in $(*)$. $\leq$ durch Vertauschen der Rollen $\blacksquare$

6.5. Lemma. Seien $f, g: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar,

(1) $a, b \geq 0 \Rightarrow af + bg: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar, und

$$\int_X (af + bg) d\mu = a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu$$

(2) $f \leq g$ auf $X \Rightarrow \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$

Beweis: (1) $\exists (u_n), (v_n) \in E^+(X): u_n \uparrow f, v_n \uparrow g \Rightarrow$
 $au_n + bv_n \uparrow af + bg \Rightarrow af + bg$ messbar (Sak 5.11.), und
 $\int_X (af + bg) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (au_n + bv_n) d\mu \stackrel{6.2(1)}{=} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} (a \int_X u_n d\mu + b \int_X v_n d\mu) = a \int_X f d\mu + b \int_X g d\mu$

(2) mit Monotonielemma (Ü6) $\blacksquare$

3. Schritt: Allg. $\mathbb{R}$ -wertige Integranden

Sei $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ messbar $\Rightarrow f = f_+ - f_-$, $f_{\pm} \geq 0$ messbar

$$\text{Idee: } \int_X f d\mu := \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu$$

Problem: „ $\infty - \infty$ “ kann auftreten. Wollen wir ausschließen!

$$\text{Betrachte } |f| = f_+ + f_- \quad \int_X |f| d\mu \stackrel{\text{b.s.}}{=} \underbrace{\int_X f_+ d\mu}_{\in [0, \infty]} + \underbrace{\int_X f_- d\mu}_{\in [0, \infty]} \in [0, \infty]$$

Def. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (μ) -integrierbar, falls

(i) f messbar

$$(ii) \int_X |f| d\mu < \infty \quad (\Leftrightarrow \int_X f_+ d\mu < \infty \wedge \int_X f_- d\mu < \infty)$$

In diesem Fall setze

$$\int_X f d\mu := \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu \in \mathbb{R}$$

6.6. Lemma. Seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -int. bar, $f \leq g \Rightarrow$

$$\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu \quad (\text{Monotonie})$$

Beweis: $f \leq g \Rightarrow f_+ \leq g_+$, $f_- \geq g_- \Rightarrow$

$$\int f d\mu = \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \stackrel{\text{L. 6.5. (2)}}{\leq} \int g_+ d\mu - \int g_- d\mu = \int g d\mu \quad \blacksquare$$

4. Schritt: Komplexwertige Integranden

Def. $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ heißt (μ) -integrierbar, falls

(i) f messbar

(ii) $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ μ -int. bar

Dann setzt man:

$$\int_X f d\mu := \int_X \operatorname{Re} f d\mu + i \int_X \operatorname{Im} f d\mu \in \mathbb{C}$$

Bem: (ii) $\Leftrightarrow$ (ii') : $\int_X |f| d\mu < \infty$

Denn: $|f| \leq |\operatorname{Re} f| + |\operatorname{Im} f| \leq 2|f|$ und Monotonie d. Integrals.

Def. $\mathcal{L}^1(X, \mu) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid \mu\text{-int. bar}\}$
 $(= \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{messbar mit } \int_X |f| d\mu < \infty\})$
 Kurz: $\mathcal{L}^1(\mu)$

Bem: (Majorantenkrit.) $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar mit $|f| \leq g$, wo
 $g \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ (da $\int |f| d\mu \leq \int g d\mu < \infty$)

Spezialfall: $X = \mathbb{R}^d$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_d$, $\mu = \lambda_d$ Lebesgue-Maß
 $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d, \lambda_d) =: \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$

Die $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ heißen Lebesgue-integrierbar (auf $\mathbb{R}^d$)

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d =: \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f dx$$

Bsp: Integration bzgl. eines Punktmaßes. Geg. Messraum $(X, \mathcal{A})$

δ_x : Punktmaß in $x \in X$, d.h. $\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (A \in \mathcal{A})$

$u \in E^+(X)$, $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 1_{A_i}$ Normaldarst. $\Rightarrow$

$$\int_X u d\delta_x = \alpha_i, \text{ falls } x \in A_i \Rightarrow \int_X u d\delta_x = u(x)$$

$f: X \rightarrow [0, \infty)$ messbar $\Rightarrow \exists u_n \in E^+(X): u_n \uparrow f$.

$$\Rightarrow \int f d\delta_x = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\delta_x = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = f(x).$$

$f: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar $\Rightarrow \int |f| d\delta_x = |f(x)| < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(X, \delta_x)$

zerleg. $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$, $f_{1,4} = (\operatorname{Re} f)_{\pm}$, $f_{3,2} = (\operatorname{Im} f)_{\pm}$ zeigt:
 $\int f d\delta_x = f(x).$

6.7. Satz (1) $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(X, \mu)$ ist ein $\mathbb{C}$ -VR, und die Abb.

$I: \mathcal{L}^1(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$, $I(f) = \int_X f d\mu$ ist linear, d.h.

$$(i) \int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$

$$(ii) \int_X (cf) d\mu = c \int_X f d\mu$$

$\forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu), c \in \mathbb{C}$

(2) $\|f\|_1 := \|f\|_{1,\mu} := \int_X |f| d\mu$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(\mu)$, d.h.

1. $\|f\|_1 \geq 0$

2. $\|cf\|_1 = |c| \cdot \|f\|_1 \quad \forall c \in \mathbb{C}$

3. $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1 \quad \forall f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$

$\|\cdot\|_1$: $\mathcal{L}^1$ -Halbnorm

Achtung: $\|\cdot\|_1$ ist i.A. keine Norm, da i.A. nicht definit!

Bsp: λ_d auf $\mathbb{R}^d$, $f = 1_{\{a\}}$, $a \in \mathbb{R}^d$. f (Borel-) messbar, $f \neq 0$, aber

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} 1_{\{a\}} dx = \lambda_d(\{a\}) = 0.$$

Beweis v. Sak 6.7. (1) $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $a, b \in \mathbb{C} \xRightarrow{\text{Kor. 5.8}} af + bg$ messbar

$$\int_X |af + bg| d\mu \leq \int_X (|a||f| + |b||g|) d\mu \stackrel{\text{G.S.}}{=} |a| \int_X |f| d\mu + |b| \int_X |g| d\mu < \infty$$

$$\Rightarrow af + bg \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

Zu (i): o.E. f, g $\mathbb{R}$ -wertig, zerlege sonst in Re- und Im-Teile

$$h := f + g \Rightarrow h_+ - h_- = h = f_+ - f_- + g_+ - g_- \Rightarrow$$

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+, \text{ aber } \geq 0 \Rightarrow \text{Lemma 6.5.}$$

$$\int h_+ d\mu + \int f_- d\mu + \int g_- d\mu = \int h_- d\mu + \int f_+ d\mu + \int g_+ d\mu$$

$$\Rightarrow \int h d\mu = \int h_+ d\mu - \int h_- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Zu (ii): 1. $c > 0$, $f = u + iv$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, beide $\mathbb{R}$ -wertig

$$\Rightarrow \int (cf) d\mu = \int \underbrace{cu}_{\operatorname{Re}(cf)} d\mu + i \int cv d\mu \quad \text{da } (cu)_{\pm} = cu_{\pm}$$

$$= \underbrace{\int cu_+}_{\int cu_+} - \underbrace{\int cu_-}_{\int cu_-} + i \underbrace{\int cv_+}_{\int cv_+} - i \underbrace{\int cv_-}_{\int cv_-} = c \int f d\mu$$

2. $c = -1$: wieder o.E. f $\mathbb{R}$ -wertig

$$(-f)_+ = f_-, (-f)_- = f_+ \Rightarrow \int (-f) d\mu = \int f_- d\mu - \int f_+ d\mu = - \int f d\mu$$

3. $c = i$: $f = u + iv$, u, v $\mathbb{R}$ -wertig $\Rightarrow$

$$\int (if) d\mu = \int (iu - v) d\mu = \underbrace{\int -v d\mu}_{-\int v d\mu} + i \int u d\mu = i \int f d\mu$$

Zusammen mit (i) $\Rightarrow$ bel. $c \in \mathbb{C}$.

(2) 1. klar; 2. und 3. aus $|cf| = |c| \cdot |f|$, $|f+g| \leq |f| + |g|$ und Linearität + Monotonie des Integrals.

Bem: $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \bar{f} \in \mathcal{L}^1(\mu)$, und $\int \bar{f} d\mu = \overline{\int f d\mu}$

Denn: $f = u + iv$, u, v reell, und $\int (u - iv) d\mu = \int u d\mu - i \int v d\mu = \overline{\int f d\mu}$

Ferner: $\operatorname{Re}(\int f d\mu) = \int \operatorname{Re} f d\mu$, ebenso mit $\operatorname{Im}(\dots)$

6.8. Satz $f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow \left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu \quad (= \|f\|_1)$
(Standard-Abschätzung)

Beweis: Falls f $\mathbb{R}$ -wertig: $\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f_+ d\mu - \int f_- d\mu \right| \leq \int f_+ d\mu + \int f_- d\mu = \int |f| d\mu$

Falls $f \in \mathbb{C}$ -wertig: Trick: $z := \int f d\mu \in \mathbb{C}$

Polarzeleg: $z = e^{i\varphi} \cdot |z|$, $\varphi \in \mathbb{R} \rightarrow |z| = \alpha z$, $\alpha = e^{-i\varphi}$, $|\alpha| = 1$

$\Rightarrow \left| \int f d\mu \right| = |z| = \alpha \cdot \int f d\mu = \int (\alpha f) d\mu$, dies ist also reell!

$\Rightarrow \int (\alpha f) d\mu = \operatorname{Re} \int (\alpha f) d\mu = \int \underbrace{\operatorname{Re}(\alpha f)}_{\leq |f|} d\mu \leq \int |f| d\mu$

6.9. Lemma Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ endlicher Maßraum, d.h. $\mu(X) < \infty$

Sei $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar + beschr., d.h. $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty \Rightarrow$

$f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit

$$\|f\|_1 = \int_X |f| d\mu \leq \|f\|_\infty \cdot \int_X 1 d\mu = \|f\|_\infty \cdot \mu(X)$$

3. Integration über messbare Teilmengen

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: Maßraum

6.10. Lemma Sei $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ Fkt., $(Y, \mathcal{B})$ Messraum. Sei

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ mit $X_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt

f $\mathcal{A}$ -messbar $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ ist $f|_{X_n}$ $\mathcal{A}|_{X_n}$ -messbar

$\uparrow$
Spur- σ -Alg: $\{\mathcal{B} \in \mathcal{A} : \mathcal{B} \subseteq X_n\}$

Bew: $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f|_{X_n}^{-1}(B) = \{x \in X_n : f(x) \in B\} = X_n \cap f^{-1}(B)$

Also: f messbar $\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Rightarrow f|_{X_n}^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall n$

umgekehrt: $f|_{X_n}$ messbar $\forall n \Rightarrow X_n \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{A}|_{X_n} \subseteq \mathcal{A} \quad \forall n$
 $\Rightarrow f^{-1}(B) = \bigcup (X_n \cap f^{-1}(B)) \in \mathcal{A}. \quad \blacksquare$

Bsp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ ist Borel-messbar,

da $f|_{[0, \infty)}$ und $f|_{(-\infty, 0)}$ stetig, also Borel-messbar.

Nun: Fixiere $A \in \mathcal{A}$.

Def. $\int_A f d\mu := \int_X f \cdot 1_A d\mu$ Integral von f über A

wobei $f: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar oder $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar mit $f \cdot 1_A \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$.

Andere Sicht: Betrachte $(A, \mathcal{A}|_A, \mu|_A)$
 f wie oben $\Rightarrow$

G.M. Lemma $\int_A \underbrace{f|_A}_{\mathcal{A}|_A\text{-messb.}} d\mu|_A = \int_X f \cdot 1_A d\mu$

Beweis: 1. $f = 1_B, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \int_X \underbrace{1_B \cdot 1_A}_{1_{A \cap B}} d\mu = \mu(A \cap B) = \int_A 1_B|_A d\mu|_A$

2. Ausdehnung auf $f \in E^+(X)$ mit Linearität, dann auf messbare $f: X \rightarrow [0, \infty]$ mit monotoner Approx.:

$u_n \in E^+(X), u_n \uparrow f \Rightarrow u_n|_A \in E^+(A), u_n|_A \uparrow f|_A$

Ausdehn. auf messbare $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ durch Zerlegen in Re-/Im-Teile und $\pm$ -Teile $\blacksquare$

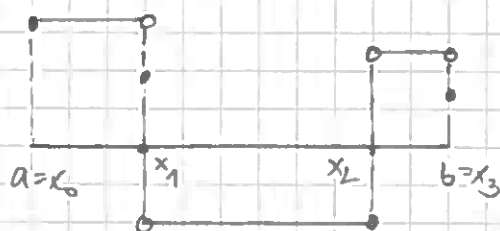
Für $A \in \mathcal{B}_d: \mathcal{L}^1(A, \lambda_d|_A) =: \mathcal{L}^1(A)$

4. Vergleich von Lebesgue-Integral und Riemannintegral (vgl. Ana I/II)

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

$\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Treppenfkt $\Leftrightarrow \exists$ Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$:

$$\varphi|_{(x_{i-1}, x_i)} = \text{konst} = c_i \in \mathbb{C}$$



$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1})$$

(Regel-) Integral von φ

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ Regelfkt $\Leftrightarrow f$ ist gleichmäßig auf $[a, b]$ durch T.F. approximierbar, d.h. $\exists$ Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von T.F. auf $[a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n\|_{\infty} = 0$$

Dann: $\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx$ Regelintegral von f

(Ana I: Limes exist. + unabh. von Wahl der approx. Folge (φ_n))

$$R[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \text{ Regelfkt}\}$$

$f \in R[a, b] \Leftrightarrow$ f hat in allen $x \in [a, b]$ einseitige Grenzwerte
beschr. $\therefore$ jede stetige Fkt ist Regelfkt.

Bem: $f \in R[a, b] \Rightarrow f$ Riemann-int. bar über $[a, b]$, und
 Regel- $\int f dx =$ Riemann- $\int f dx$

Bem: o.E. f $\mathbb{R}$ -wertig. $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ T.F. $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\|f - \varphi\|_{\infty} < \varepsilon \Rightarrow \varphi - \varepsilon < f < \varphi + \varepsilon \xrightarrow{\text{Approx. Sak}} f \text{ Riemann-int.} \quad \text{Beh.}$$

Nun: $[a, b]$ mit Borel- σ -Alg $\mathcal{B}([a, b])$ und Lebesgue-Maß $\lambda|_{[a, b]}$

φ Treppenfkt auf $[a, b] \Rightarrow \varphi \in E([a, b])$, und

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_{[a, b]} \varphi d\lambda$$

$[\varphi \in \mathcal{L}^1[a, b], \text{ da } \varphi \text{ beschr. und } \lambda([a, b]) = b - a < \infty]$

6.12. Satz $f \in R[a, b] \Rightarrow f$ ist Lebesgue-int. bar über $[a, b]$,
 d.h. $f \in \mathcal{L}^1[a, b]$, mit

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{Riemann-Int.}} = \underbrace{\int_{[a,b]} f d\lambda}_{\text{Lebesgue-Int.}}$$

Beweis: o.E. f $\mathbb{R}$ -wertig. $\Rightarrow \exists$ Folge $\varphi_n: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ von T.F. mit $\|f - \varphi_n\|_\infty \rightarrow 0$, wobei $\varphi_n \rightarrow f$ punktweise auf $[a,b]$
 φ_n messbar $\Rightarrow f$ messbar. f beschr. $\Rightarrow$ Maßraum endl. $f \in \mathcal{L}^1[a,b]$
 Satz 5.11

Ferner:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx = \lim_{\text{s.o. } n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda = \underbrace{\int_{[a,b]} f d\lambda}_{(*)}$$

$$\text{Zu } (*): \left| \int_{[a,b]} f d\lambda - \int_{[a,b]} \varphi_n d\lambda \right| \leq \int_{[a,b]} |f - \varphi_n| d\lambda \stackrel{6.8}{\leq} \|f - \varphi_n\|_\infty (b-a) \rightarrow 0$$

Uneigentliche Integrale: $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall.

$f: I \rightarrow \mathbb{C}$ Regel-fkt. $\Leftrightarrow f$ Regel-fkt auf jedem komp. $[a,b] \subseteq I$

z.B.: $f: [a,b) \rightarrow \mathbb{C}$ Regel-fkt, $b \leq \infty$ (b linke Grenze)

$$\underbrace{\int_a^b f(x) dx}_{\text{uneigentliches Regel-/Riemann-Int.}} = \lim_{b \uparrow b} \int_a^b f(x) dx \quad \text{falls Limes exist.}$$

uneigentliches Regel-/Riemann-Int.

Hier beim Lebesgue-Integral Vorsicht geboten! ($\rightarrow$ ÜÜ.)

5. Konvergenzsätze

Konvergenzsatz f. Regel-/Riemann-Int aus Ma I:

Sei $(f_n) \in \mathcal{R}[a,b]$ mit $f_n \rightarrow f$ glm. auf $[a,b] \Rightarrow$

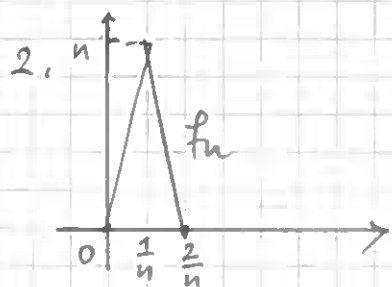
$$f \in \mathcal{R}[a,b] \text{ und } \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

Ziel: Schwächere Vorausss., z.B. punktweise Konv., und alles für Maßintegrale.

Bsp. zur Vorsicht: 1. $f_n = \frac{1}{n} \cdot 1_{[-n,n]}$ auf $\mathbb{R}$
 (Treppenfkt.)



$f_n \rightarrow 0$ glim. auf $\mathbb{R}$, aber $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 2 \rightarrow \int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda = 0$



$f_n \rightarrow 0$ punktweise auf $[0, 1]$, aber $\int_{[0,1]} f_n d\lambda = \int_0^1 f_n(x) dx = 1 \rightarrow 0$.

Stets: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Massraum.

6.13. Satz von der monotonen Konvergenz (Beppo Levi)

Seien $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar ($n \in \mathbb{N}$) mit $f_n \uparrow f: X \rightarrow [0, \infty]$,
dh. (f_n) konvergiere gegen f punktweise mon. wachsend

$$\Rightarrow \int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \in [0, \infty]$$

(Beachte: f messbar nach Satz 5.11.)

Beweis: Approx. Satz 5.13 $\Rightarrow \exists$ Folge $(u_{n,m})_{m \in \mathbb{N}} \subseteq E^+(X)$:

$$u_{n,m} \uparrow f_n \quad (m \rightarrow \infty)$$

$$g_m := \max_{1 \leq n \leq m} u_{n,m} \in E^+(X)$$

$g_{m+1} \geq g_m$, da $u_{n,m+1} \geq u_{n,m}$, und $u_{n,m} \leq g_m \quad \forall m \geq n$ $\otimes$

Feiner: $g_m \leq \max_{1 \leq n \leq m} f_n = f_m \leq f$ (*)

$$\Rightarrow f_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} u_{n,m} \leq \sup_{m \in \mathbb{N}} g_m \quad \forall n \quad \otimes$$

$$\Rightarrow f = \sup_n f_n \leq \sup_m g_m \stackrel{(*)}{\leq} f$$

$\Rightarrow$ es muss überall " $\leq$ " gelten, also $g_m \uparrow f$

$$\Rightarrow \int_X f d\mu = \sup_m \int_X g_m d\mu \stackrel{(*)}{\leq} \sup_m \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$$

$\Rightarrow$ überall gilt " $\leq$ " $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

6.14. Korollar Seien $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar ($n \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ ist messbar, und

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu \quad (\text{wichtig: } f_n \geq 0)$$

Beweis: $g_n = \sum_{k=1}^n f_k \uparrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k =: g \Rightarrow g$ messbar. Wende Satz v.d. mon. Konv. an. $\square$

6.15. Lemma von Fatou

Seien $f_n: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar ($n \in \mathbb{N}$) $\rightarrow$

$$\int_X (\liminf f_n) d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu \quad (\in [0, \infty])$$

Hier kann tatsächlich " $<$ " auftreten! Bsp: Übungen

Beweis: $f := \liminf f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$, $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$, alle messbar

$g_n \geq 0$, $g_n \uparrow f \Rightarrow$ mon. Konv.

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu = \sup_n \int_X g_n d\mu$$

$$g_n \leq f_k \quad \forall k \geq n \Rightarrow \int_X g_n d\mu \leq \inf_{k \geq n} \int_X f_k d\mu$$

$$\Rightarrow \int_X f d\mu \leq \sup_n \inf_{k \geq n} \int_X f_k d\mu = \liminf \int_X f_n d\mu \quad \square$$

6.16. Satz von der majorisierten Konvergenz (Lebesgue)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mu)$ und $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ mit

(i) $f_n \rightarrow f$ punktweise auf X

(ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ mit $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in X$

(integrierbare Majorante der f_n)

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, und

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

|| In Bsp. 1, 2:
Integrierbare Majorante!

Beweis: $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \Rightarrow f$ messbar. $|f_n| \leq g \quad \forall n \Rightarrow |f| \leq g$

$\Rightarrow$ Majorantenkriter. $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$

$$|f_n - f| \leq 2g \Rightarrow h_n := 2g - |f_n - f| \geq 0 \quad \forall n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 2g \quad \Rightarrow_{\text{Fatou}}$$

$$\begin{aligned} \int_X 2g d\mu &\leq \liminf_n \int_X h_n d\mu = \liminf_n \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu \\ &= \int_X 2g d\mu + \underbrace{\liminf_n (-a_n)}_{-\limsup_n a_n}, \quad a_n = \int_X |f_n - f| d\mu \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq -\limsup_n a_n \xRightarrow{a_n \geq 0} \limsup_n a_n = 0 \Rightarrow \liminf_n a_n = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1$$

$$\text{Ferner: } \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \blacksquare$$

6. Zur Rolle der Nullmengen

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

Erinnerung: $N \in \mathcal{A}$ μ -Nullmenge, falls $\mu(N) = 0$

- Sei N Nullmenge, $A \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq N \Rightarrow A$ Nullmenge, da $\mu(A) \leq \mu(N)$
- abzählbare Vereinigungen von Nullm. sind wieder Nullm.

Sprechweise: Seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) messbar.

Man sagt: „ $f = g$ μ -fast überall“ (kwz: $f = g$ μ -f.ü.)

falls $\exists$ Nullm. $N \in \mathcal{A}$: $f(x) = g(x) \quad \forall x \in X \setminus N$

Bsp: $f = 1_{\mathbb{Q}}$ auf $\mathbb{R} \Rightarrow f = 0$ λ -f.ü.
 $\uparrow$ Lebesgue-Maß

Allg: Eine Eigenschaft gilt fast überall auf X , falls

$\exists$ Nullmenge $N \in \mathcal{A}$, so dass diese Eigenschaft auf $X \setminus N$ gilt

6.17. Satz Sei $f: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar. Dann:

$$\int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}$$

Beweis: $\int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow \exists u_n \in E^+(X), u_n = \sum_k \alpha_{n,k} 1_{A_{n,k}}$ (Normaldarst.)
mit $u_n \uparrow f$ und $\int u_n d\mu = 0 \quad \forall n$

$$\int_X u_n d\mu = 0 \Leftrightarrow \forall n, k \text{ ist } \alpha_{n,k} = 0 \text{ oder } \mu(A_{n,k}) = 0 \\ \Leftrightarrow u_n = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}$$

Also: $\int_X f d\mu = 0 \Leftrightarrow \exists u_n \in E^+(X): u_n \uparrow f \text{ und } u_n = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}$

$$\Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}$$

$$\uparrow \text{ da } \{f > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{u_n > 0\}$$

Betrachte nun $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(X, \mu)$

$$\mathcal{N}(\mu) := \{f \in \mathcal{L}^1(\mu): f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}\}$$

6.18. Satz (1) $\mathcal{N}(\mu)$ ist Untervektorraum von $\mathcal{L}^1(\mu)$

$$(2) f \in \mathcal{N}(\mu) \Leftrightarrow \int_X |f| d\mu = \|f\|_1 = 0.$$

Beweis: (1) Seien $f, g \in \mathcal{N}(\mu)$.

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in N_f^c, \quad g(x) = 0 \quad \forall x \in N_g^c, \quad N_f, N_g \text{ } \mu\text{-Nullmengen} \\ a, b \in \mathbb{C} \Rightarrow af + bg = 0 \quad \forall x \in (N_f \cup N_g)^c \Rightarrow \\ af + bg = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}$$

$$(2) f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.} \Leftrightarrow |f| = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.} \xLeftrightarrow{\text{Satz 6.17.}} \int_X |f| d\mu = 0$$

6.19. Korollar Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $g: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar mit
 $f = g \mu\text{-f.ü.} \Rightarrow g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $\|f - g\|_1 = 0$, und

$$\int_X g d\mu = \int_X f d\mu$$

Beweis: $|f - g|$ messbar, $|f - g| = 0$ f.ü. $\Rightarrow 0 = \int |f - g| d\mu$
 $= \|f - g\|_1 \Rightarrow \|g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g - f\|_1 = \|f\|_1 \xrightarrow{\text{Satz 6.17}} g \in \mathcal{L}^1(\mu)$
 $|\int g d\mu - \int f d\mu| \leq \int |g - f| d\mu = 0 \quad \blacksquare$

Auf Nullmengen darf man also $\mathcal{L}^1$ -Fkt beliebig abändern
 (sofern Messbarkeit erhalten bleibt), ohne dass sich der Wert des
 Integrals ändert. z.B. gilt:

6.20. Majorantenkrit. (II) Sei $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$
 mit $|f| \leq g$ μ -f.ü. $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $|\int f d\mu| \leq \int g d\mu$

Beweis: $\tilde{g} := \sup(|f|, g) \Rightarrow \tilde{g}$ messbar, $|f(x)| \leq \tilde{g}(x) \quad \forall x \in X$
 $g = \tilde{g}$ f.ü. $\xrightarrow{\text{Kor. 6.19.}} \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Ferner
 $\int |f| d\mu \leq \int \tilde{g} d\mu = \int g d\mu \Rightarrow \text{Beh.} \quad \blacksquare$

6.21. Satz v. d. majorisierten Konvergenz (II)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f_n \rightarrow f$ pktweise f.ü. und
 $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $g \geq 0$ mit $|f_n| \leq g$ f.ü. für alle $n \Rightarrow$
 nach evtl. Abändern auf einer Nullmenge ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,
 $\|f - f_n\|_1 \rightarrow 0$, und

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

Beweis: $\exists$ Nullm. $N: f_n(x) \rightarrow f(x)$ und $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in N^c$
 $\tilde{f}_n := f_n \cdot 1_{N^c}$, $\tilde{f} := f \cdot 1_{N^c} \Rightarrow \tilde{f}_n, \tilde{f}$ messbar, $\tilde{f}_n(x) \rightarrow \tilde{f}(x) \quad \forall x$,
 $|\tilde{f}_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x$. Satz v. Lebesgue 6.16 für $\tilde{f}_n, \tilde{f} \Rightarrow \text{Beh.} \quad \blacksquare$
 $\uparrow$
 Abänderung auf

7. Der normierte Raum $L^1(X, \mu)$

$$f, g \in \mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1(X, \mu) \text{ mit } f = g \text{ } \mu\text{-f.ü.} \Rightarrow \int_X f d\mu = \int_X g d\mu$$

Man identifiziert daher oft $\mathcal{F}$ kt, die μ -f.ü. übereinstimmen:

$$f \sim g : \Leftrightarrow f = g \text{ } \mu\text{-f.ü.}$$

$\sim$ ist Äquivalenzrel. auf $\mathcal{L}^1(\mu)$

Äquivalenzklasse von $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$:

$$[f] := \{g \in \mathcal{L}^1(\mu) : f = g \text{ } \mu\text{-f.ü.}\}$$

Def. $L^1(\mu) := L^1(X, \mu) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^1(\mu)\} =: \mathcal{L}^1(\mu) / \sim(\mu)$

$L^1(\mu)$ ist ein $\mathbb{C}$ -VR (ein sogenanntes Quotienten-VR) mit den Operationen

$$[f] + [g] := [f + g]; \quad \lambda[f] := [\lambda f], \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Diese sind in der Tat wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Wahl des Vertreters.

Etwa: Seien $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $[f] = [\tilde{f}]$, $[g] = [\tilde{g}] \Leftrightarrow$

$$f = \tilde{f} \text{ } \mu\text{-f.ü.}, g = \tilde{g} \text{ } \mu\text{-f.ü.} \Rightarrow f + g = \tilde{f} + \tilde{g} \text{ } \mu\text{-f.ü.} \Rightarrow [f + g] = [\tilde{f} + \tilde{g}]$$

Def. $\|[f]\|_1 := \|f\|_1, \quad \int_X [f] d\mu := \int_X f d\mu$

(beides wohldef. nach Kor. 6.19)

6.22. Satz $\|\cdot\|_1$ ist eine Norm auf $L^1(\mu)$

Beweis: $\|\cdot\|_1 \geq 0$, Homogenität + Δ -Ungl. folgen aus denen auf $\mathcal{L}^1(\mu)$. zu Definitheit:

$$\|[f]\|_1 = 0 \Leftrightarrow \|f\|_1 = 0 \xLeftrightarrow[\text{Kor. 6.18}] f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.} \Leftrightarrow f \in [0],$$

dh. $[f] = [0]$ ■

Man schreibt dann wieder f statt $[f]$.

8. Parameterabhängige Integrale

Häufig in Praxis: Integrale d. Form

$$F(t) = \int_A f(x, t) dx \quad (A \in \mathcal{B}_d)$$

Wobei $t \in T$ ein Parameter, T metrischer Raum

Hoffnung: $t \mapsto f(x, t)$ stetig auf $T \quad \forall x \in A \Rightarrow F$ stetig auf T

6.23. Stetigkeitssatz

Sei T met. Raum, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, und $f: X \times T \rightarrow \mathbb{C}$ erfülle

(i) $\forall x \in X$ ist $t \mapsto f(x, t)$ stetig auf T ,

$\forall t \in T$ ist $x \mapsto f(x, t)$ messbar auf X

(ii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu): |f(x, t)| \leq g(x) \quad \forall x \in X, t \in T$

(von t unabh. integrierbare Majorante)

$\Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \forall t \in T$, und

$F(t) := \int_X f(x, t) d\mu(x)$ ist stetig auf T

Beweis: (ii) $\Rightarrow f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \forall t$ nach Majorantenkrit.

Zur Stetigk. von F : Sei $(t_n) \subseteq T$ Folge mit $t_n \rightarrow t \in T$.

(i) $\Rightarrow f(x, t_n) \rightarrow f(x, t) \quad \forall x \in X$

(ii) + Satz v. Lebesgue $\Rightarrow$

$$F(t_n) = \int_X f(x, t_n) d\mu(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_X f(x, t) d\mu(x) = F(t) \Rightarrow F \text{ stetig in } t$$

Bem: Oft findet man eine Majorante nicht auf ganz T ,

sondern für jedes $t_0 \in T$ nur in einer (evtl. kleinen)

Umgebung $U(t_0) \Rightarrow$ Stetigkeit auf $U(t_0) \quad \forall t_0$, also auf ganz T .

Bsp: Gamma-Fkt $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx, \quad t > 0$

Uneig. Regelint. konv. nach Analysis II $\Rightarrow$

$$x \mapsto x^{t-1} e^{-x} = f(x, t) \in \mathcal{L}^1(0, \infty) \quad \forall t > 0$$

Hajorante auf ganz $T = (0, \infty)$ nicht zu erwarten

Sei $t \in (a, b)$, $0 < a < b \Rightarrow$

$$x^t \leq \begin{cases} x^b, & x \geq 1 \\ x^a, & 0 < x < 1 \end{cases} \Rightarrow |f(x, t)| \leq (x^{a-1} + x^{b-1}) e^{-x} =: g(x)$$

$g \in \mathcal{L}^1(0, \infty)$ (Hajorante) $\xRightarrow{\text{stetigk. Sak}} \Gamma$ stetig auf $(a, b) \xRightarrow{0 < a < b \text{ bel.}}$

Γ stetig auf $(0, \infty)$.

6.24. Differenzierbarkeitssatz: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall,

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $f: X \times I \rightarrow \mathbb{C}$ erfülle:

(i) $\forall x \in X$ ist $t \mapsto f(x, t)$ diffbar auf I

(ii) $\forall t \in I$ ist $x \mapsto f(x, t) \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(iii) $\exists g \in \mathcal{L}^1(\mu): |\partial_t f(x, t)| \leq g(x) \quad \forall x \in X, t \in I$

$\Rightarrow F(t) := \int_X f(x, t) d\mu(x)$ ist diffbar auf I mit

$$F'(t) = \int_X \partial_t f(x, t) d\mu(x)$$

Zusatz: Falls $t \mapsto f(x, t) \in C^1(I) \quad \forall x \in X \Rightarrow$ auch $F \in C^1(I)$

Beweis: o.E. f $\mathbb{R}$ -wertig. Sei $t \in I$, $(t_n) \subseteq I$ Folge mit $t_n \rightarrow t, t_n \neq t$

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \underbrace{\frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}}_{=: h_n(x)} d\mu(x)$$

$=: h_n(x), h_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$ nach (ii)

(i) $\Rightarrow h_n(x) \rightarrow \partial_t f(x, t) \quad \forall x \in X$, insbes. ist $x \mapsto \partial_t f(x, t)$ messbar.

$h_n(x) \xrightarrow{\text{m.w.s.}} \partial_t f(x, \tau_x)$ mit τ_x zwischen t_n und t ($\tau_x \in I$!)

(iii) $\Rightarrow |h_n| \leq g$ auf $X \quad \forall n$

Sak v. Lebesgue $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_X \partial_t f(x, t) d\mu(x) \quad \square$

In Praxis oft: Parameterraum $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen; 6.24. $\Rightarrow$ part. Diffbarkeit

9. Anwendung: Fouriertransformation

Def. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, Fouriertransformierte von f :

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

Dabei $x\xi := \sum_{i=1}^d x_i \xi_i$

Beachte: $|e^{-ix\xi}| = 1 \Rightarrow x \mapsto f(x) e^{-ix\xi} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \quad \forall \xi$

Ferner: $\xi \mapsto e^{-ix\xi} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ bei festem x

$|f(x) e^{-ix\xi}| = |f(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ (von ξ unabh. Majorante)

Stetigkeitsrak $\Rightarrow \hat{f} \in C(\mathbb{R}^d)$

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int |f(x)| dx$$

$$\Rightarrow \hat{f} \in C_b(\mathbb{R}^d) \quad \text{mit} \quad \|\hat{f}\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_1$$

Diffbarkeit von $\hat{f}$? Hier (der Einfachheit halber) $d=1$

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mit $xf(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \hat{f} \in C^1(\mathbb{R})$ mit

$$\hat{f}'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix) f(x) e^{-ix\xi} dx = (-ixf)^{\wedge}(\xi)$$

Denn: $|\partial_\xi (f(x) e^{-ix\xi})| = |x f(x)| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ (Majorante)

Diffsak f. Parameternt. (da $\xi \mapsto f(x) e^{-ix\xi} \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ Beh.)

Allgemeiner: Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ mit $x^n f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$, und $\forall 0 \leq k \leq n$ gilt:

$$\hat{f}^{(k)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-ix)^k f(x) e^{-ix\xi} dx = (-1)^k x^k f^{\wedge}(\xi)$$

Beachte dabei: $x^k f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \quad \forall k \leq n$, da

$$|x|^k \leq 1 + |x|^n \Rightarrow |x^k f| \leq |f| + |x^n f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$$

Beweis: mit Induktion nach n + Diffsak f. Parameternt.

Bsp: $f(x) = e^{-x^2/2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. $\hat{f}(\xi) = ?$

Wir werden in Kürze sehen (Kap. 7): $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$

$$\Rightarrow \hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = 1$$

üb. $\Rightarrow \hat{f}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$, dh. $e^{-x^2/2}$ ist Eigenfkt der Fouriertrafo

10. Maße mit Dichten

6.27. Satz Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $g: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar $\rightarrow$

(1) $\mu_g(A) := \int_A g d\mu$ definiert Maß $\mu_g =: g\mu$ auf $\mathcal{A}$
Maß mit Dichte g bzgl. μ

(2) $f: X \rightarrow [0, \infty]$ messbar $\rightarrow$

$$(*) \int_X f d\mu_g = \int_X f g d\mu$$

(3) $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, dann: $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu_g) \Leftrightarrow fg \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$,
 und es gilt ebenfalls (*)

Beweis: Übung Blatt 9

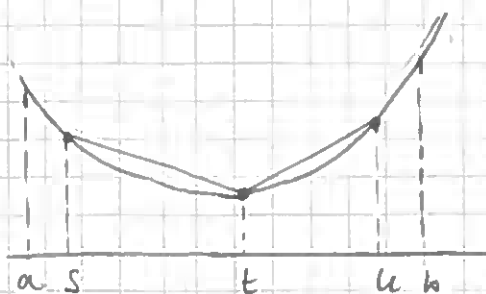
11. Die Jensen'sche Ungleichung

Erinnerung: $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R} : \Leftrightarrow$

$$\forall 0 \leq \lambda \leq 1, s, t \in I : \varphi(\lambda t + (1-\lambda)s) \leq \lambda \varphi(t) + (1-\lambda)\varphi(s)$$

Äquivalent (vgl. Ana I, §11):

$$(*) \frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \quad \forall a < s < t < u < b$$



Falls $\varphi \in C^2(I)$: φ konvex auf $I \Leftrightarrow \varphi'' \geq 0$ auf I

6.28. Satz (Jensen'sche Ungleichung)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum mit $\mu(X) = 1$ („Wahrscheinlichkeitsraum“)

Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ $\mathbb{R}$ -wertig mit $a < f(x) < b \quad \forall x \in X, -\infty \leq a < b \leq \infty$

Sei $\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig + konvex mit $\varphi \circ f \in \mathcal{L}^1(\mu) \Rightarrow$

$$\varphi\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f d\mu$$

Beachte: $a < f < b \xRightarrow{\mu(X)=1} a < \int_X f d\mu < b$, also linke Seite der Ungl. sinnvoll.

Beweis: $t := \int_X f d\mu \Rightarrow a < t < b$.

$$\beta := \sup_{s \in (a, t)} \frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} \xRightarrow{(*)} \beta \leq \frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} \quad \forall s \in (t, b)$$

Also gilt $\forall s \in (a, b)$: $\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s - t)$

$$\xRightarrow{s=f(x)} \varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x) - t) \geq 0 \quad \forall x \in X$$

$$\text{Integration} \Rightarrow \int_X (\varphi \circ f) d\mu - \underbrace{\varphi(t)}_{\varphi(\int_X f d\mu)} - \beta \underbrace{\int_X f d\mu - t}_0 \geq 0 \Rightarrow \text{Beh.}$$

Bsp: $\varphi(t) = e^t$ konvex auf $\mathbb{R}$. Jensen:

$$\exp\left(\int_X f d\mu\right) \leq \int_X e^f d\mu \quad (\text{sofern int. exist.})$$

Sei $X = \{a_1, \dots, a_n\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, def. W-Maß μ auf $\mathcal{P}(X)$ durch $\mu(\{a_i\}) = \frac{1}{n}$ (+ additiv fortgesetzt)

Betrachte $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(a_i) = x_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\exp\left(\frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)\right) \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + \dots + e^{x_n})$$

Mit $y_i = e^{x_i}$:

$$(y_1, \dots, y_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n) \quad (\text{AGH-Ungl.})$$

§7 Produktmaße und der Satz von Fubini

Wichtig zur Berechnung von Integralen $\int_A f(x) dx$, $A \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar:
Reduktion auf 1-dim. Integrationen

1. Produktmaße

Stets: $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$ Messräume

Def. Produkt- σ -Algebra von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ auf $X \times Y$:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\})$$

↑ messbare Rechtecke

7.1. Bsp $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ mit induz. Top. $\Rightarrow$

$$\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$$

Insb.: $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_m = \mathcal{B}_{n+m}$ (bei Identf. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$)

Beweis: " $\subseteq$ " $A \in \mathcal{B}(X)$, $B \in \mathcal{B}(Y) \Rightarrow A \times B = (A \times Y) \cap (X \times B)$

$A \times Y \in \mathcal{B}(X \times Y)$, da $A \times Y = \pi^{-1}(A)$, $\pi: X \times Y \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x$ stetig

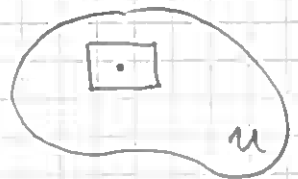
Analog $X \times B \in \mathcal{B}(X \times Y) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{B}(X \times Y) \Rightarrow$ " $\supseteq$ "

In " $\supseteq$ ": Es genügt zu zeigen: $U \subseteq X \times Y$ offen $\Rightarrow U \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$

Aber: $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \Rightarrow \exists$ abzählbar viele

Rechtecke $A_k \times B_k$, $A_k \subseteq X$ offen, $B_k \subseteq Y$ offen

mit $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{(A_k \times B_k)}_{\in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)} \Rightarrow$ Beh.



7.2. Lemma (Messbare Schnitte)

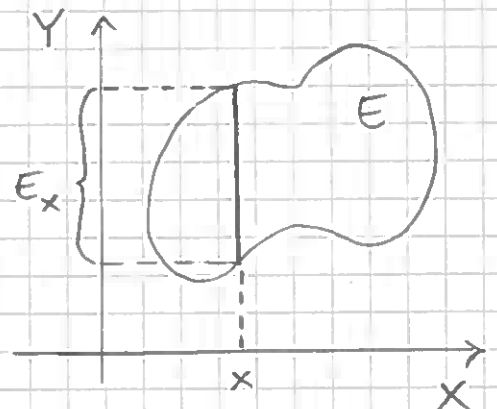
(1) Sei $E \subseteq X \times Y$ mit $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$x \in X \Rightarrow E_x := \{y \in Y : (x, y) \in E\} \in \mathcal{B}$

x -Schnitt von E

$y \in Y \Rightarrow E^y := \{x \in X : (x, y) \in E\} \in \mathcal{A}$

y -Schnitt von E



(2) Sei $f: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar

$x \in X \Rightarrow f_x(y) := f(x, y): Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ist $\mathcal{B}$ -messbar

$y \in Y \Rightarrow f^y(x) := f(x, y): X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ " $\mathcal{A}$ -messbar

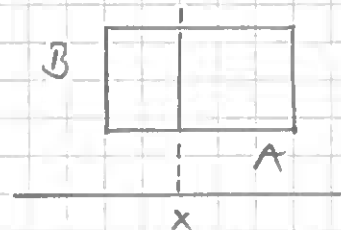
Analog für $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$

Beweis: Für x -Schnitte, y -Schnitte analog

(1) $\mathcal{G} := \{E \subseteq X \times Y: E_x \in \mathcal{B} \forall x \in X\}$. z. zeigen: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$

1. $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow A \times B \in \mathcal{G}$, da

$$(A \times B)_x = \begin{cases} B, & \text{falls } x \in A \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$



2. $\mathcal{G}$ ist σ -Algebra,

da $\mathcal{B}$ σ -Algebra und $(\cdot)_x$ verträglich mit Komplementbildung und abzählbaren Vereinigungen

1. + 2. $\Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$

(2) Sei $C \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \Rightarrow (f_x)^{-1}(C) = \{y \in Y: f(x, y) \in C\} = f^{-1}(C)_x$

f messbar $\Rightarrow f^{-1}(C) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \xrightarrow{(1)} f^{-1}(C)_x \in \mathcal{B}$ ■

Erinnerung: Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ -endlich $\Leftrightarrow$

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, X_n \in \mathcal{A}, \mu(X_n) < \infty \forall n \quad (\text{dabei o.E. } X_n \uparrow X)$$

Bsp: $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d, \lambda_d)$ σ -endlich: $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(0), \lambda_d(B_n(0)) < \infty$

7.3. Satz Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ -endliche Maßräume.

$E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow x \mapsto \nu(E_x)$ ist $\mathcal{A}$ -messbar auf X ($E_x \in \mathcal{B}$!)

$y \mapsto \mu(E^y)$ " $\mathcal{B}$ -messbar auf Y

Beweis: 1. Fall: $\nu(Y) < \infty$

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}: x \mapsto \nu(E_x) \text{ messbar}\}$$

z. zeigen: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E}), \quad \mathcal{E} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

$\mathcal{E}$ offenbar σ -stabil



Satz 4.8. $\Rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \mathcal{D}(\mathcal{E})$

(von $\mathcal{E}$ erzeugtes Dynkin-System)

Zeige also: $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$. (*)

1. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$, denn: $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$$\nu((A \times B)_x) = \nu(B) \cdot 1_A(x) \text{ messbar} \Rightarrow A \times B \in \mathcal{D}.$$

2. $\mathcal{D}$ ist Dynkin-System:

$X \times Y \in \mathcal{D}$ nach 1.

$E, F \in \mathcal{D}, E \subseteq F \Rightarrow F \setminus E \in \mathcal{D}$, da $\nu((F \setminus E)_x) = \nu(F_x) - \underbrace{\nu(E_x)}_{\substack{\text{endl.!} \\ \text{also messbar}}}$

$(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$ disj. $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{D}$, da

$$\nu((\bigcup E_n)_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\nu(E_n)_x}_{\geq 0, \text{ messbar}}$$

1. + 2. $\Rightarrow (*)$

2. Fall: ν σ -endl. $\Rightarrow Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n, Y_n$ disj., $\nu(Y_n) < \infty \forall n$.

Def. Maße ν_n auf Y :

$$\nu_n(B) := \nu(B \cap Y_n) \Rightarrow \nu_n \text{ endlich}$$

Sei $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. 1. Fall $\Rightarrow \forall n$ ist $\nu_n(E_x)$ messbar $\Rightarrow$

$$\nu(E_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_x \cap Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(E_x), \text{ also auch messbar}$$

7.4. Lemma Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ -stabil mit

$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$. Seien α, β endliche Maße auf $\mathcal{A}$ mit

$$\alpha(X) = \beta(X) \text{ und } \alpha|_{\mathcal{E}} = \beta|_{\mathcal{E}} \Rightarrow \alpha = \beta.$$

Beweis: $\mathcal{D} := \{A \in \mathcal{A} : \alpha(A) = \beta(A)\}$

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ (klar)

$\mathcal{D}$ ist Dynkin-System: $\bullet X \in \mathcal{D}$,

$\bullet A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \subseteq B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{D}$ (da α, β endlich)

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ disj. $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. (da α, β σ -additiv)

$\mathcal{E}$ n -stabil $\Rightarrow \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) \stackrel{\text{Satz 4.10}}{\sim} \mathcal{A}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \alpha = \beta$ auf $\mathcal{A}$ $\blacksquare$

7.5. Lemma Sei $(X, \mathcal{A})$ Maßraum, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ n -stabil mit $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$. Seien α, β Maße auf $\mathcal{A}$ mit $\alpha|_{\mathcal{E}} = \beta|_{\mathcal{E}}$, und es gebe $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ mit $E_n \uparrow X$ und $\alpha(E_n) < \infty \forall n$
 $\Rightarrow \alpha = \beta$

Beweis: Def. auf $\mathcal{A}$: $\alpha_n(A) := \alpha(E_n \cap A)$, β_n analog
 $\Rightarrow \alpha_n, \beta_n$ endl. Maße. $E_n \uparrow X \Rightarrow \alpha_n(A) \rightarrow \alpha(A), \beta_n(A) \rightarrow \beta(A)$
 $\alpha_n(X) = \beta_n(X), \alpha_n = \beta_n$ auf $\mathcal{E} \stackrel{\text{Lemma 7.4.}}{\Rightarrow} \alpha_n = \beta_n \Rightarrow \alpha = \beta$ $\blacksquare$

7.6. Satz (Produktmaße)

Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ -endl. Maßräume $\rightarrow$

$\exists!$ Maß $\mu \otimes \nu$ auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$$

Es ist gegeben durch

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y) \quad \text{für } E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

$\mu \otimes \nu$ ist ebenfalls σ -endlich (Produktmaß von μ und ν)

Beachte: Die Integrale sind wohldef., da die Integranden messbar nach Satz 7.3.

Beweis: 1. Existenz: Def. auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$$\alpha(E) := \int_X \nu(E_x) d\mu(x), \quad \beta(E) := \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$$

α ist Maß (ebenso β), da: $\alpha(\emptyset) = 0$;

$(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ disj. $\Rightarrow$

$$\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \int_X \nu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)_x\right) d\mu(x) = \int_X \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \nu((E_n)_x)}_{\geq 0} d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(E_n) \quad \text{B. (Levi)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu((E_n)_x) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha(E_n) . \quad \text{Also } \alpha \text{ } \sigma\text{-additiv}$$

$\mathcal{E} := \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$, $\cap$ -stabil, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$.

$$\alpha(\underbrace{A \times B}_{\in \mathcal{E}}) = \int_X \underbrace{\nu((A \times B)_x)}_{\nu(B) \cdot 1_A(x)} d\mu(x) = \mu(A) \nu(B) = \dots = \beta(A \times B)$$

2. α σ -endlich: Seien $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$, $A_n \uparrow X$, $(B_n) \subseteq \mathcal{B}$, $B_n \uparrow Y$ mit $\mu(A_n), \nu(B_n) < \infty$.

$$\Rightarrow A_n \times B_n \uparrow X \times Y, \text{ und } \alpha(A_n \times B_n) = \mu(A_n) \nu(B_n) < \infty$$

3. Eindeutigkeit: Mit Lemma 7.5.: Sei γ Maß auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ mit

$$\gamma(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$$

$$\Rightarrow \gamma|_{\mathcal{E}} = \alpha|_{\mathcal{E}} . \text{ Mit } E_n = A_n \times B_n \text{ wie in 2. folgt } \gamma = \alpha, \text{ also auch } \beta = \alpha \quad \blacksquare$$

7.7. Satz $\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m}$ (λ_d : Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^d$)

Beweis: $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_m = \mathcal{B}_{n+m}$ nach Bsp 7.1

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n+m} &= \sigma(\mathcal{E}), \quad \mathcal{E} = \{\text{h.o. Quadrate in } \mathbb{R}^{n+m}\} \\ &= \{A \times B : A = (a, b] \in \mathbb{R}^n, B = (c, d] \in \mathbb{R}^m\} \end{aligned}$$

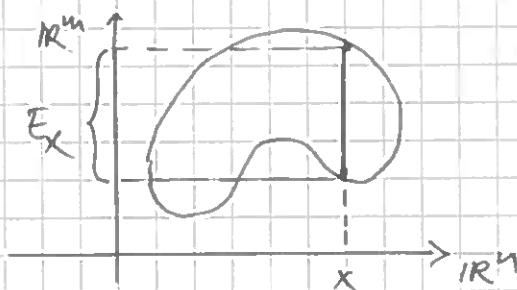
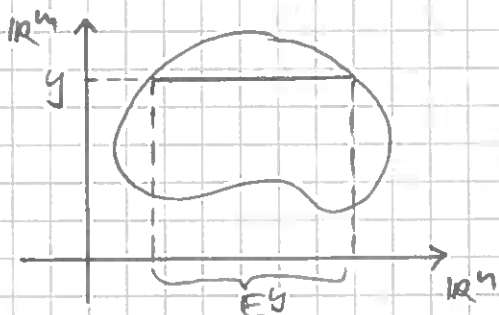
$\mathcal{E}$ $\cap$ -stabil; $\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m}$ auf $\mathcal{E}$ (klar)

Mit $E_k = A_k \times B_k$, $A_k \uparrow \mathbb{R}^n$, $\lambda_n(A_k) < \infty$, $B_k \uparrow \mathbb{R}^m$, $\lambda_m(B_k) < \infty$ sind die Vorausss. von Lemma 7.5. erfüllt $\Rightarrow$ Beh $\blacksquare$

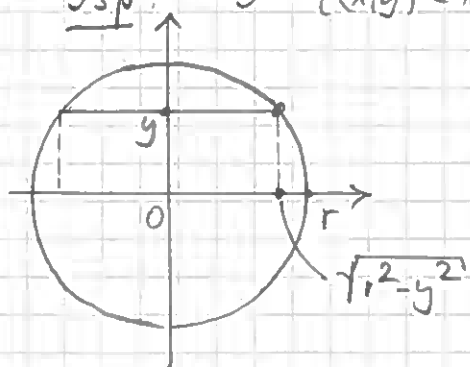
7.8 Korollar (Kleines Satz v. Fubini)

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ messbar, d.h. $E \in \mathcal{B}_{n+m} \Rightarrow$

$$\lambda_{n+m}(E) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_n(E^y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_m(E_x) dx$$



Bsp: $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$, $r > 0$



$$\lambda_2(B) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_1(B^y) dy$$

$$B^y = [-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}] \text{ falls } |y| \leq r$$

($\emptyset$ sonst)

$$\Rightarrow \lambda_2(B) = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - y^2} dy = \underline{\underline{\pi r^2}}$$

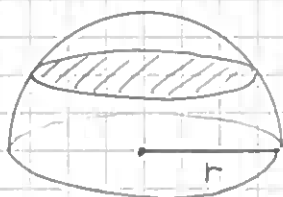
Ana I

Konsequenz: Prinzip v. Cavalieri:

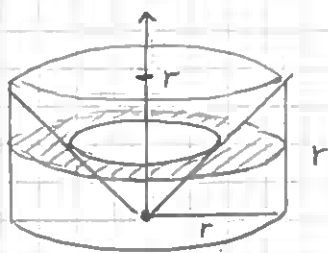
Sind $E, F \in \mathcal{B}_{\text{Htm}}$ mit $\lambda_n(E^y) = \lambda_n(F^y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \Rightarrow$

$$\lambda_{\text{Htm}}(E) = \lambda_{\text{Htm}}(F)$$

Bsp: Kugelvolumen nach Archimedes (leicht modifiziert)



Kugelhälfte



ausgebohrter Kreiszylinder

gleiche Flächen
in gleicher Höhe!

2. Der Satz v. Fubini

7.9. Satz (Tonelli) Seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ -endliche Maßräume und $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ -messbar $\Rightarrow$

$$x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \text{ist } \mathcal{A}\text{-messbar}$$

$$y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \quad \text{ist } \mathcal{B}\text{-messbar, und}$$

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

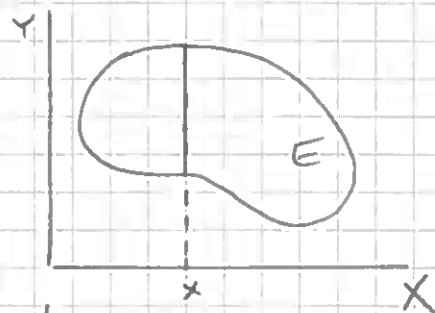
"iterierte Integrale"

Beachte dabei: $y \mapsto f(x, y)$, $x \mapsto f(x, y)$ ist $\mathcal{B}$ - bzw. $\mathcal{A}$ -messbar
nach Lemma 7.2., also alle Integrale sinnvoll.

Beweis: 1. $f = 1_E$, $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow$

$$\int_Y 1_E(x, y) d\nu(y) = \int_Y 1_{E_x}(y) d\nu(y) = \nu(E_x)$$

$$\uparrow E_x = \{y: (x, y) \in E\}$$



insbes. $\mathcal{A}$ -messbar als Fkt von x (Satz 7.3), und

$$\Rightarrow \int_{X \times Y} 1_E d(\mu \otimes \nu) = \mu \otimes \nu(E) \stackrel{\text{Satz 7.6.}}{=} \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y 1_E(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

Zweite Identität analog

2. $f \in E^+(X \times Y)$: Mit Linearität aus 1.

3. $f: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ messbar $\Rightarrow \exists u_n \in E^+(X \times Y): u_n \uparrow f$

$$\Rightarrow \int_Y u_n(x, y) d\nu(y) \uparrow \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \text{nach B. Levi}$$

insbes.: $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$ messbar als Limes messbarer Fkt

$$\text{Ferner: } \int_X \left(\int_Y u_n(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \xrightarrow{\text{B. Levi}} \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

|| 2.

$$\int_{X \times Y} u_n d(\mu \otimes \nu) \xrightarrow{\text{B. Levi}} \int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) \Rightarrow 1. \text{ Id., 2. analog}$$

Bem.: Das Beweisprinzip einer Aussage (über Integrale)

1. für charakt. Fkt

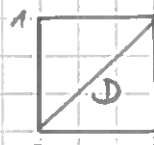
2. für Fkt aus $E^+(\dots)$ mit Linearität

3. für nichtneg. messbare Fkt mit monotoner Approx. aus $E^+(\dots)$

man nennt auch „algebraische Induktion“

Bem.: σ -Endlichkeit der beteiligten Maßräume ist wichtig!

$$\text{Bsp: } f = 1_D, D = \{(x, y) \in [0, 1]^2: x = y\}$$



$$X = Y = [0, 1] \text{ mit } \mathcal{B}([0, 1])$$

λ : Lebesgue-Maß, μ : Zählmaß auf $\mathcal{B}([0, 1])$ (d.h. $\mu(A) = |A|$)

$$\Rightarrow \int (\int 1_y d\mu) d\lambda + \int (\int 1_y d\lambda) d\mu$$

Details: Übung

7.10. Satz v. Fubini seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ σ -endliche Maßräume und $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu) \Rightarrow$

(1) Für μ -fast alle $x \in X$ ist $y \mapsto f(x, y) = f_x(y) \in \mathcal{L}^1(\nu)$

Für ν -fast alle $y \in Y$ ist $x \mapsto f(x, y) = f^y(x) \in \mathcal{L}^1(\mu)$

(2) Setze

$$G(x) := \begin{cases} \int_Y f(x, y) d\nu(y) & \text{falls } f_x \in \mathcal{L}^1(\nu) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H(y) := \begin{cases} \int_X f(x, y) d\mu(x) & \text{falls } f^y \in \mathcal{L}^1(\mu) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow G \in \mathcal{L}^1(\mu)$, $H \in \mathcal{L}^1(\nu)$, und

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X G d\mu = \int_Y H d\nu$$

Kurz: $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu) \Rightarrow$

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

wobei zu beachten ist, dass das innere Integral nur für fast alle $x \in X$ bzw. fast alle $y \in Y$ existiert, und sonst 0 gesetzt ist.

Bem: Oft werden Tonelli + Fubini gekoppelt angewendet:

Für messbaren $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ ist $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ genau dann, wenn mindestens 1 des iterierten Integrale

$$\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x), \quad \int_Y \left(\int_X |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

existiert mit Wert $< \infty$. In diesem Fall sind beide Int. gleich

$\int_{X \times Y} |f| d(\mu \otimes \nu)$ nach Tonelli, und auf f ist Fubini anwendbar.

Beweis v. Fubini: 1. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$, $f \geq 0$. Tonelli $\Rightarrow$

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \underbrace{\left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right)}_{\text{messbar, Werte in } [0, \infty]} d\mu(x) < \infty \quad \otimes$$

Aufg. H1, Br: H P $\Rightarrow \exists \mu$ -Nullmenge $N_\mu \subseteq X$, so dass

$$\forall x \in X \setminus N_\mu: \int_Y f(x, y) d\nu(y) < \infty, \text{ d.h. } f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$$

Aus $\otimes$ folgt dann die 1. Integrationsformel in (2), da $\rightarrow$

$\int_{N_\mu} (\dots) d\mu(x) = 0$ nach Satz 6.17, 2. Formel analog.

2. $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$ beliebig: Zerlege $f = f_1 - f_2 + i(f_3 - f_4)$

$$f_{1/2} = (\operatorname{Re} f)_\pm, \quad f_{3/4} = (\operatorname{Im} f)_\pm, \quad f_i \geq 0, \quad f_i \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$$

1. Fall für die f_i und Linearität des Int. $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

Vorsicht: Es kann sein, dass beide iterierten Integrale existieren, aber verschiedene Werte haben! (dabei $f \in \mathcal{L}^1(\mu \otimes \nu)$)

Bsp: Übungen

Aus der Existenz der iterierten Integrale allein folgt also nicht deren Vertauschbarkeit, wichtig ist die absolute Konvergenz!

Bem: Nach Satz 7.7. (+ Induktion) gilt für das d -dim Lebesgue-

$$\text{Maß: } \lambda_d = \lambda_1 \otimes \dots \otimes \lambda_1 \quad (d \text{ Faktoren})$$

$$\text{Also: } f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\dots \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \right) \dots \right) dx_d$$

Bsp 1: Gamma- und Betafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0 \quad \text{Gammafkt}$$

Bekannt (Analysis II):

$$\cdot \Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(x) > 0 \quad \forall x > 0$$

$$\cdot \Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad \text{Funktionalgleichung}$$

Insbes: $\Gamma(n+1) = n!$

Def. (Betaßkt) $B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x,y > 0)$

Korr. des uneigentl. Integrals: Übungen Ana II

7.11. Satz

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \forall x,y > 0$$

Beweis: $\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \left(\int_0^\infty s^{y-1} e^{-s} ds \right) dt$

Subst.

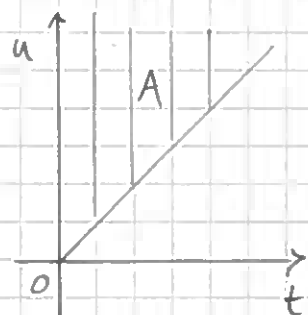
$= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \left(\int_{u=t}^\infty (u-t)^{y-1} e^{-(u-t)} du \right) dt \quad (\text{alle Fkt} \geq 0!)$

$s = u-t, ds = du$
im inneren Int.

$= \int_0^\infty t^{x-1} (u-t)^{y-1} e^{-u} d(t,u)$

Tonelli A

2-dim. Lebesgue-Maß



$= \int_0^\infty \left(\int_{t=0}^u t^{x-1} (u-t)^{y-1} dt \right) e^{-u} du$

Tonelli

$= \int_0^\infty u^{x+y-1} \left(\int_{\tau=0}^1 \tau^{x-1} (1-\tau)^{y-1} d\tau \right) e^{-u} du$

Subst. innen
 $t = u\tau, dt = u d\tau$

$B(x,y)$

$= B(x,y) \cdot \Gamma(x+y) \quad \blacksquare$

7.12. Korollar

$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$

Beweis: (1. Formel) $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

Feiner: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 \stackrel{7.11}{=} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} \stackrel{t=x^2}{=} \int_0^1 \frac{2x dx}{x \sqrt{1-x^2}} = 2 \arcsin x \Big|_0^1 = \pi \quad \blacksquare$

Bemerkung: Asymptotik von $\Gamma(x)$ für große x :

Stirlingsche Formel: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x)}{x^{x-1} e^{-x} \sqrt{2\pi x}} = 1$

Man schreibt: $f(x) \sim g(x)$ für $x \rightarrow x_0$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Damit: $\Gamma(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x$ für $x \rightarrow \infty$

Beweis: Erh. am Ende des Semesters.

Bsp 2: Doppelreihen

Gegeben: Doppelreihe $(a_{jk})_{j,k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$; ist Fkt auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

μ : Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \quad [2n \leftarrow ; A \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$A = \bigcup_{\text{abz. Bas}} \underbrace{(u, v)}_{\in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N})}$$

1. $a_{jk} \geq 0 \quad \forall j, k \Rightarrow$ Tonelli

$$\sum_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \right)$$

2. Sei $\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \right) < \infty$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}| \right) < \infty \Rightarrow$ Fubini

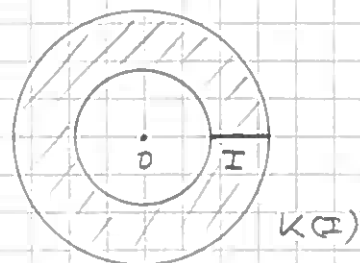
$$\sum_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} |a_{jk}| < \infty, \text{ und } \sum_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} a_{jk} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{jk} \right)$$

3. Integration rotationssymm. Fkt

Sei $I \subseteq [0, \infty)$ Intervall

$$K(I) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \in I\}, \quad \|\cdot\| = \|\cdot\|_2$$

Kugelschale



$K(I) \in \mathcal{B}_d$, da $I \in \mathcal{B}_1$ und $x \mapsto \|x\|$ (Borel-) messbar

Betrachte rotationssymm. Fkt F auf $K(I)$, d.h. $F(x) = f(\|x\|)$ mit Fkt f auf I .

Bez: $k_d := \lambda_d(\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\})$

Volumen der d -dim. Einheitskugel

Bekannt: $k_1 = 2, k_2 = 4\pi, k_3 = \frac{4\pi}{3}$ Allgemein: siehe unten!

Dann: $\lambda_d(\underbrace{\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq r\}}_{B_r(0)}) = r^d k_d$
 $\uparrow$ Aufg. G1, Satz 9

7.13. Satz (1) Sei $f: I \rightarrow [0, \infty]$ (Borel-) messbar $\Rightarrow$

$x \mapsto f(\|x\|)$ ist messbar auf $K(I)$, und

$$(*) \quad \int_{K(I)} f(\|x\|) dx = dk_d \cdot \int_I f(r) r^{d-1} dr$$

(2) Sei $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann: $x \mapsto f(\|x\|) \in \mathcal{L}^1(K(I)) \Leftrightarrow$
 $r \mapsto f(r) r^{d-1} \in \mathcal{L}^1(I)$, und in diesem Fall gilt (*)

Beweis: (2) aus (1): $\mathcal{L}^1$ -Äquivalenz aus (*) für $|f|$, Rest durch Zerlegung in Re-/Im-Teile und $\pm$ -Teile.

Zu (1): Definiere auf der Borel- σ -Alg. $\mathcal{B}(I) = \mathcal{B}_1|_I$

$$\mu(A) := \int_{K(I)} 1_A(\|x\|) dx; \quad \nu(A) := dk_d \int_I 1_A(r) r^{d-1} dr$$

μ, ν sind Maße auf $(I, \mathcal{B}(I))$: σ -additiv, denn $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$\Rightarrow 1_A = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} \xrightarrow{\text{B. Levi}} \mu(A) = \sum \mu(A_n), \text{ ebenso für } \nu.$$

$A = (a, b] \subseteq I$ ($a \leq b$) $\Rightarrow \mu(A) = \nu(A)$, denn

$$\mu(A) = \lambda_d(\overline{B_b(0)} \setminus \overline{B_a(0)}) = k_d(b^d - a^d) = dk_d \int_a^b r^{d-1} dr = \nu(A)$$

Also auch: $\mu = \nu$ auf dem Ring

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i] : n \in \mathbb{N}, (a_i, b_i] \text{ disj.} \right\} = \mathcal{R}_1|_{\mathcal{I}}$$

μ, ν σ -endlich: $\mu(\mathcal{I} \cap [0, n]) = \lambda_d(K(\mathcal{I} \cap [0, n])) < \infty$, analog für ν

End. Teil des Satzes v. Carathéodory $\Rightarrow \mu = \nu$ auf $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathcal{I})$

Nun alg. Induktion: $\mu = \nu \Rightarrow (*)$ gilt für alle $f = 1_A, A \in \mathcal{B}(\mathcal{I})$,

$\Rightarrow (*)$ gilt $\forall f \in E^+(\mathcal{I})$

Monotone Approx. liefert (1)

Bew: $f = 1_{[0,1)} \Rightarrow \lambda_d(\underbrace{B_1(0)}_{\{x \in \mathbb{R}^d: \|x\| < 1\}}) = d\kappa_d \cdot \int_0^1 r^{d-1} = \kappa_d$

$$S^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d: \|x\| = 1\} \quad \text{Einheitskugel}$$

$$\Rightarrow \lambda_d(S^{d-1}) = 0$$

(gilt ebenso bei beliebigen Radien)

Bsp: Gauß-Integral im $\mathbb{R}^d$ und Wert von κ_d

$$I := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|^2} dx$$

$$\text{Satz 7.13} \Rightarrow I = d\kappa_d \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} r^{d-1} dr \stackrel{\text{subst. } r^2 = t}{=} \left(dr = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \right)$$

$$= d\kappa_d \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{(d-1)/2 - \frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} d\kappa_d \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) = \kappa_d \cdot \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)$$

$$\text{Andererseits: } I = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-x_1^2} \cdots e^{-x_d^2} d(x_1, \dots, x_d) \stackrel{\text{Tonelli}}{=}$$

$$= \prod_{i=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x_i^2} dx_i \right) \stackrel{\text{kor. 7.12}}{=} \sqrt{\pi}^d$$

Also:

$$\boxed{\kappa_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}}$$

Stirlingsche Formel $\Rightarrow \lim_{d \rightarrow \infty} \kappa_d = 0$!!

§8 Der Transformationsatz

Substitutionsregel für Regel-Int.:

Sei $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ streng monotone C^1 -Fkt ($\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$).

$f: \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) dy$$

$$\Rightarrow \int_{[a, b]} f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)| dx = \int_{\varphi([a, b])} f(y) dy$$

Mit $g(y) = f(y) \cdot |\varphi'(\varphi^{-1}(y))|$:

$$\int_{[a, b]} g(\varphi(x)) dx = \int_{\varphi([a, b])} g(y) \cdot \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(y))|} dy$$

Nun: Verallgemeinerung ins Höherdimensionale!

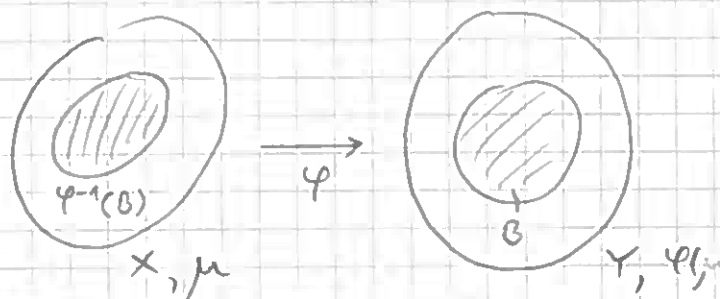
1. Integration bzgl. Bildmaßen

Erinnerung: Seien $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume, μ Maß auf $\mathcal{A}$, $\varphi: X \rightarrow Y$ messbar.

Bildmaß $\varphi(\mu)$ von μ unter φ :

$$\varphi(\mu)(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}$$

(vgl. Satz 5.4.)



8.1. Satz (1) Sei $f: Y \rightarrow [0, \infty]$ messbar $\Rightarrow$

$$\otimes \int_X (f \circ \varphi) d\mu = \int_Y f d\varphi(\mu)$$

(2) Sei $f: Y \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann:

$$f \in \mathcal{L}^1(\varphi(\mu)) \Leftrightarrow f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(\mu), \text{ und dann gilt } \otimes$$

Beweis: (2) aus (1): $\mathcal{L}^1$ -Äquiv. aus $\otimes$ für $|f|$, Rest mit üblicher Zerlegung.

Zu (1): Algebr. Induktion: Sei $f = 1_B$, $B \in \mathcal{B} \Rightarrow$

$$(1_B \circ \varphi)(x) = 1_{\varphi^{-1}(B)}(x), \text{ da } \varphi(x) \in B \Leftrightarrow x \in \varphi^{-1}(B).$$

Also: $\int_X (1_B \circ \varphi) d\mu = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \varphi(\mu)(B) = \int_Y 1_B d\varphi(\mu) \quad \checkmark$

Dann: $f \in E^+(Y)$ mit Linearität, allg. f mit monotoner Approx. ■

Denn: $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ (φ_i messbar) $\Rightarrow (\varphi_1 \circ \varphi_2)(\mu) = \varphi_1(\varphi_2(\mu))$

$\cdot c > 0 \Rightarrow \varphi(c\mu) = c \cdot \varphi(\mu)$

Frage: Falls $\mu = \lambda_d$ auf Borelmenge $X \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\varphi: X \rightarrow Y$ messbar, wie sieht dann $\varphi(\mu)$ aus?

Schon bekannt für $X = Y = \mathbb{R}^d$ (Vorles. + Übungen):

1. $\varphi(x) = x - a, a \in \mathbb{R}^d \Rightarrow \varphi(\lambda_d) = \lambda_d$ (λ_d transl. invar.)

2. $\varphi(x) = Sx, S \in O(d)$ (d.h. orthogonal) $\Rightarrow \varphi(\lambda_d) = \lambda_d$

3. $\varphi(x) = Sx, S = \begin{pmatrix} s_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s_d \end{pmatrix}, s_i > 0 \Rightarrow \varphi(\lambda_d) = \frac{1}{\det S} \cdot \lambda_d$

denn: $\varphi(\lambda_d)(A) = \lambda_d(S^{-1}(A)) \stackrel{\text{G1, B1, 9}}{=} \underbrace{\det(S^{-1})}_{\frac{1}{\det S}} \cdot \lambda_d(A)$

2. Der Transformationsatz

Ziel: Transformation von λ_d unter Diffeomorphismen.

Erinnerung: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, und

$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_d \end{pmatrix}: U \rightarrow V$ C^1 -ABB.

Differential (Ableitung) von φ in $x \in U$: $d\varphi(x): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ linear

Bzgl. Standardbasis des $\mathbb{R}^d$ wird $d\varphi(x)$ dargestellt durch

$J_\varphi(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi_1(x) & \dots & \partial_d \varphi_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \varphi_d(x) & \dots & \partial_d \varphi_d(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ Jacobi-Matrix

φ Diffeomorphismus $\Leftrightarrow \varphi$ bijektiv und $\varphi^{-1}: V \rightarrow U \subset \mathbb{R}^d$ Abb.

$\Leftrightarrow \varphi$ bij. und $\det J_{\varphi}(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$

$\uparrow$ globales Diffeom. Satz (Ana 2)

8.2. Transformationsatz

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\varphi: U \rightarrow V$ Diffeom.

(1) $f: V \rightarrow [0, \infty]$ (Borel-) messbar $\Rightarrow$

$$(*) \quad \int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) \cdot |\det J_{\varphi}(x)| dx$$

$\det J_{\varphi}$ heißt
Funktionaldet. von φ

(2) Sei $f: V \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann:

$f \in \mathcal{L}^1(V) \Leftrightarrow (f \circ \varphi) \cdot |\det J_{\varphi}| \in \mathcal{L}^1(U)$, und in diesem Fall gilt (*)

Speziell: Sei $A \in \mathcal{B}(U)$, d.h. $A \subseteq U$ messbar. $\Rightarrow \varphi(A) \in \mathcal{B}(V)$

(da φ^{-1} stetig). Setze $f = 1_{\varphi(A)}$. Dann folgt:

8.3. Korollar $A \subseteq U$ messbar $\Rightarrow$

$$\lambda_d(\varphi(A)) = \int_A |\det J_{\varphi}(x)| dx$$

$\uparrow$ Volumeneverzerrungsfaktor

(usw.): Ist $\lambda_d(A) = 0$, d.h. A (Lebesgue-) Nullmenge

$\Rightarrow \varphi(A)$ ebenfalls Nullmenge.

8.4. Korollar Sei $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\varphi(x) = Sx + b$ affin-linear

mit $S \in GL(d, \mathbb{R}) \Rightarrow J_{\varphi}(x) = S \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Damit lautet die Trafoformel (*):

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(Sx + b) = \frac{1}{|\det S|} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) dy$$

Kor. 8.3. besagt: $\varphi^{-1}(\lambda_d|_V) = |\det J_{\varphi}| \cdot \lambda_d|_U$

$\uparrow$ Dichte

Bsp 1: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$

$$P(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad r \geq 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}_+ := (0, \infty) \Rightarrow$$

$$P: \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus N \text{ differenzierbar}$$

Denn: P bij. mit

$$J_P(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\det J_P(r, \varphi) = r > 0$$

$N \subseteq \mathbb{R}^2$ Nullmenge, da messbare Teilmenge einer Geraden im $\mathbb{R}^2$
(Nach H1, Bsp. 7 gilt: $H \subseteq \mathbb{R}^d$ Hyperebene $\Rightarrow \lambda_d(H) = 0$)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty] \text{ messbar oder } f \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus N} f d(x, y) \stackrel{\text{TrafoSatz}}{=} \int_{\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d(r, \varphi)$$

N Nullm.

Anwendung: Nochmals $I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$

Trick: $I^2 \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} d(x, y) \stackrel{\substack{\text{Polarkoord.} \\ + \text{Tonelli}}}{=} \int_0^\infty \left(\int_{-\pi}^\pi e^{-r^2} \cdot r d\varphi \right) dr$

$$= 2\pi \cdot \int_0^\infty r e^{-r^2} dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \pi \Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

Bsp 2: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ (Kugelkoord.)

$$P_3(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix};$$

$$r \geq 0, \varphi, \theta \in \mathbb{R}$$

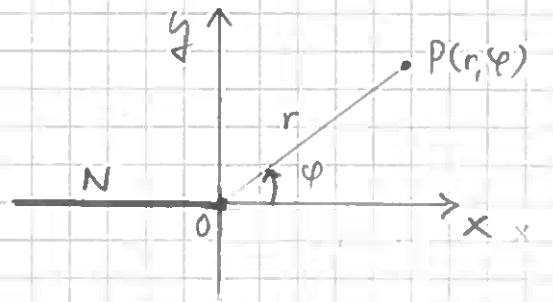
$$P_3: \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi) \xrightarrow{\text{b.j.}} \mathbb{R}^3 \setminus N_3$$

$$\text{mit } N_3 = \{(x, 0, z) : x \leq 0, z \in \mathbb{R}\} = N \times \mathbb{R}$$

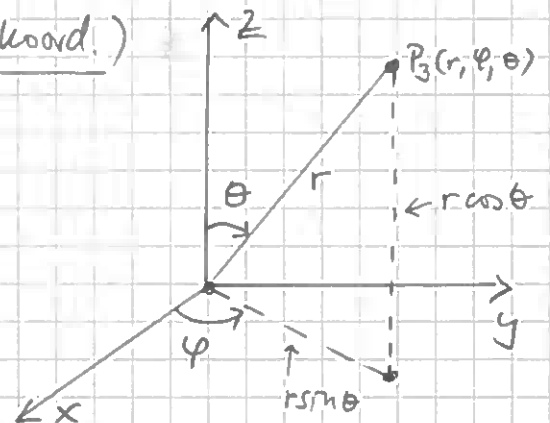
Nullmenge im $\mathbb{R}^3$

(Halbebene)

$\uparrow$
aus Bsp 1



$$N = \{(x, 0) : x \leq 0\}$$



$\det J_{P_3}(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin \theta > 0 \Rightarrow P_3$ diffeom (vgl. ÜG. Ana 2)

Dann:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{\mathbb{R}^3 \setminus N} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)} f(P_3(r, \varphi, \theta)) r^2 \sin \theta d(r, \varphi, \theta) \end{aligned}$$

Bsp 3: Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$

Rekursive Def:

$$P_d(r, \varphi, \underbrace{\theta_1, \dots, \theta_{d-2}}_{=: \theta}) := \begin{pmatrix} \sin \theta_{d-2} \cdot P_{d-1}(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{d-3}) \\ r \cos \theta_{d-2} \end{pmatrix}, r \geq 0, \varphi, \theta_i \in \mathbb{R}$$

Explizit:

$$P_d(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} \\ r \sin \varphi \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} \\ r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{d-2} \\ \vdots \\ r \cos \theta_{d-3} \sin \theta_{d-2} \\ r \cos \theta_{d-2} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Matrix:

$$J_{P_d} = \left(\begin{array}{c|c} \sin \theta_{d-2} \cdot J_{P_{d-1}} & \cos \theta_{d-2} P_{d-1} \\ \hline \cos \theta_{d-2} \quad 0 \dots 0 & -r \sin \theta_{d-2} \end{array} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{d-1}$

Entwickeln nach der letzten Zeile + Induktion $\Rightarrow$ (siehe z.B. Amann/Escher III)

$$|\det P_d(r, \varphi, \theta)| = r^{d-1} \cdot \sin \theta_1 \cdot \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{d-2} \theta_{d-2}$$

$$P_d: \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi) \times (0, \pi)^{d-2} \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus N_d \text{ diffeom;}$$

$$N_d = N \times \mathbb{R}^{d-2} \text{ (Nullmenge)}$$

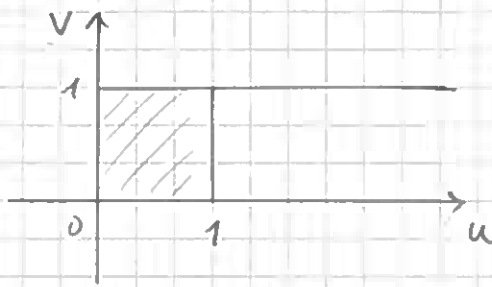
Bsp 4: Jacobi-Transformation

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} u(1-v) \\ uv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

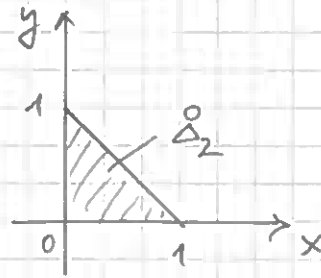
Es gilt: (i) $x+y = u$

(ii) $\varphi: \mathbb{R}_+ \times (0,1) \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ diffeom. mit $|\det J_\varphi(u,v)| = u > 0$

(UG. Analysis 2)



$\xrightarrow{\varphi}$



Ferner: $\varphi: (0,1)^2 \xrightarrow{\text{diffeom.}} \Delta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x,y > 0, x+y < 1\}$

Nützlich für Integration über Δ_2

$\exists$ d-dim. Verallgemeinerung $\leadsto$ Integration über Δ_d

(siehe Königsberger, Analysis 2)

Beweis des Trafsakes §.2.

Schritt 1: Es genügt, Kor. §.3. zu zeigen:

(i) $\lambda_d(\varphi(A)) = \int_A |\det J_\varphi(x)| dx \quad \forall$ messbaren $A \subseteq U$

Denn dies ist die Trafsformel für char. Fkt auf V . ($f = 1_{\varphi(A)}$)

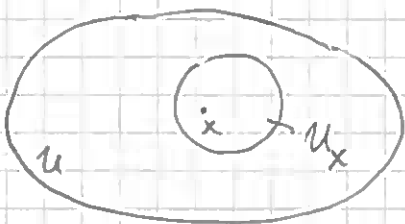
Dann alg. Induktion und übliche Zerlegungen.

Schritt 2: Es genügt zu zeigen:

(ii) $\forall x \in U \exists$ offene Umgeb. $U_x \subseteq U$ von x , so dass (i)

für die Restriktion

$\varphi|_{U_x}: U_x \rightarrow \varphi(U_x)$ gilt



(Dichtheitsargument)

Denn: Sei (ii) erfüllt. Dabei o.ä. $U_x = B_r(q)$ mit $r \in \mathbb{Q}$,

$q \in \mathbb{Q}^n$. Sei $B_1, B_2, \dots$ eine Abzählung dieser U_x .

($U_x = U_y$ für $x \neq y$ möglich!)

$\Rightarrow U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

$A \subseteq \mathbb{R}^d$ messbar $\Rightarrow A = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (disj. Vereinig.) mit

$$A_n = (A \cap B_n) \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}) \subseteq B_n$$

$$\Rightarrow \varphi(A) = \dot{\bigcup}_n \varphi(A_n)$$

$$\Rightarrow \lambda_d(\varphi(A)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_d(\varphi(A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |\det J_{\varphi}(x)| dx = \int_A |\det J_{\varphi}(x)| dx$$

(i) gilt auf B_n

Schritt 3: (i) gilt, falls $\varphi(x) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)})$ mit $\sigma \in S_d$ (Permutation der Koordinaten), denn:

$\varphi(x) = Tx$ mit $T \in O(d)$ (Permutationsmatrix) $\Rightarrow$

$$\lambda_d(\varphi(A)) = \lambda_d(A) = \int_A 1 dx = \int_A \underbrace{|\det J_{\varphi}(x)|}_{=1} dx$$

Schritt 4: (i) gilt im Fall $d=1$, $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, denn:

Betrachte auf $B(U)$ die Maße

$$\mu(A) := \lambda_1(\varphi(A)) = \int_{\varphi(A)} dy; \quad \nu(A) = \int_A |\varphi'(x)| dx$$

$A \subseteq U$ Intervall $\Rightarrow \varphi(A)$ ebenso, und $\mu(A) = \nu(A)$ nach 1-dim. Substitutionsregel (mit $f=1$)

μ, ν σ -endlich, da $\mu(A) = \nu(A) < \infty$ falls A beschr. Intervall

$B(U)$ wird erzeugt von dem Ring $\mathcal{R} = \{B \cap U : B \in \mathcal{R}_1\}$

$\mu|_{\mathcal{R}} = \nu|_{\mathcal{R}} \Rightarrow$ (Eind. Teil von Carathéodory) $\mu = \nu$.

Schritt 5: Gilt (i) für $\varphi: U \rightarrow V$ und $\psi: V \rightarrow W$,

so auch für $\psi \circ \varphi: U \rightarrow W$.

Denn: $A \in \mathcal{B}(U) \Rightarrow \lambda_d(\psi \circ \varphi(A)) =$

$$= \int_{\varphi(A)} |\det J_{\psi}(y)| dy \quad (\text{Transform für } \psi)$$

$$= \int_A |\det J_{\psi}(\varphi(x))| \cdot |\det J_{\varphi}(x)| dx \quad (\text{Transform f. } \varphi)$$

$$= \int_A |\det J_{\psi \circ \varphi}(x)| dx \quad (\text{Kettenregel})$$

Schritt 6: Beweis der lokalen Aussage (ii) durch Induktion nach d
 Ind. Anfang $d=1$ ist Schritt 4

$d-1 \rightarrow d$: Sei $d \geq 2$. Betrachte φ bei $p \in U$.

$$\det J_{\varphi}(p) \neq 0 \Rightarrow \exists i: \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(p) \neq 0$$

Nach ggf. Vorschalten einer Permutation der Koord. (Schritt 3) ist o.E.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) \neq 0$$

$$\text{Betrachte } \varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \varphi(x) := \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

$$J_{\varphi}(x) = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & * \\ \hline 0 & \text{Id}_{d-1} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right) \Rightarrow J_{\varphi}(p) \text{ invertierbar}$$

Lokale Umkehrabb. $\Rightarrow$ nach evtl. Verkleinern von U (dh. Übergang auf U_p) ist $\varphi: U \rightarrow \varphi(U)$ Diffeom. Setze

$$g := \varphi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow V$$

Dann $\varphi = g \circ \varphi$. Schritt 5 $\Rightarrow$ es genügt, (ii) für φ und φ zu beweisen

$$\text{Erste Komp. von } g: g_1(y) = \varphi_1(\varphi^{-1}(y)) = \varphi_1(\varphi^{-1}(y)) = y_1, \quad g(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Bauart von g, φ zeigt: nach ggf. Vorschalten einer Perm. der Koord. genügt es, (ii) zu beweisen für Diffeom. d. Form

$$\varphi: U \rightarrow V \text{ mit } \varphi_t(x') = x_t$$

Dabei o.E. $U = I \times U', \quad I \subseteq \mathbb{R}, \quad U' \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen

Schreibe $x \in U$ als $x = (t, x'), \quad t \in I, \quad x' \in U'$. Dann

$$\varphi(t, x') = \begin{pmatrix} t \\ \varphi_t(x') \end{pmatrix} \in V$$

$$\text{Wo } \varphi_t: U' \rightarrow V_t = \{y' \in \mathbb{R}^{d-1} : (t, y') \in V\}$$

$$J_{\varphi}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & J_{\varphi_t}(x') \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_{\varphi_t}(x') = \det J_{\varphi}(x) \neq 0 \quad \forall x' \in U'$$

Also $\varphi_t: U' \rightarrow \varphi_t(U')$ diffeom.

Also: $A \subseteq U$ messbar $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \lambda_d(\varphi(A)) &= \text{w. Fubini} \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d-1}(\underbrace{\varphi(A)_t}_{= \{\varphi_t(x') : (t, x') \in A\}}) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{d-1}(\varphi_t(A_t)) dt \quad ; \quad A_t \subseteq U' \text{ messbar}, A_t = \{x' \in U' : (t, x') \in A\} \\ &= \text{Ind. Vol.} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{A_t} |\det J_{\varphi_t}(x')| dx' \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} 1_{A_t}(x') \cdot |\det J_{\varphi_t}(x')| dx' dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 1_A(t, x') \cdot |\det J_{\varphi}(x)| dx = \int_A |\det J_{\varphi}(x)| dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

§ 9 Ergänzungen

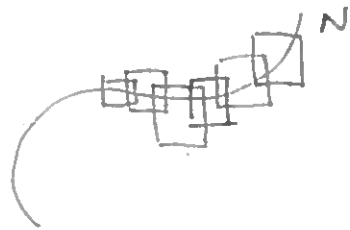
1. En Lebesgue - Nullmengen

9.1. Lemma. Für $N \in \mathcal{B}_d$ sind äquiv:

- (i) N ist (Lebesgue-) Nullmenge
- (ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists$ halboffene achsenparallele

Würfel W_k ($k \in \mathbb{N}$) mit

$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(W_k) < \infty$$



Beweis: Satz v. Carathéodory $\Rightarrow$

$$\lambda_d(N) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_d(Q_k) : Q_k \subseteq \mathbb{R}^d \text{ h.o. Quader mit } N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \right\} \quad (*)$$

o.E. Kantenlänge der Q_k rational ($\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ jedes Q_k ist endliche Vereinigung disjunkter h.o. Würfel

$\Rightarrow (*)$ gilt mit Würfeln W_k statt $Q_k \Rightarrow$ Beh.

9.2 Satz Sei $N \in \mathcal{B}_d$ Nullmenge und $f: N \rightarrow \mathbb{R}^d$ Lipschitzstg. Ist $f(N) \in \mathcal{B}_d$, so ist auch $f(N)$ Nullmenge.

Beweis: Übung

9.3. Korollar Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ C^1 -Abb.

Sei $N \subseteq U$ Nullmenge und $f(N) \in \mathcal{B}_d \Rightarrow f(N)$ Nullmenge

Beweis: Schrankeensatz (Ana 2, Satz 9.7) $\Rightarrow f$ ist L-stetig auf jedem kompakten, konvexen $K \subseteq U$.

Es existieren viele komp. Kugeln $K_n \subseteq U$: $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$

$$f|_{K_n} \text{ L-stetig} \Rightarrow f(K_n \cap N) = \underbrace{f(K_n)}_{\text{komp.}} \cap f(N) \in \mathcal{B}_d$$

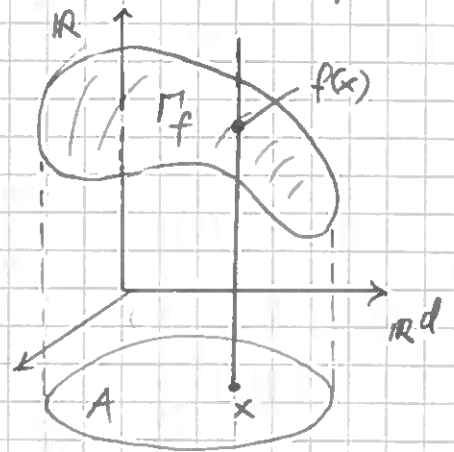
ist Nullmenge

$$\Rightarrow f(N) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n \cap N) \text{ ebenfalls}$$

9.4. Satz Sei $A \in \mathcal{B}_d$ und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ messbar $\Rightarrow$ der Graph

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$$

ist Nullmenge in $\mathbb{R}^{d+1}$



Beweis: Wie in HS, Bl. 9 zeigt man, dass

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : f(x) - y = 0\}$$

eine Borchmenge in $\mathbb{R}^{d+1}$ ist,

$$\text{Fubini} \Rightarrow \lambda_{d+1}(\Gamma_f) = \int_A \underbrace{\lambda_1(\{f(x)\})}_{=0} dx = 0 \quad \square$$

2. L^p -Räume

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum.

$$\mathcal{L}^1(\mu) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ (}\mathcal{A}\text{-) messbar, } \|f\|_1 = \int_X |f| d\mu < \infty\}$$

Allgemeiner:

Def. Sei $1 \leq p < \infty$

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ (}\mathcal{A}\text{-) messbar, } \|f\|_p < \infty\}$$

wobei $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$

Also: Für messbares $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ gilt: $f \in \mathcal{L}^p(\mu) \Leftrightarrow |f|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$

Bsp: 1. $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d, \lambda_d)$: $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d, \lambda_d) =: \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)$

2. $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, μ : Zählmaß auf $\mathcal{A}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mu) = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C} : \|a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty\}$$

$=: \ell^p(\mathbb{N})$ (Folgenraum)

Beachte: 1. $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \cdot \|f\|_p$

2. Für messbares $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}$$

Satz 6.17

Ziel: $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist C-V.R., $\|\cdot\|_p$ Halbnorm darauf.

9.5. Lemma Sei $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, d.h. $q = \frac{p}{p-1} \in (1, \infty)$
(q : zu p konjugierter Exponent) $\Rightarrow$

$$\forall x, y \geq 0 \text{ gilt } x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \quad (\text{Youngsche Ungl.})$$

Bew: o.E. $x, y \neq 0$. $\ln$ konkav auf $(0, \infty)$ (d.h. $- \ln$ konvex)

$$\text{da } \ln'' < 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \frac{1}{p}\ln x + \frac{1}{q}\ln y, \quad \exp(\dots) \rightarrow \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

9.6. Satz Sei $1 < p < \infty$

(1) Hölder-Ungleichung: Sei $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. $f, g: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar
 $\Rightarrow \int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

(2) Minkowski-Ungl. (Δ -Ungl.): $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu) \Rightarrow$
 $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

(Halten wir in Ana 2 für p -Normen auf $\mathbb{K}^n$ und Regelint.)

Beweis: (1) o.E. $\|f\|_p \neq 0, \|g\|_q \neq 0$, da sonst $f=0$ f.ü. oder $g=0$ f.ü. $\Rightarrow \int |fg| d\mu = 0$

o.E. $\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$; betrachte sonst $f' = \frac{f}{\|f\|_p}, g' = \frac{g}{\|g\|_q}$

Falls $\int_X |f'g'| d\mu \leq 1 \Rightarrow$ Hölder für f, g

Lemma 9.5. $\Rightarrow$

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q. \quad \text{Integration} \Rightarrow$$

$$\int_X |f(x)g(x)| d\mu(x) \leq \underbrace{\frac{1}{p} \int |f|^p d\mu}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{q} \int |g|^q d\mu}_{=1} = 1 \Rightarrow \text{Beh.}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X |f| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| \cdot |f+g|^{p-1} d\mu \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \\ &\stackrel{(p-1)q=p}{=} \left(\int_X |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{p-1}{p}} = \|f+g\|_p^{p-1} \Rightarrow \text{Beh.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

9.7. Korollar: $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist $\mathbb{C}$ -VR, $\|\cdot\|_p$ Halbnorm darauf

Übergang zu normierten Räumen: (vgl. $\mathcal{L}^1$ -Fall, § 6.7.)

$$\mathcal{N}(\mu) := \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ (}\mu\text{)-messbar, } f=0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}\}$$

Sei $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, dann: $f \in \mathcal{N}(\mu) \Leftrightarrow \|f\|_p = 0$

$\Rightarrow \mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{L}^p(\mu)$ ist UVR, und

$$\mathcal{N}(\mu) = \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) : \|f\|_p = 0\}$$

Identifiziere $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, falls $f = g$ μ -f.ü., d.h. $f \sim g \Leftrightarrow f - g \in \mathcal{N}(\mu)$

9.8. Korollar $1 \leq p < \infty \Rightarrow \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \mathcal{N}(\mu)$ ist

normierter Raum mit $\|[f]\|_p := \|f\|_p$, $[f] = f + \mathcal{N}(\mu)$

Beweis wie für $\mathcal{L}^1(\mu)$, Sak 6.2.2. (beachte: $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \|f\|_p = \|g\|_p$)

Schreibe f statt $[f]$.

Spezialfall $p = 2$:

$$f, g \in \mathcal{L}^2(\mu) \xrightarrow{\text{Hölder mit } p=q=2} \int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < \infty$$

$$\text{Def. } f, g \in \mathcal{L}^2(\mu) \Rightarrow \langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu$$

Es gilt: 1. $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{L}^2(\mu) \times \mathcal{L}^2(\mu) \rightarrow \mathbb{C}$ ist sesquilinear
(linear in 1. Komp., antelin. in 2. Komp.)

$$2. \langle f, f \rangle = \|f\|_2^2 \geq 0, \quad \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}$$

3. Cauchy-Schwarz-Ungl. auf $\mathcal{L}^2(\mu)$:

$$(*) \quad |\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

$$9.9. \text{ Korollar } \langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{L}^2(\mu)$ (wohldef.!).

Die Cauchy-Schwarz-Ungl. (*) überträgt sich auf $\mathcal{L}^2(\mu)$.

9.10. Satz (Riesz-Fischer) $1 \leq p < \infty \Rightarrow \mathcal{L}^p(\mu)$ ist vollständig, d.h. jede $\|\cdot\|_p$ -Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ hat einen Grenzwert in $\mathcal{L}^p(\mu)$.
 $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ist ein Banachraum.

Ferner: Sind $(f_n) \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$
 $\Rightarrow (f_n)$ hat eine Teilfolge (f_{n_k}) , die punktweise μ -f.i. gegen f konvergiert.

Beweis: Höhere Analysis

9.11. Korollar $(L^2(\mu), \|\cdot\|_2)$ ist ein Hilbertraum.

Def. Ein Hilbertraum ist ein Banachraum $(H, \|\cdot\|)$, dessen Norm von einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf H stammt, d.h.

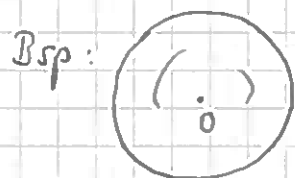
$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

L^p -Räume werden in der Analysis viel verwendet!

§10 Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

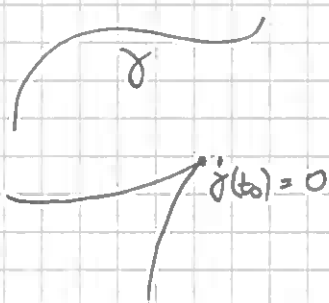
1. Charakterisierungen + Bsp

Idea: Eine k -dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ sieht lokal aus wie ein k -dim. Unterraum



$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\} \quad (\| \cdot \| = \| \cdot \|_2)$$

$(n-1)$ -dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$



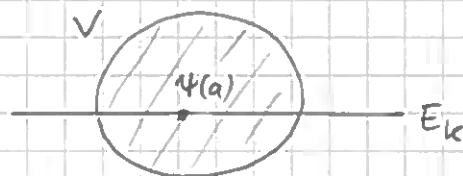
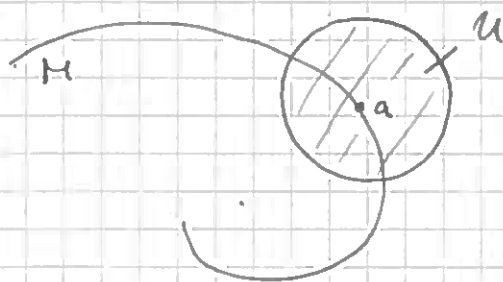
Spur einer injektiven C^1 -Kurve $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \ \forall t$ (d.h. γ regulär): 1-dim.

Untermannigfaltigkeit

Def. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. M heißt k -dimensionale (diffbare) Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ($1 \leq k \leq n$): $\Leftrightarrow$

$\forall a \in M \exists$ offene Umgeb. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a und offenes $V \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie ein C^1 -Diffeom. $\psi: U \rightarrow V$ mit

$$\psi(U \cap M) = V \cap E_k, \quad E_k = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$$



ψ : lokales „Flachmacher“ bei a

Eine $(n-1)$ -dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ heißt Hypersfläche im $\mathbb{R}^n$

Fall $k=n$: $E_n = \mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi \text{ bij.}} \psi(U) = \psi(U \cap M) \Rightarrow U \subseteq M$. Also:

Die n -dim. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$ sind die offenen $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ab jetzt stets: $1 \leq k \leq n-1$

Bsp: Abbildungs-Graphen

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^1 -Abb.

Graph von g :

$$\Gamma_g = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}^m : y = g(x)\}$$

Γ_g ist k -dim. Untermannigkeits des $\mathbb{R}^{k+m}$.

Beweis:

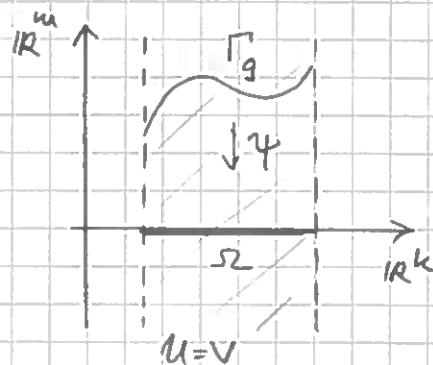
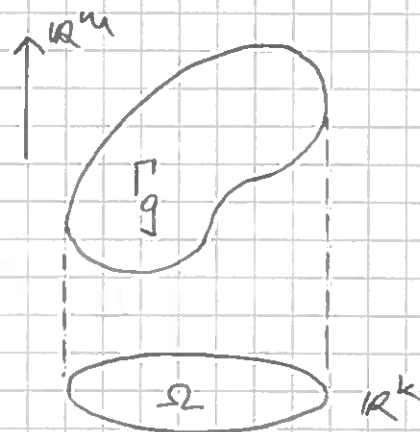
Setze $U := V := \Omega \times \mathbb{R}^m$

$$\psi: U \rightarrow V, \psi(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ y - g(x) \end{pmatrix}$$

$$\psi \text{ bij. } C^1\text{-Abb.}, \psi^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y + g(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \psi$ Differenz., und

$$\psi(U \cap \Gamma_g) = \Omega \times \{0\} = V \cap E_k \quad \blacksquare$$



Jede k -dim. Untermannigkeits des $\mathbb{R}^n$ ($k \leq n-1$) kann lokal als Graph, aber auch als Nullstellengebiet geschrieben werden:

10.1. Charakterisierungssatz

Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$ sind äquivalent:

(1) M ist k -dim. Untermannigkeits des $\mathbb{R}^n$ ($k \leq n-1$)

(2) (Darstellung als lokales Nullstellengebiet):

$\forall a \in M \exists$ offene Umgeb. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a

sowie eine C^1 -Abb. $f = (f_1, \dots, f_{n-k}): U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$

so dass (i) $M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$

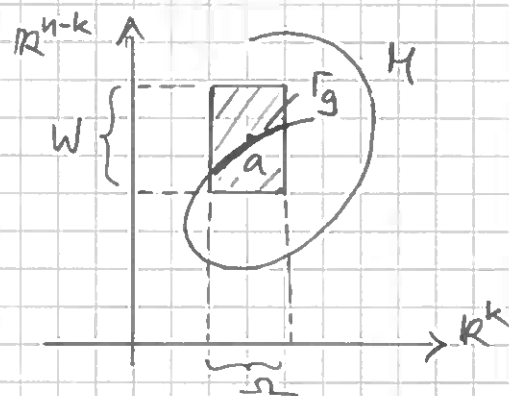
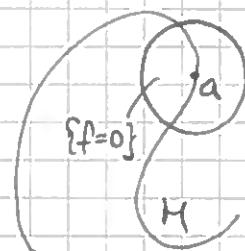
(ii) das Differential $df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$

ist surjektiv

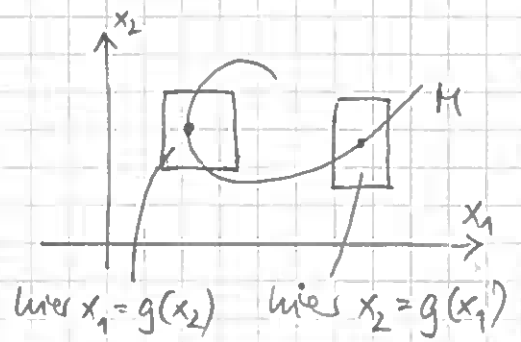
(3) (Lokale Darst. als Graph)

Sei $a \in M \Rightarrow$ nach evtl. Umnummern der Koord. gibt es eine Umgeb.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a der Form $U = \Omega \times W$,



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $W \subseteq \mathbb{R}^{n-k}$ offen, sowie eine C^1 -Abb. $g: \Omega \rightarrow W$, so dass
 $M \cap U = \Gamma_g$



Bem zu (2): 1. Schreibe $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-k} \end{pmatrix}$. Dann

$$(ii) \Leftrightarrow J_f(a) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_{n-k}(a) & \dots & \partial_n f_{n-k}(a) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-k) \times n}$$

hat (vollen) Rang $n-k$

$\Leftrightarrow \nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a)$ sind lin. unabhängig in $\mathbb{R}^n$

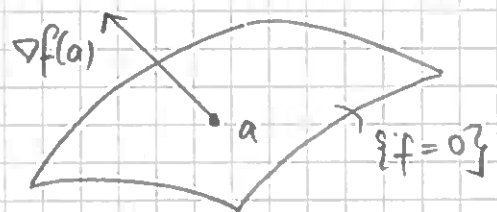
2. (1) $\Leftrightarrow$ (2) gilt auch im Fall $k=n$, mit $f: U \rightarrow \{0\} \stackrel{\text{in } \mathbb{R}^0}{=} \mathbb{R}^0$, $f \equiv 0$.

Fall $k=n-1$: Eine Hyperfläche $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ist lokal

(nahe $a \in H$) darstellbar als

NS-Gebilde eines C^1 -Fkt

$f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla f(a) \neq 0$



Beweis d. Satzes: (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $\psi: U \rightarrow V$ lokaler Flachmacher

bei $a \in M$, d.h. $\psi(U \cap M) = V \cap E_k$.

Also: $x \in U \cap M \Leftrightarrow \psi_{k+1}(x) = \dots = \psi_n(x) = 0$

Setze $f := \begin{pmatrix} \psi_{k+1} \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$, C^1 -Abb.

$\Rightarrow M \cap U = \{x \in U: f(x) = 0\}$, und $J_f(a)$ hat Rang $n-k$,
da Teilmatrix der invertibaren Matrix $J_\psi(a)$

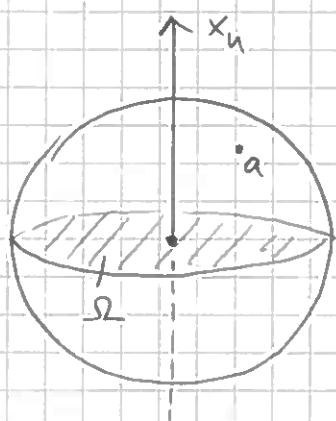
(2) $\Rightarrow$ (3): Rang $J_f(a) = n-k \Rightarrow J_f(a)$ hat invertibare
 $(n-k) \times (n-k)$ -Teilmatrix.

o.E. sei dies $\begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(a) & \dots & \partial_{x_n} f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} f_k(a) & \dots & \partial_{x_n} f_k(a) \end{pmatrix}$ (sonst Minimum der Koordinaten)

Satz über implizite Fkt $\Rightarrow$ Bew.

(3) $\Rightarrow$ (1): gemäß Abb.-Graph-Bsp

Bsp: Sphäre $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$



$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 0\} \text{ mit}$$

$$f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 \quad (C^1\text{-Fkt auf } \mathbb{R}^n)$$

$$\nabla f(x) = 2x \neq 0 \quad \forall x \in S^{n-1}$$

$\Rightarrow S^{n-1}$ ist Untermann. des $\mathbb{R}^n$ der Dim. $n-1$, also Hyperfläche

Lokale Darst. als Fkt-Graph: Sei $a \in S^{n-1}$

Falls $a_n > 0$: $\Omega := \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x'\| < 1\}$

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, g(x') = \sqrt{1 - \|x'\|^2} \quad C^1\text{-Fkt}$$

$$\Rightarrow S^{n-1} \cap (\Omega \times (0, \infty)) = \Gamma_g \quad \text{obere Halbsphäre}$$

Falls $a_n < 0$: $-\sqrt{\dots}$ statt $\sqrt{\dots}$

Falls $a_n = 0 \Rightarrow \exists a_i \neq 0$, vertausche Koordinaten.

Nun: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^1 -Abb., $m \geq 1$.

Def. (1) $x \in U$ heißt regulärer Punkt von f , falls

$$df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ surjektiv} \quad (\Leftrightarrow \text{rang } J_f(x) = m)$$

(2) $y \in \mathbb{R}^m$ heißt regulärer Wert von f , falls alle

$x \in f^{-1}(y)$ reg. Pkte von f

(y auch regulär, falls $f^{-1}(y) = \emptyset$)

Ansonsten: x singulärer Pkt von f , $y = f(x)$ sing. Wert von f

10.2. Satz vom regulären Wert. Sei f wie oben.

$y \in \mathbb{R}^n$ sei regulärer Wert von f , und $M = \underbrace{f^{-1}(y)}_{\text{"Niveaumenge" von } f} \neq \emptyset \Rightarrow$
 M ist Untermannigheit des $\mathbb{R}^n$ des Dim.
 $\dim M = n - m.$

Beweis: $df(x) \text{ surj. } \forall x \in M \Rightarrow m \leq n$

Die Beh. folgt aus Satz 10.1.(2) für $\tilde{f}(x) := f(x) - y$ $\square$

Bem. Satz v. Sard: $\{c \in \mathbb{R}^m : c \text{ Sing. Wert von } f\}$ ist λ_m -Nullmenge
 ($\rightarrow$ Elstrodt)

Bsp: $O(n) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : X^t X = I\}$ orthogonale Gruppe

Identifiziere $\mathbb{R}^{n \times n} \underset{VR}{\cong} \mathbb{R}^{n^2}$, z.B. via

$$(x_{ij}) \mapsto (x_{11}, \dots, x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n1}, \dots, x_{nn})$$

$\rightarrow O(n)$ ist Untermannigheit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ des Dim. $\frac{1}{2}n(n-1)$

Beweis: Betrachte $f(X) := X^t X$, $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$\text{Sym}(n) := \{X \in \mathbb{R}^n : X^t = X\} \underset{\uparrow}{\cong} \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ als $\mathbb{R}$ -VR

Basis: $E_{ii}, \frac{1}{2}(E_{ij} + E_{ji}), i < j$

$f: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}(n)$ C^1 -Abb.,

$$O(n) = f^{-1}(I)$$

$df(x)H = X^t H + H^t X$, denn:

$$f(X+H) = \underbrace{X^t X}_{f(X)} + \underbrace{X^t H + H^t X}_{df(X)H} + \underbrace{H^t H}_{=r(H)}, \quad \lim_{\|H\|} \frac{r(H)}{\|H\|} = 0 \text{ für bel. Matrixnorm } \|\cdot\|$$

Sei $X \in O(n) \Rightarrow df(X): \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \text{Sym}(n)$ ist surjektiv

Denn: Sei $Y \in \text{Sym}(n)$, $H = \frac{1}{2}XY$

$$\Rightarrow df(X)H = \frac{1}{2}(X^t X Y + Y^t X^t X) \underset{Y=Y^t}{=} Y$$

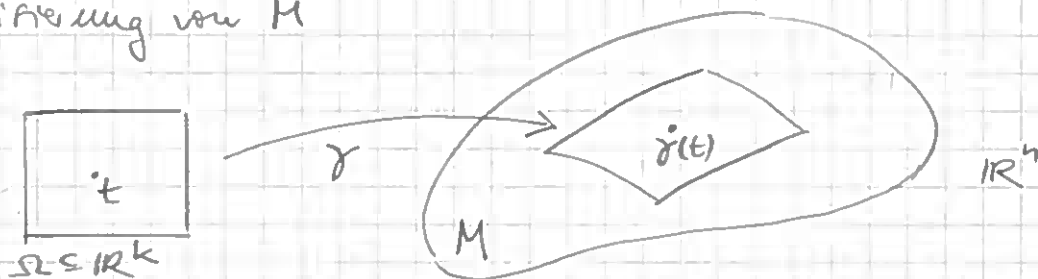
Satz v. Reg. Wert $\Rightarrow O(n)$ ist Untermannigheit von $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$\dim O(n) = n^2 - \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}n(n-1) \quad \square$$

2. Lokale Parameterdarstellungen

Sei M k -dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

Ziel: Integration über M . Dazu erforderlich: lokale Parametrisierung von M



Def. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen. Eine C^1 -Abb. $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Immersion, falls $d\gamma(t): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv $\forall t \in \Omega$, d.h., $\text{Rang } J_\gamma(t) = k \quad \forall t \in \Omega$

Eine Immersion $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Einbettung, falls $\gamma: \Omega \rightarrow \gamma(\Omega)$ Homöomorph.

Dabei sei $\gamma(\Omega)$ mit der von $\mathbb{R}^n$ induzierten Topologie versehen.

Beispiele:

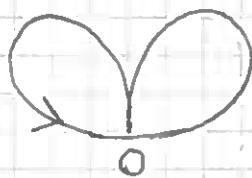
1. ($k=1$) $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -Kurve, $I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall.

γ Immersion $\Leftrightarrow \dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$

$$\gamma(t) = \sin 2t \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Spur γ kompakt!



injektive Immersion, keine Einbettung: γ^{-1} nicht stetig

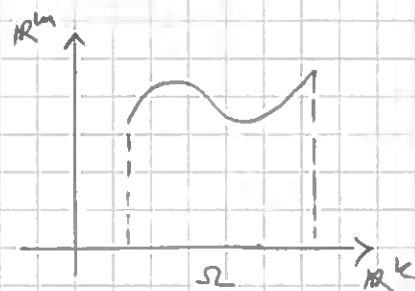


Immersion, keine Einbettung (nicht inj.)

2. Sei $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^1 -Abb., $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen
Parametrisierung des Graphen Γ_g :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$$

γ ist Einbettung, denn:



$$J_{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} I_k \\ J_g(t) \end{pmatrix} \text{ hat Rang } k \quad \forall t \in \Omega$$

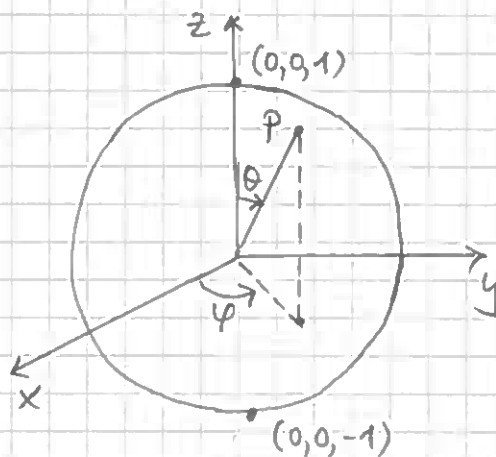
$$\gamma(\Omega) = \Gamma_g, \quad \gamma: \Omega \rightarrow \Gamma_g \text{ stetig + bij. mit } \gamma^{-1}\left(\begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}\right) = t \\ \Rightarrow \gamma^{-1} \text{ stetig.}$$

3. Parametrisierung von $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mittels Polarkoordinaten:

$$\gamma(\varphi, \theta) := \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = P_3(1, \theta, \varphi) \quad (\theta, \varphi \in \mathbb{R})$$

θ, φ : sphärische Koordinaten von P

$$J_{\gamma}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi \\ 0 & -\sin \theta \end{pmatrix}$$

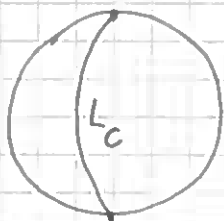


$$\Omega := \mathbb{R} \times (0, \pi) \Rightarrow \text{Rang } J_{\gamma}(\varphi, \theta) = 2 \quad (\sin \theta \neq 0)$$

$$\Rightarrow \gamma: \Omega \rightarrow S^2 \setminus \{(0,0,\pm 1)\} \text{ ist Immersion}$$

keine Einbettung (nicht injektiv)

Aber:



$$c \in \mathbb{R} \Rightarrow \gamma: (c, c+2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow S^2 \setminus L_c$$

L_c : halbes Längengreis

ist Einbettung: γ Homöom., da

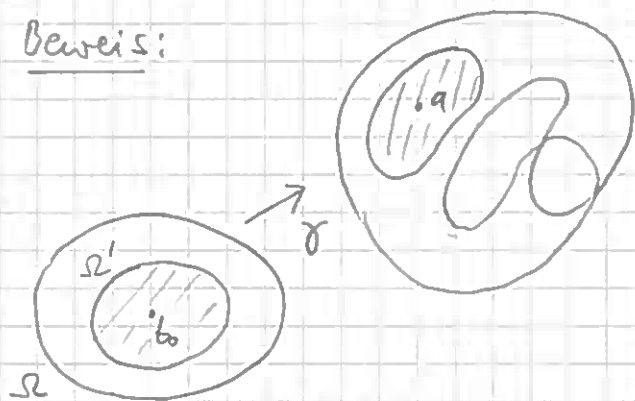
$$P_3: \mathbb{R}_+ \times (c, c+2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \text{Halbebene} \right\} \text{ durch } L_c$$

diffeomorph

10.3. Satz Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ Immersion $\Rightarrow$

zu jedem $t_0 \in \Omega$ exist. eine offene Umgeb. $\Omega' \subseteq \Omega$,
so dass $\gamma(\Omega')$ eine k -dim. Untermann. des $\mathbb{R}^n$ und
 $\gamma: \Omega' \rightarrow \gamma(\Omega')$ eine Einbettung.

Beweis:



Sei $\gamma(t_0) = a$.

Konstruiere lokalen
Flachmacher bei a !

$$\text{Rang } J_\gamma(t_0) = k \Rightarrow 0 \in \mathbb{R}, \quad J_\gamma(t_0) = \underbrace{\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}}_k \left. \begin{matrix} \\ \vdots \\ \end{matrix} \right\}_{n-k} \in \mathbb{R}^{k \times k} \text{ invertierbar}$$

Betrachte $f = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$

Satz v. d. lokalen Umkehrbarkeit $\Rightarrow \exists$ offene Umgeb. $\Omega' \subseteq \Omega$
von t_0 , so dass f Diffeom. von Ω' auf offenes $V \subseteq \mathbb{R}^k$

Def. $F: \Omega' \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow V \times \mathbb{R}^{n-k}$, $F(t, x) := \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \vdots \\ \gamma_k(t) \\ \gamma_{k+1}(t) + x_1 \\ \vdots \\ \gamma_n(t) + x_{n-k} \end{pmatrix} =: f(t)$



$$F(\Omega' \times \{0\}) = \gamma(\Omega'), \quad F \text{ bij.}, \text{ da } f: \Omega' \rightarrow V \text{ bij.}$$

$$J_F(t, x) = \left(\begin{array}{c|c} J_f(t) & 0 \\ \hline * & I_{n-k} \end{array} \right) \quad \underbrace{\quad}_{\partial_t} \quad \underbrace{\quad}_{\partial_x} \quad \text{invertierbar } \forall (t, x) \Rightarrow F \text{ Diffeom.}$$

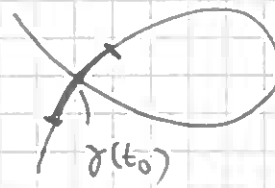
$\Rightarrow \psi = F^{-1}$ ist lok. Flachmacher bei a , aber zugleich für jedes
 $a' \in \gamma(\Omega')$ $\Rightarrow$ Beh.

Vorsicht: Ist $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ Immersion, so ist ganz $\gamma(\Omega)$ i.A. keine Untermannigfaltigkeit!

Bsp:



γ



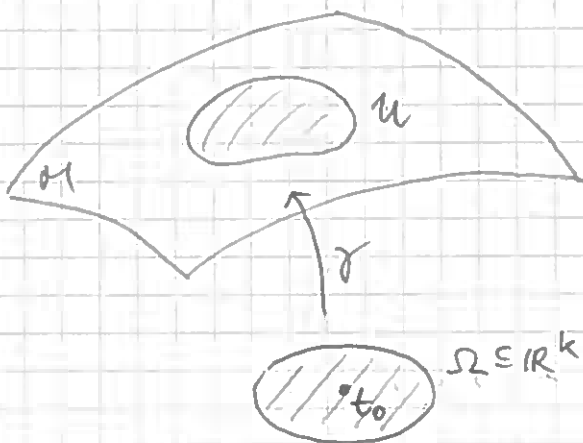
// 22.1.

10.4. Satz (Lokale Parametrisierung)

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ ($M \neq \emptyset$) ist k -dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n \iff$

Zu jedem $a \in M$ existieren

- eine in M offene Umgeb. $U \subseteq M$ von a
- eine Einbettung $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, mit $\gamma(\Omega) = U$ (M dabei mit der von $\mathbb{R}^n$ induz. Topologie versehen)



insbes: Das Bild einer Einbettung ist eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$

Beweis: " $\Rightarrow$ " stelle M in einer Umgeb. U von a als Graph Γ_g einer C^1 -Abb. dar. Die Parametrisierung von Γ_g ist eine Einbettung.

" $\Leftarrow$ " Satz 10.3. $\Rightarrow \exists$ offene Umgeb. $\Omega' \subseteq \Omega$ von $t_0 = \gamma^{-1}(a)$, so dass $\gamma(\Omega')$ k -dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$

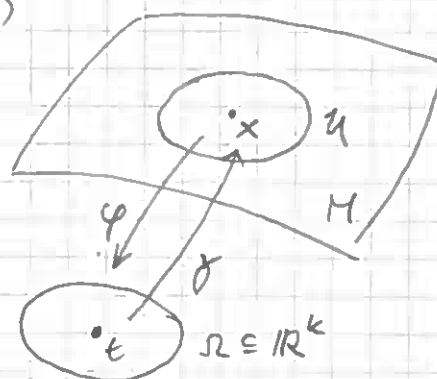
γ Einbettung $\Rightarrow \gamma(\Omega')$ offen in U , also auch offen in M , da $U \subseteq M$ offen. D.h. jedes $a \in M$ hat eine (in M) offene Umgeb., die Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist
 $\Rightarrow M$ ist Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ $\square$

Def. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ k -dim. Untermann. $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen)
 Einbettung mit $\gamma(\Omega) = U \subseteq M$ (offen)

Der Homöom.

$$\varphi := \gamma^{-1}: U \rightarrow \Omega$$

heißt dann eine Karte von M ,
 U ihr Kartengebiet.

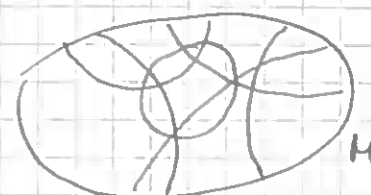


Für $x \in U$ mit $\varphi(x) = t = (t_1, \dots, t_k)$

heißen $t_1, \dots, t_k$ die Koordinaten von x bzgl. φ

Eine Kollektion $(\varphi_i)_{i \in I}$ von Karten $\varphi_i: U_i \rightarrow \Omega_i \subseteq \mathbb{R}^k$

heißt Atlas von M , falls $M = \bigcup_{i \in I} U_i$



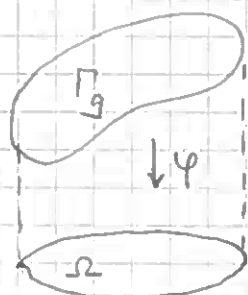
Bsp: 1. $M = \Gamma_g$ Graph einer C^1 -Abb. $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$)

$M = \gamma(\Omega)$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$ 'Einbettung'

$$\Rightarrow \varphi = \gamma^{-1}: \Gamma_g \rightarrow \Omega, \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix} \mapsto t$$

ist globale Karte von M .

Atlas: $\{\varphi\}$



2. Atlas für S^{n-1} aus nur 2 Karten:

Stereographische Projektion:

Betrachte $\psi: \mathbb{R}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$

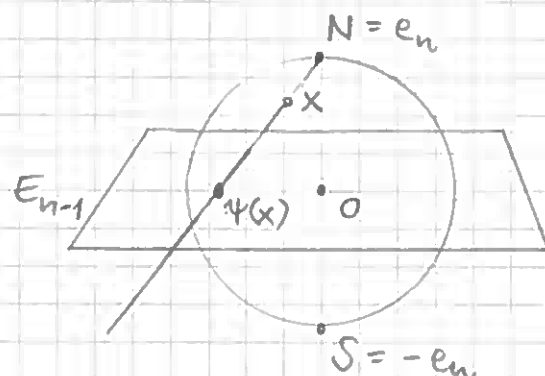
$$\psi(x) = N + \frac{2}{\|x - N\|^2} \cdot (x - N)$$

$\psi(x)$ und x liegen auf derselben Halbgelsen durch 0

$\psi: \mathbb{R}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{N\}$ diffeom. mit

$$\psi(S^{n-1} \setminus \{N\}) = E_{n-1}$$

(lokales Flachwachs!)



(Übung)

$$\varphi_N := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_N : S^{n-1} \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \text{ Homöom.}$$

φ_N : Karte für S^{n-1}

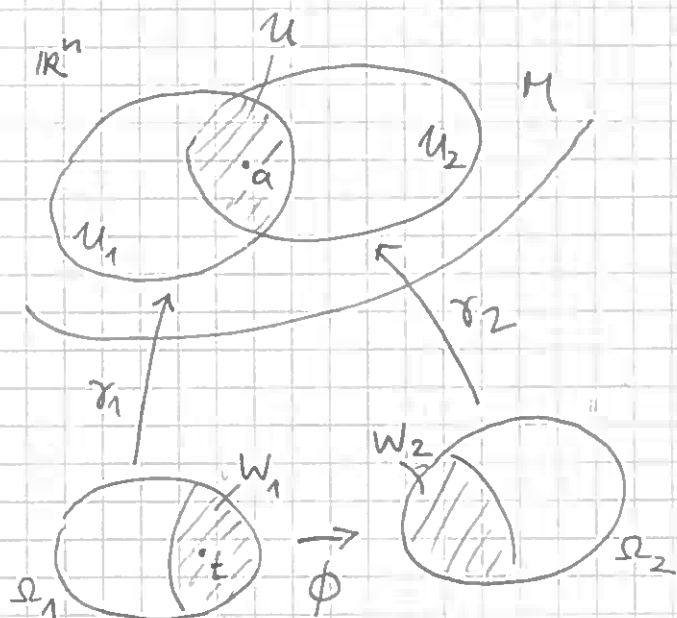
Analog: Karte φ_S mit Kartengebiet $S^{n-1} \setminus \{S\}$

$\Rightarrow \{\varphi_N, \varphi_S\}$ ist Atlas für S^{n-1}

10.5. Satz (Kartenwechsel)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ k -dim. Untermannigfaltigkeit, $\gamma_i : \Omega_i \rightarrow \mathcal{U}_i \subseteq M$ ($i=1,2$)

Einbettungen ($\Omega_i \subseteq \mathbb{R}^k$ offen) mit $\mathcal{U} := \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \neq \emptyset \Rightarrow$



$W_i := \gamma_i^{-1}(\mathcal{U}_i) \subseteq \Omega_i$ offen, und

$$\phi := \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : W_1 \rightarrow W_2$$

ist Diffeomorphismus.

Beweis: W_i offen, da γ_i^{-1} stetig

ϕ Homöom. klar

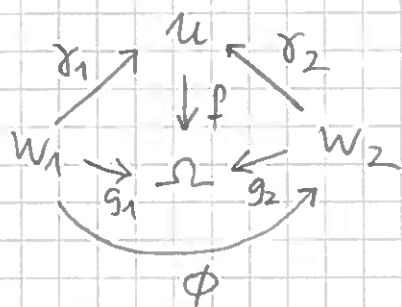
Es genügt zu zeigen:

ϕ stetig diffbar in jedem $t \in W_1$

$a := \gamma_1(t) \in \mathcal{U}$. Nach ggf. Verkleinern in $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \exists$ lok. Flachmacher für M um a : $\psi : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$ Diffeom., $\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{V}} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, mit $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}} \cap M$ und $\psi(\mathcal{U}) = \tilde{\mathcal{V}} \cap E_k$

$\stackrel{0 \in E_k}{=} \underbrace{\Omega \times \{0\}}_{\substack{\Omega \subseteq \mathbb{R}^k \text{ offen}}}$

$$f := \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{pmatrix} : \mathcal{U} \rightarrow \Omega \text{ bij., } \text{Rang } df(x) = k \quad \forall x \in \mathcal{U}$$



$$g_i := f \circ \gamma_i : W_i \rightarrow \Omega \quad C^1\text{-Abb.}$$

$$\text{Rang } dg_i = k \text{ auf } W_i$$

(Kettenregel und $\text{Rang } d\gamma_i = k$)

$\Rightarrow g_i$ Diffeom.

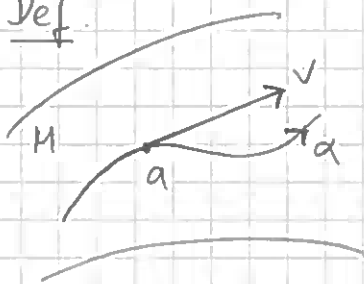
$$\phi = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 = g_2^{-1} \circ g_1 \Rightarrow$$

$\phi: W_1 \rightarrow W_2$ differenz.

2. Der Tangentialraum

$M \subseteq \mathbb{R}^n$: k -dim. Untermannigfaltigkeit

Def.



Sei $a \in M$. Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentenvektor an M in a : $\Leftrightarrow$

$\exists C^1$ -Kurve $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ ($\varepsilon > 0$) mit
 $\alpha(0) = a, \dot{\alpha}(0) = v$

$T_a M := \{v \in \mathbb{R}^n : v \text{ Tangentenvektor an } M \text{ in } a\}$
Tangentenraum an M in a

10.6. Satz (1) $T_a M$ ist k -dim. Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$

(2) Sei $\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ Einbettung mit $\gamma(\Omega) = U \subseteq M$ und
 $a = \gamma(t_0) \in U \Rightarrow$

$$T_a M = \text{Im } d\gamma(t_0) = \text{Im } J_\gamma(t_0)$$

Die Vektoren $\frac{\partial \gamma}{\partial t_i}(t_0) = d\gamma(t_0)e_i, 1 \leq i \leq k$, bilden eine
 Basis von $T_a M$ ↑
Spalten von $J_\gamma(t_0)$

(3) In einer Umgeb. $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ von a sei M lokales NS-Gebilde:

$$M \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} : f(x) = 0\},$$

$f: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ C^1 -Abb. mit $\text{Rang } df(a) = n-k \Rightarrow$

$$T_a M = \text{Ker } df(a) \quad (*)$$

Umformulierung von (*): $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n-k} \end{pmatrix}, J_f(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a)^T \\ \vdots \\ \nabla f_{n-k}(a)^T \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow T_a M = \text{Ker } J_f(a) = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp \nabla f_i(a) \forall 1 \leq i \leq n-k\}$$

Beweis: $T_1 := \text{Im } d\gamma(t_0) \subseteq \mathbb{R}^n$

γ Immersion $\Rightarrow d\gamma(t_0)$ hat Rang $k \Rightarrow \dim T_1 = k$

Ferner: $\dim \ker df(a) = n - \text{Rang } df(a) = k$

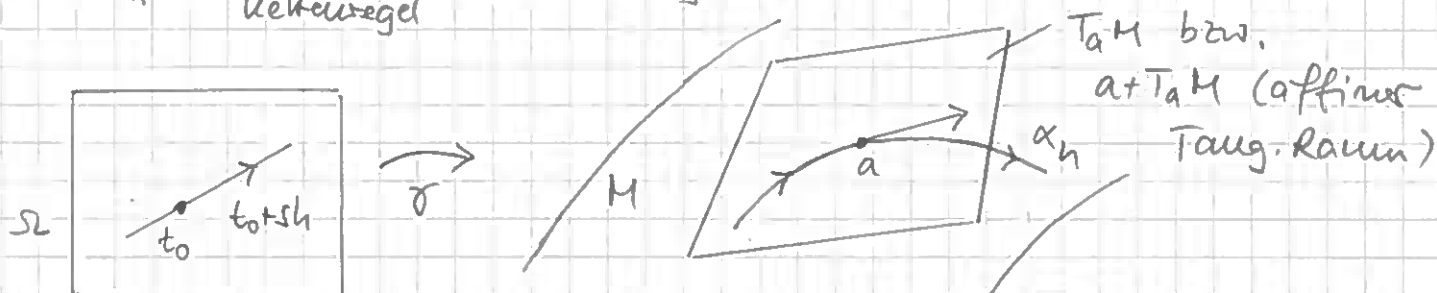
Also genügt es z. zeigen: $T_1 \stackrel{(a)}{\subseteq} T_a M \stackrel{(b)}{\subseteq} \ker df(a)$

Zu (a): Sei $h \in \mathbb{R}^k$ bel.,

$\Rightarrow \alpha_h(s) := \gamma(t_0 + sh) \in M$ für $|s|$ klein genug

$$\alpha_h(0) = \gamma(t_0) = a$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\alpha}_h(0) = \text{ Kettenregel } d\gamma(t_0)h \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im } d\gamma(t_0) \subseteq T_a M$$



Zu (b): Sei $v \in T_a M$, dann $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $\alpha(0) = a, \dot{\alpha}(0) = v$

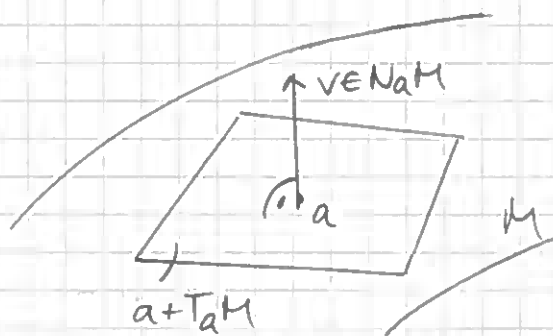
α verläuft in $M \Rightarrow f(\alpha(s)) = 0 \forall s \Rightarrow$

$$0 = df(\alpha(0)) \dot{\alpha}(0) = df(a)v \Rightarrow v \in \ker df(a) \quad \square$$

Def. Normalenraum von M in a :

$$N_a M := (T_a M)^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp T_a M\}$$

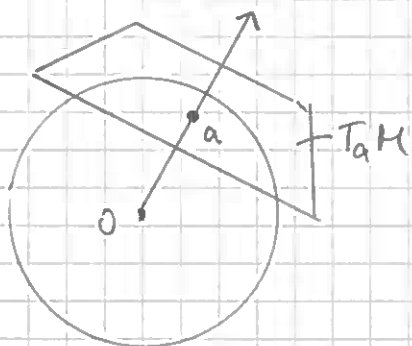
$v \in N_a M$: Normalenvektoren von M in a



Es gilt: • $\dim N_a M = n - k$

• $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_{n-k}(a)$ bilden Basis von $N_a M$

Bsp:



$$M = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1 = 0\}$$

$$\nabla f(a) = 2a$$

$$\Rightarrow T_a M = \{v \in \mathbb{R}^n : v \perp a\}$$

$$N_a M = \mathbb{R}a$$

§ 11 Integration auf Untermannigfaltigkeiten

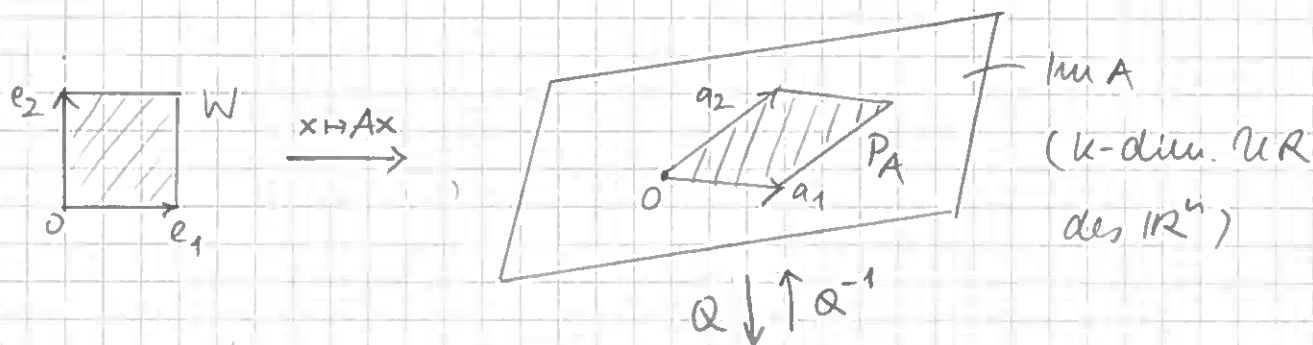
1. Lineares Fall: Volumen k -dim. Parallelotope

Betrachte lin. Abb.

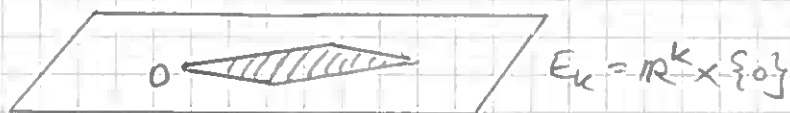
$\gamma: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $\text{Rang } A = k \leq n$
Einheitswürfel in $\mathbb{R}^k$: $W = [0, 1]^k$ (γ Einbettung!)

$Ae_i = a_i \in \mathbb{R}^n$ i -te Spalte von $A = (a_1, \dots, a_k)$

$\gamma(W) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i : 0 \leq \lambda_i \leq 1 \forall i \right\} =: P_A$
von den $a_1, \dots, a_k$ aufgespanntes
Parallelotop im $\mathbb{R}^n$



$\lambda_n(P_A) = 0$ falls $k < n$
(da P_A in Hyperebene
des $\mathbb{R}^n$ enthalten)



Ziel: Definiere k -dim. Volumen $\text{vol}_k(P_A)$ von P_A

Wähle $Q \in O(n)$ so, dass $Q^{-1}E_k = \text{Im } A$

Spalten von Q^{-1} : ONB von $\text{Im } A$, ergänzt zu ONB des $\mathbb{R}^n$

Dann: $A\mathbb{R}^k = Q^{-1}E_k$, d.h. $QA\mathbb{R}^k = E_k$

$\Pi := (\mathbb{I}_k \mid 0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ orthog. Projektion auf erste k
Komponenten

$\Rightarrow \Pi QA: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ linear + bijektiv

Plausible Forderung:

$$\text{vol}_k(P_A) = \text{vol}_k(AW) \stackrel{!}{=} \lambda_k(\underbrace{\pi Q A W}_{\text{Isometrie auf } \mathbb{R}^k})$$

Trafo sak
in $\mathbb{R}^k$

$$|\det(\pi Q A)| \cdot \underbrace{\lambda_k(W)}_{=1} \quad \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\det(\pi Q A)|^2 = \det(\pi Q A)^T (\pi Q A) = \det(A^T Q^T \underbrace{\pi^T \pi Q A}_{=QA})$$

$$= \det(A^T A)$$

Dies motiviert:

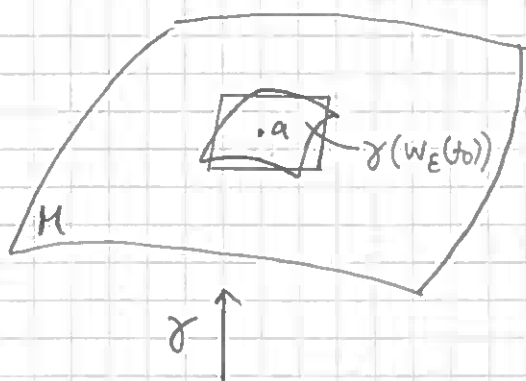
Def. (k-dim. Volumen eines k-dim. Parallelotops)

$$\text{vol}_k(P_A) := \sqrt{\det(A^T A)} \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

Falls $k=n$: $\sqrt{\det(A^T A)} = |\det A| = \lambda_n(P_A)$, siehe Übungen

2. Motivation des Oberflächenmaßes

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ k-dim. Untermannigfaltigkeit ($k \leq n-1$) mit globaler Karte, parametrisiert durch Einbettung $\gamma: \Omega \rightarrow M$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen)



Sei $t_0 \in \Omega$, $a = \gamma(t_0) \in M$

Taylorapprox. von γ nahe t_0 :

$$\gamma(t) = \underbrace{\gamma(t_0)}_{=a} + J_\gamma(t_0) \cdot (t - t_0) + o(\|t - t_0\|)$$

Idee: Zerlege Ω in kleine disjunkte Würfel $W_\epsilon(t_0) = t_0 + [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]^k$

$$\text{vol}_k(\gamma(W_\epsilon(t_0))) \sim \text{vol}_k(J_\gamma(t_0) W_\epsilon(t_0))$$

$$= \sqrt{\det(J_\gamma(t_0)^T J_\gamma(t_0))} \cdot \epsilon^k$$

Damit: $\text{vol}_k(M) \sim \int_\Omega \sqrt{\det(J_\gamma(t)^T J_\gamma(t))} dt$

↖ Lebesgue-Maß in $\mathbb{R}^k$

3. Die Gramsche Determinante

M : Unterraum des $\mathbb{R}^n$, $k = \dim M \leq n-1$

Sei $U \subseteq M$ Kartengebiet, parametrisiert durch Einbettung $\gamma: \Omega \rightarrow U$
 ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen)

Jacobi-Matrix: $J_\gamma(t) = (\partial_{t_1} \gamma(t), \dots, \partial_{t_k} \gamma(t)) \in \mathbb{R}^{n \times k}$

Def $t \in \Omega \Rightarrow G^\gamma(t) := J_\gamma(t)^T J_\gamma(t) \in \mathbb{R}^{k \times k}$ Martensensor von γ
 $g^\gamma(t) := \det G^\gamma(t)$ Gramsche Determinante von γ

Also: $G^\gamma = (g_{ij}^\gamma)_{1 \leq i, j \leq k}$ mit $g_{ij}^\gamma = \langle \partial_{t_i} \gamma, \partial_{t_j} \gamma \rangle$

Beachte: 1. $G^\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$ und $g^\gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig

2. $G^\gamma(t)$ ist symmetr. + positiv definit $\forall t \in \Omega$

denn: $v \in \mathbb{R}^k - \{0\} \Rightarrow \langle G^\gamma(t)v, v \rangle = \| \underbrace{J_\gamma(t)v}_{\text{tangentiell}} \|^2 > 0$

Also: $g^\gamma(t) > 0 \quad \forall t$

Betrachte M mit Borel- σ -Algebra $B(M)$

$$B(M) = \sigma(\{U: U \subseteq M \text{ offen}\}) = \{A \cap M: A \in B_n\}$$

Ziel: Oberflächenmaß auf $B(M)$ + Integration

4. Integration auf M mit globales Karte

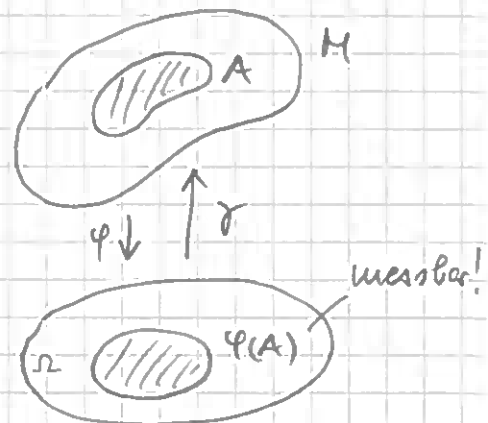
M besitze globale Karte $\varphi: M \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, $\gamma = \varphi^{-1}: \Omega \rightarrow M$
 Einbettung.

Def. Oberflächenmaß von M :

$$S_M(A) := \int_{\varphi(A)} \sqrt{g^\gamma(t)} dt, \quad A \in B(M)$$

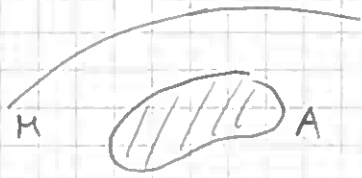
$=: \text{vol}_k(A)$ (k -dim. Volumen von A)

Lebesgue-M. in $\mathbb{R}^k$



- 11.1. Lemma 1. S_M wohldef., d.h. unabh. von der gewählten Karte
 2. S_M ist Maß auf $B(M)$

Beweis: 1. Sei $\tilde{\gamma}: \tilde{\Omega} \rightarrow M$ weitere Einbettung, $\tilde{\varphi} = \tilde{\gamma}^{-1}$



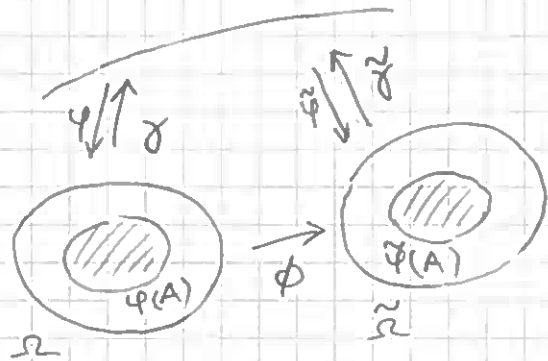
$\phi := \tilde{\gamma}^{-1} \circ \gamma: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ Diffeom.
 (Satz 10.5.)

$$\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi \Rightarrow$$

$$J_\gamma(t) = J_{\tilde{\gamma}}(\phi(t)) \cdot J_\phi(t)$$

$$\Rightarrow G^\gamma(t) = J_\phi(t)^T G^{\tilde{\gamma}}(\phi(t)) J_\phi(t)$$

$$\Rightarrow \sqrt{g^\gamma(t)} = |\det J_\phi(t)| \cdot \sqrt{g^{\tilde{\gamma}}(\phi(t))}$$



$$\text{Also: } \int_{\phi(A)} \sqrt{g^\gamma(t)} dt = \int_{\phi(A)} |\det J_\phi(t)| \cdot \sqrt{g^{\tilde{\gamma}}(\phi(t))} dt$$

$$\stackrel{\text{Trafosatz}}{=} \int_{\tilde{\varphi}(A)} \sqrt{g^{\tilde{\gamma}}(s)} ds$$

2. S_M ist das Biedmaß von $du(t) = \sqrt{g^\gamma(t)} dt$ (Maß mit Dichte)
 unter der stetigen Abb. $\gamma = \varphi^{-1}: \Omega \rightarrow M$. $\blacksquare$

11.2. Korollar (1) Sei $f: M \rightarrow [0, \infty]$ (Borel-) messbar $\rightarrow$

$$(*) \quad \underbrace{\int_M f dS_M}_{=:\int_M f ds} = \int_\Omega f(\gamma(t)) \sqrt{g^\gamma(t)} dt$$

- (2) Sei $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann: $f \in \mathcal{L}^1(M, S_M) \Leftrightarrow$
 $f \circ \gamma \in \mathcal{L}^1(\Omega, \sqrt{g^\gamma(t)} dt)$, und in diesem Fall gilt (*)

Beweis Folgt direkt aus Satz 8.1. (Integration bzgl. Biedmaßen) $\blacksquare$

$$\text{Mit } f = 1_A, A \in B(M): \quad \int_M 1_A ds = S_M(A) = \text{vol}_k(A).$$

Beachte: $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow f$ messbar.

Oft: $f = F|_M$, $F: U \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen
Dann f messbar.

Bsp 1: Kurven im $\mathbb{R}^n$ ($k=1$)

Sei $\gamma: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ reguläre C^1 -Kurve,

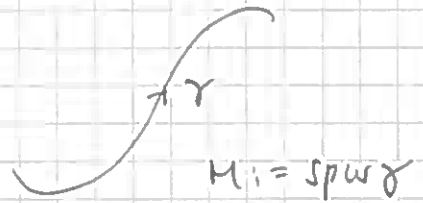
so daß γ Einbettung

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t$$

$$G^\gamma(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|^2, \quad g^\gamma(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|$$

$$\Rightarrow \int_M f dS = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (\text{Wie wird eine Fkt, nicht ein Vektorfeld integriert})$$

$$\text{vol}_1(M) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = L(\gamma) \quad (\text{Bogenlänge})$$



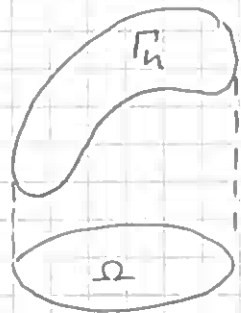
Bsp 2: Fkt-Graphen. Hier $k=n-1$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -Fkt

$$\Gamma_h = \left\{ \gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix} : t \in \Omega \right\}$$

Ist Hyperfläche

γ : (globale) Einbettung



$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ h'(t) \end{pmatrix} \Rightarrow G^\gamma = (I_{n-1} | \nabla h) \cdot \begin{pmatrix} I_{n-1} \\ (\nabla h)^T \end{pmatrix} = I_{n-1} + v v^T, \quad v = \nabla h$$

11.3. Lemma $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \det(I_n + v v^T) = 1 + \|v\|^2$

Beweis: Wähle $Q \in O(n)$ mit $Qv = \|v\| e_1$

$$\Rightarrow Q(I_n + v v^T) \underbrace{Q^T}_{= Q^{-1}} = I_n + \|v\|^2 e_1 e_1^T = \begin{pmatrix} 1 + \|v\|^2 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Beh.}$$

$$\text{Also: } \int_{\Gamma_h} f dS = \int_{\Omega} f(t, h(t)) \underbrace{\sqrt{1 + \|\nabla h(t)\|^2}}_{\sqrt{g^\gamma(t)}} dt$$

Bsp 3: $S_R^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

Kugel mit Radius $R > 0$

Einbettung für $M = S^2, L$:

" $\{(x, 0, z) \in S_R^2 : x \geq 0\}$

$$\gamma(\varphi, \theta) = R \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \varphi \in (0, 2\pi), \theta \in (0, \pi)$$

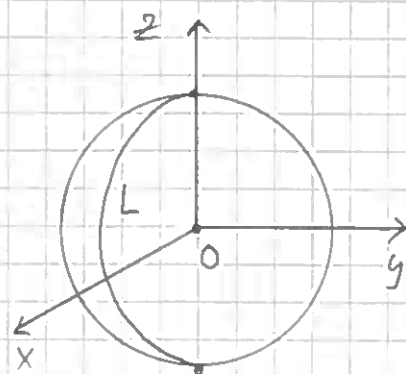
$$G\gamma(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \|\partial_\varphi \gamma\|^2 & \langle \partial_\varphi \gamma, \partial_\theta \gamma \rangle \\ \langle \partial_\varphi \gamma, \partial_\theta \gamma \rangle & \|\partial_\theta \gamma\|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g^\gamma(\varphi, \theta) = R^2 \sin \theta \quad (> 0!)$$

$$\text{Also: } \int_M f dS = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\gamma(\varphi, \theta)) \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\text{insbes: } \text{vol}_2(S^2, L) = R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta d\varphi = \underline{\underline{4\pi R^2}}$$

Noch unerschön: kein Integral über ganz S^2 !



5. Integration über allgemeine Untermannifalten

M : k -dim. Untermannifalt des $\mathbb{R}^n$, $k < n$.

Idee: Def. Maß auf M durch „Zusammensetzen“ der Maße auf Kartengebieten

11.4. Lemma (1) M besitzt einen abzählbaren Atlas $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$

(2) M kompakt $\Rightarrow M$ hat endlichen Atlas

Beweis: (1) $a \in M \xrightarrow{\text{Satz 10.4.}} \exists \text{ Karte } \varphi: U \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \text{ mit } a \in U$

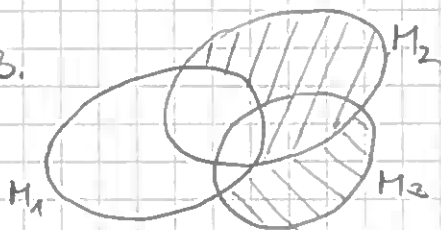
Nach evtl. Verkleinern o.E. $U = B_r(s) \cap M$, $B_r(s) \subseteq \mathbb{R}^n$ Kugel mit Radius $r \in \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{Q}^n$. Dies liefert abzählbaren Atlas.

(2) klar ■

Def. Eine disjunkte Zerlegung $M = \dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} M_i$ heißt zulässig: $\Leftrightarrow$

$M_i \in \mathcal{B}(M)$ und $M_i \subseteq U_i$, wobei U_i die Kartengebiete eines Atlas $(\varphi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von M .

z.B.



$$M_1 = U_1, M_2 = U_2 \setminus M_1$$

$$M_3 = U_3 \setminus (M_1 \cup M_2) \text{ etc.}$$

Beachte: $1_M = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{1_{M_i}}_{=0 \text{ außerhalb } U_i}$

Def. (Oberflächenmaß von M)

Sei $M = \dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} M_i$ zulässige Zerleg. zu Atlas $(\varphi_i, U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von M

$$\underbrace{S_M(A)}_{=: \text{vol}_k(A)} := \sum_{i=1}^{\infty} S_{U_i}(A \cap M_i), \quad A \in \mathcal{B}(M)$$

11.5. Lemma. 1. S_M ist wohldef. (unabh. von der zulässigen Zerleg + Atlas dazu)

2. S_M ist Maß auf M .

Beweis: 1. Sei $M = \bigcup_j N_j$ weitere zul. Zerleg. zu Atlas (φ_j, ν_j)

$$A \in \mathcal{B}(M) \Rightarrow \sum_j S_{\nu_j}(A \cap N_j) = \sum_j \sum_i \underbrace{S_{\nu_j}(A \cap H_i \cap N_j)}_{\text{ersetzbar durch } S_{\mu_i}!}$$

$$\text{Doppelreihens. } \sum_i \sum_j S_{\mu_i}(A \cap H_i \cap N_j) = \sum_i S_{\mu_i}(A \cap H_i)$$

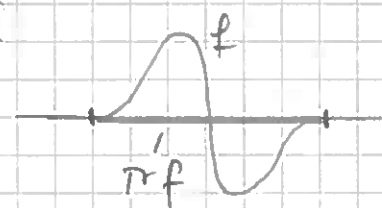
2. S_μ σ -add.: ähnlich. $\blacksquare$

Integration über M reduziert sich auf Integration über Kartengebiete:

Def. Sei X top. Raum, $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ Fkt.

$$\text{Tr } f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \leftarrow \text{Abschluss in } X$$

Träger von f



$$f = 0 \text{ auf } X \setminus \text{Tr } f$$

11.6. Korollar Sei $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ zulässig.

(1) $f: M \rightarrow [0, \infty]$ messbar $\Rightarrow$

$$(*) \underbrace{\int_M f dS_M}_{=: \int_M f dS} = \int_M \left(\sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{1_{M_i} f}_{\text{hat Träger in } M_i} \right) dS \stackrel{\text{B. Levi}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{M_i} (1_{M_i} f) dS$$

(2) Sei $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann: f integrierbar über M $\Leftrightarrow$

$$\int_M |f| dS < \infty \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{M_i} 1_{M_i} |f| dS < \infty, \text{ und dann gilt } (*) \text{ (mit Lebesgue statt B. Levi)}$$

6. Erkennen von Nullmengen in M

$$N \subseteq M \text{ Nullmenge in } M \Leftrightarrow N \in \mathcal{B}(M) \text{ mit } S_M(N) = 0$$

11.7. Lemma Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ offen, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -Abb., $k < n$

$$\Rightarrow f(\Omega) \in B_n \text{ mit } \lambda_n(f(\Omega)) = 0$$

Beweis: $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ mit abzählbar vielen komp. $K_j \subseteq \Omega$

(denn: $a \in \Omega \rightarrow \exists$ Kugel $\overline{B_r}(a)$ ($r \in \mathbb{Q}, a \in \mathbb{Q}^k$) mit $a \in \overline{B_r}(a) \subseteq \Omega$)

$$\Rightarrow f(\Omega) \subseteq \underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} f(K_j)}_{\text{Komp.}} \in B_n$$

Betrachte $h: \Omega \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h(x,y) := f(x)$ C^1 -Abb.

$\Rightarrow f(\Omega) = h(\underbrace{\Omega \times \{0\}}_{\lambda_n\text{-Nullm.}}) \Rightarrow \lambda_n(f(\Omega)) = 0$ nach Kor. 9.3 ■

11.8. Korollar Sei M k -dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $k < n$
 $\Rightarrow M \in \mathcal{B}_n$ mit $\lambda_n(M) = 0$.

Denn: M hat abzählbaren Atlas (φ_i) , $\gamma_i = \varphi_i^{-1}: \underbrace{\Omega_i}_{\subset \mathbb{R}^k} \rightarrow \Omega_i \subset \mathbb{R}^n$
 C^1 -Abb. $\Rightarrow \lambda_n(\Omega_i) = \lambda_n(\gamma_i(\Omega_i)) = 0 \quad \forall i$ ■

11.9. Satz Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k -dim. Untermannigfaltigkeit. Sei $N \subset M$ l -dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit $l < k \Rightarrow N$ ist Nullmenge in M .

Beweis: Kor. 11.8. $\Rightarrow N \in \mathcal{B}_n \xrightarrow{N \subset M} N \in \mathcal{B}(M)$

Es genügt z.z.: Für jedes Kartengebiet $U \subset M$ ist

$$S_M(\underbrace{N \cap U}_{=: N_0}) = 0.$$

Sei $\varphi: U \rightarrow \Omega$ Karte, $\gamma = \varphi^{-1}$

o.E. ist N_0 Graph einer C^1 -Abb.

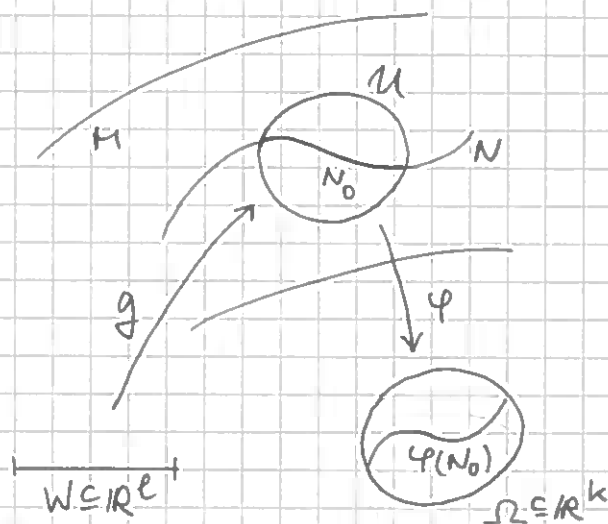
$g: W \rightarrow \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^l$ offen

$\Rightarrow \varphi(N_0) = (\varphi \circ g)(W)$,

$\varphi \circ g: W \rightarrow \mathbb{R}^k$ C^1 -Abb.

$\Rightarrow \varphi(N_0)$ ist λ_k -Nullm.
 Lemma 11.7.

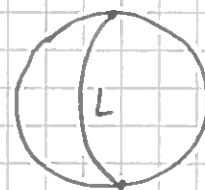
$$\Rightarrow S_M(N_0) = \int_{\varphi(N_0)} \sqrt{g^{\sharp}(t)} dt = 0 \quad \blacksquare$$



Nützlich: Oft läßt sich M bis auf eine Nullmenge N durch eine einzige Karte φ parametrisieren.

Dann: $\int_M f dS = \int_{M \setminus N} f dS =$ mittels φ berechenbar.

Bsp: $M = S_R^2$, $L = \{(x, 0, z) \in S_R^2 : x \geq 0\}$



L ist Nullmenge in S_R^2 , da abgeschl.

($\Rightarrow$ messbar) und enthalten in 1-dim.

Unterkupheit des $\mathbb{R}^3$ (weiterhin $N = \{(x, 0, z) : x^2 + z^2 = 1\}$)

$$\Rightarrow \text{vol}_2(S_R^2) = \text{vol}_2(S_R^2 \setminus L) \stackrel{\text{Bsp 3 fr\u00fcher}}{=} 4\pi R^2$$

7. Integration auf der S^{n-1}

Polarkoord. abb. in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$; $P = P_n$

mit

$$P(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin \theta_{n-2} P_{n-1}(r, \varphi, \theta_1, \dots, \theta_{n-3}) \\ r \cos \theta_{n-2} \end{pmatrix}$$

" $(\theta_1, \dots, \theta_{n-2})$

$$\Omega_n = (0, 2\pi) \times (0, \pi)^{n-2} \Rightarrow P: \mathbb{R}_+ \times \Omega_n \xrightarrow{\text{diff}} \mathbb{R}^n \text{ - Halbebene}$$

$$\Rightarrow \gamma(\varphi, \theta) := P(1, \varphi, \theta): \Omega_n \rightarrow S^{n-1} \text{ - Einbettung}$$

$$L = \{x \in S^{n-1} : x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$$

" L ist abgeschlossene Teilm. von $\{x \in S^{n-1} : x_2 = 0\} \cong_{\text{diff}} S^{n-2}$

$\Rightarrow$ L ist Nullmenge in S^{n-1} ,
Satz 11.9.

$$P(r, \varphi, \theta) = r \gamma(\varphi, \theta) \Rightarrow J_P = (r, r J_\gamma) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\Rightarrow J_P^T J_P = \begin{pmatrix} \|\gamma\|^2 & r \gamma^T J_\gamma \\ r J_\gamma^T \gamma & r^2 J_\gamma^T J_\gamma \end{pmatrix}$$

Auf Ω_n gilt $\|\gamma\|^2 = 1$, dh. $f \circ \gamma = 1$ mit $f(x) = \|x\|^2$

$$J_f(x) = 2x^T \xrightarrow{\text{kettenr.}} 0 = 2\gamma^T J_\gamma \text{ auf } \Omega_n$$

$$\Rightarrow J_P^T J_P = \begin{pmatrix} \|\gamma\|^2 & 0 \\ 0 & r^2 J_\gamma^T J_\gamma \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{g^\gamma(\varphi, \theta)} \stackrel{r=1}{=} |\det J_P(1, \varphi, \theta)|$$

$$|\det J_P(r, \varphi, \theta)| = r^{n-1} \sin \theta_1 \sin^2 \theta_2 \dots \sin^{n-1} \theta_{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{g^r(\varphi, \theta)} = \sin \theta_1 \cdot \sin^2 \theta_2 \cdot \dots \cdot \sin^{n-2} \theta_{n-2} =: C_n(\theta)$$

$$\text{Also: } \int_{S^{n-1}} f dS = \int_{S^{n-1}, L} f dS = \int_{\Omega_n} f(\gamma(\varphi, \theta)) C_n(\theta) d(\varphi, \theta)$$

Dies gilt auch für $n=2$ (d.h. die S^1), wenn man setzt: $\gamma(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ statt $\gamma(\varphi, \theta)$, $\Omega_2 = (0, 2\pi)$, $C_2(\theta) := 1$

$$\int_{S^1} f dS = \int_0^{2\pi} f(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi.$$

11.11. Satz Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2 \Rightarrow$ für fast alle $r \in (0, \infty)$ ist f über die Sphäre S_r^{n-1} int. bar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{S_r^{n-1}} f dS \right) dr = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} f(r\xi) dS(\xi) \right) r^{n-1} dr$$

Beweis: Transform mit $P = P_w \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \int_{\mathbb{R}_+ \times \Omega_n} f(P(r, \varphi, \theta)) r^{n-1} \sqrt{g^r(\varphi, \theta)} d(r, \varphi, \theta)$$

Fubini $\Rightarrow$ für fast alle $r > 0$ exist.

$$I_r := \int_{\Omega_n} \underbrace{f(P(r, \varphi, \theta)) r^{n-1} \sqrt{g^r}}_{= r \gamma(\varphi, \theta)} d(\varphi, \theta), \text{ und}$$

$$\int f dx = \int_0^\infty I_r dr.$$

$$\text{Aber: } I_r = r^{n-1} \int_{S^{n-1}} f(r\xi) dS(\xi) \stackrel{\text{üB.}}{=} \int_{S_r^{n-1}} dS \quad \blacksquare$$

11.12. Korollar Oberfläche der S^{n-1} :

$$\boxed{\omega_n := \text{vol}_{n-1}(S^{n-1}) = n K_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}}$$

K_n : Volumen der n -dim Einheitskugel

Beweis: $f = 1_{B_1(0)} \Rightarrow$

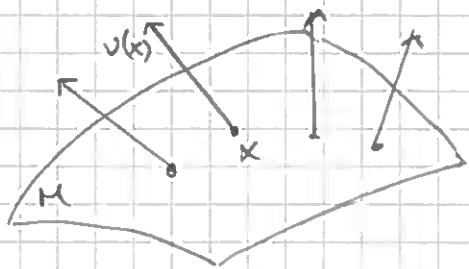
$$K_n = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{S^{n-1}} dS(\xi) \right)}_{\omega_n} r^{n-1} dr = \frac{1}{n} \omega_n \quad \blacksquare$$

§ 12 Der Gaußsche Integralsatz

1. Orientierung

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Hyperfläche

$x \in M \Rightarrow N_x M$ Normalenraum in x . $\dim N_x M = 1$

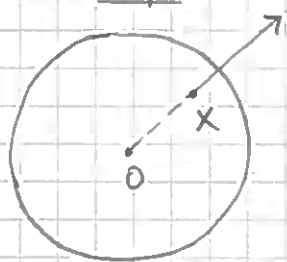


Def. Ein Einheitsnormalenfeld (ENF) auf M ist ein stetiges Vektorfeld $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$, so dass $\forall x \in M$ gilt:

(i) $v(x) \in N_x M$

(ii) $\|v(x)\| = 1$

12.1. Bsp:



(1) $M = S^{n-1} \Rightarrow v(x) = x$ ist ENF
(ebenso $v(x) = -x$)

(2) $M = \{x \in U : f(x) = 0\}$ ($U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen)
globales NS-Gebiete mit
 $f \in C^1(U)$, $\nabla f \neq 0$ auf M

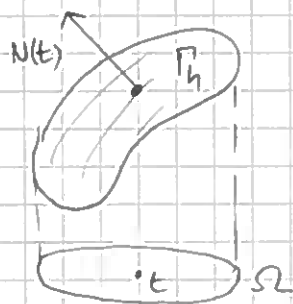
$\Rightarrow v(x) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ ist ENF.; $-v$ ebenso.

12.2. Lemma Sei M zusammenhängend $\Rightarrow$

M besitzt entweder kein oder genau 2 ENF $v, -v$

Beweis: v ENF $\Rightarrow -v$ ENF klar. Sei $\tilde{v}$ weiteres ENF
 $\Rightarrow g(x) := \langle v(x), \tilde{v}(x) \rangle$ stetig auf M . $\tilde{v}(x) = \pm v(x) \forall x$
 $\Rightarrow g(x) = \pm 1 \forall x$. M zthg d. $\Rightarrow g = +1$ oder $g = -1$
 $\Rightarrow \tilde{v} = v$ oder $\tilde{v} = -v$ ■

12.3. Bsp: (1) Fol-Grafen



$$M = \{ \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix} : t \in \Omega \}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \text{ offen,}$$

$$h: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad C^1\text{-Fkt}$$

$$f(t, x) := x - h(t), \quad t \in \Omega, x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow M$ ist globales NS-Gebilde von f

$$df(t, x) = \begin{pmatrix} -\nabla h(t) \\ 1 \end{pmatrix} =: N(t) \quad (\neq 0 \quad \forall t, x)$$

$$\Rightarrow v \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix} = \frac{N(t)}{\|N(t)\|} \quad \text{ist ENF an } M$$

(2) Hyperflächen im $\mathbb{R}^3$: Sei $H \subseteq \mathbb{R}^3$ Hyperfläche,

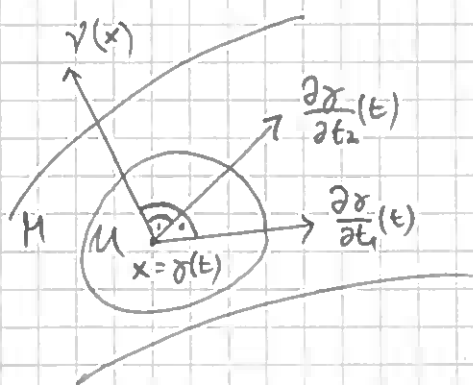
$\varphi: U \rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ Karte, $\gamma = \varphi^{-1}$. Sei $x \in U, x = \gamma(t), t \in \Omega$

$$\Rightarrow \text{§ 10.2, } T_x H = \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial t_1}(t), \frac{\partial \gamma}{\partial t_2}(t) \right\rangle \leftarrow \text{lin. Hülle}$$

$N_x H$: Rüttels Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$:

$$v, w \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$v \times w \in \langle v, w \rangle^\perp, \quad v \times w = 0 \Leftrightarrow v, w \text{ lin. abhängig (LA!)}$$



Also: Auf U ist

$$v(x) = \frac{N(x)}{\|N(x)\|} \quad \text{mit}$$

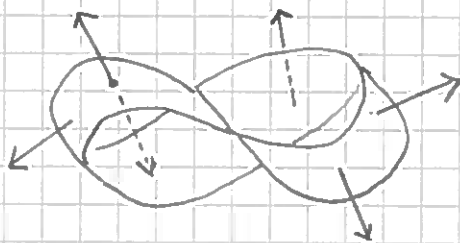
$$N(\gamma(t)) = \frac{\partial \gamma}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial \gamma}{\partial t_2}(t)$$

ein ENF

Def. Eine Hyperfläche $H \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt orientierbar, falls H ein ENF besitzt

Bsp einer nicht orientierbaren Hyperfläche (im $\mathbb{R}^3$):

Möbius-Band:



Def. Sei (M, ν) orientierte Hyperfläche. Ein Vektorfeld

$F: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt integrierbar über M : $\Leftrightarrow$

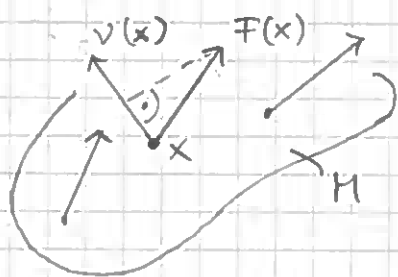
$x \mapsto \langle F(x), \nu(x) \rangle \in \mathcal{L}^1(M, S_M)$, d.h. int. bar über M

Man setzt dann:

$$\int_{(M, \nu)} F d\vec{S} := \int_M \langle F, \nu \rangle dS$$

Kurz: $\int_M F d\vec{S}$, falls klar ist, welches ν man nimmt.

Interpretation: F Strömungsfeld



$\langle F(x), \nu(x) \rangle$: Anteil von F , der M in x durchströmt.

$\int_M F d\vec{S}$: Gesamtfluß von F durch M

Fortsetzung von Bsp 12.3(1): Formel für Int. über Graphen (§11)

$$\Rightarrow \int_{(M, \nu)} F d\vec{S} = \int_{\Omega} \langle F(\begin{smallmatrix} t \\ h(t) \end{smallmatrix}), \nu(\begin{smallmatrix} t \\ h(t) \end{smallmatrix}) \rangle \sqrt{1 + \|\nabla h(t)\|^2} dt = \int_{\Omega} \langle F(\begin{smallmatrix} t \\ h(t) \end{smallmatrix}), N(t) \rangle dt$$

2. Kompakta mit glattem Rand

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, ∂K : Rand von K (auch kompakt)

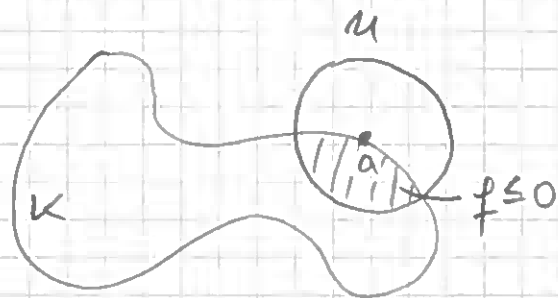
12.4. Def K hat glatten Rand: $\Leftrightarrow$

$\forall a \in \partial K$ offene Umgeb. $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von a

sowie C^1 -Fkt $\exists f: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(i) $K \cap U = \{x \in U: f(x) \leq 0\}$

(ii) $\nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$



12.5. Lemma. In obiger Situation gilt:

$$\partial K \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$$

Inshes: ∂K ist Hyperfläche im $\mathbb{R}^n$

Beweis: " $\subseteq$ " sei $x \in U$ mit $f(x) < 0$, z. zeigen: $x \notin \partial K$.

Dann: f stetig $\Rightarrow \exists$ offene Umgeb. $V \subseteq U$ von x : $f(x) < 0$ auf V
 $\Rightarrow V \subseteq K \Rightarrow$ Beh.

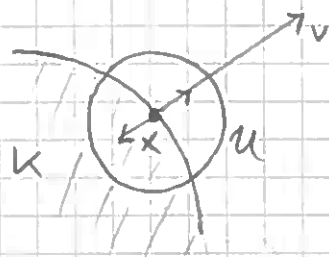
" $\supseteq$ " sei $x \in U$ mit $f(x) = 0$. $v := \nabla f(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\partial_v f(x)} = \langle \nabla f(x), v \rangle = \|v\|^2 > 0$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tv)}{t} \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\exists \varepsilon > 0: f(x+tv) \begin{cases} > 0 & \forall t \in (0, \varepsilon) \\ < 0 & \forall t \in (-\varepsilon, 0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+tv \begin{cases} \notin K & \forall t \in (0, \varepsilon) \\ \in K & \forall t \in (-\varepsilon, 0) \end{cases} \Rightarrow x \in \partial K$$



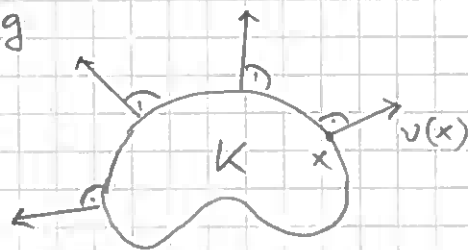
12.6. Korollar K Komp. mit glattem Rand $\Rightarrow$

∂K besitzt ein eindeutiges ENF ν , so dass $\forall x \in \partial K$ gilt:

(*) $x+tv(x) \notin K$ sofern $t > 0$ klein genug

Mit U, f wie in Def. 12.4. gilt:

$$\nu(x) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} \quad \forall x \in \partial K \cap U$$



ν : äußeres ENF an K (wegen (*) unabh. von U, f !)

Konvention: $\int_{\partial K} F d\vec{S} := \int_{(\partial K, \nu)} F d\vec{S}$ mit äußerem ENF ν

3. Der Gaußsche Integralsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -Vektorfeld, $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$

Divergenz von F: $\operatorname{div} F(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i(x)}{\partial x_i}$

$\operatorname{div} F: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

12.7. Satz von Gauß (1813)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ Kompaktum mit glattem Rand.

Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^1 -Vektorfeld in einer offenen Umgeb. U von $K \Rightarrow$

$$\boxed{\int_K \operatorname{div} F dx = \int_{\partial K} F d\vec{S}}$$

(bzgl. äußerem ENF am K)

Physikalische Interpretation:

$$\underbrace{\int_{\partial K} F d\vec{S}}_{\text{Gesamtfluß von } F \text{ durch } \partial K} = \int_K \underbrace{\operatorname{div} F dx}_{\text{mißt Stärke der Quellen und Senken von } F \text{ in } K.}$$

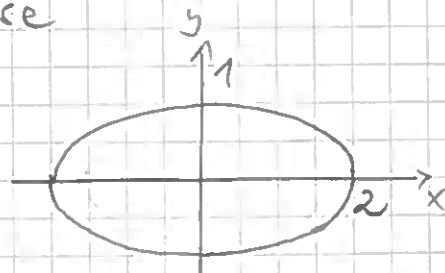
Satz v. Gauß ist ein Erhaltungssatz; wichtig u.a. in Elektrodynamik, PDG, Fluidodynamik.

Bsp ($n=2$) $K = \{(x,y): \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$ Ellipse

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x,y) := \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leq 0\}$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} x/2 \\ 2y \end{pmatrix} \neq 0 \text{ auf } \partial K$$

$\Rightarrow K$ komp. (klar) mit glattem Rand



$$F(x,y) := \begin{pmatrix} x^2 y \\ y^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\partial K} F d\vec{S} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_K \operatorname{div} F d(x,y) = \int_K (2xy + 3y^2) d(x,y)$$

$$\int_K xy d(x,y) = 0, \text{ da } K \text{ invar. unter } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \text{ (+ Trafosatz)}$$

$$\int_K y^2 d(x,y) \stackrel{\text{Trafo } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi \\ \eta \end{pmatrix}}{=} \int_{\xi^2 + \eta^2 \leq 1} \eta^2 \cdot 2 d(\xi, \eta) \stackrel{\text{Polarkoord.}}{=} 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr d\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{\partial K} F d\vec{S} = \frac{3\pi}{2}$$

Bem: Der Satz v. Gauß gilt auch noch, falls ∂K nicht glatt ist, sondern niederdim. Singularitäten (Ecken, Kanten) hat.

Siehe Königsberger, Analysis 2.

4. Vorbereitungen für den Beweis d. Satzes v. Gauß

(I.) Teilung des Eins

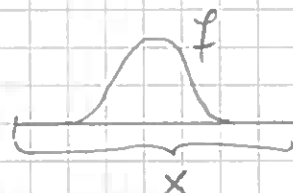
(Wichtiges Hilfsmittel, um globale Aussagen auf lokale zu reduzieren)

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen

$$C(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$$

$$C_c(X) := \{f \in C(X) : \text{Tr } f \text{ kompakt}\}$$

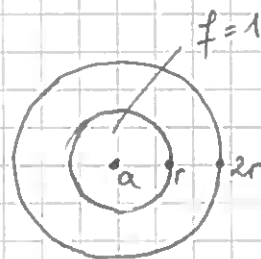
$$\stackrel{''}{=} \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \uparrow \text{ Abschl. in } X$$



$$C_c^k(X) = \{f \in C^k(X) : \text{Tr } f \text{ komp.}\}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

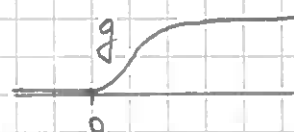
Bsp: Gesucht $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\text{Tr } f = \overline{B_{2r}(a)}, \quad f = 1 \text{ auf } B_r(a) \quad (a \in \mathbb{R}^n)$$



$$\text{Konstruktion: } g(t) := \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

$$g \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad (\text{Analysis 2})$$



$$h(t) := \frac{g(4-t)}{g(4-t) + g(t-1)} \Rightarrow h \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad 0 \leq h \leq 1, \quad h(t) = \begin{cases} 1, & t \leq 1 \\ 0, & t \geq 4 \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ setze

$$f(x) := h\left(\frac{1}{2}\|x-a\|^2\right) \Rightarrow f \text{ wie gefordert}$$

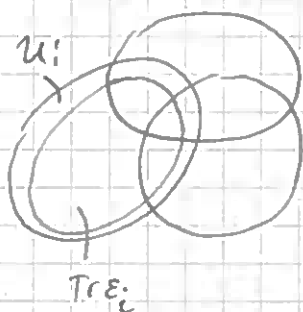
12.9. Satz C^∞ -Teilung des Eins (für Kompakta)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ endliche offene Überdeckung von K , d.h. $U_i \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ (I endlich)

$\Rightarrow$ Folge $(\varepsilon_i)_{i \in I} \subseteq C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\text{Tr } \varepsilon_i \subseteq U_i, \quad 0 \leq \varepsilon_i \leq 1, \quad \sum_{i \in I} \varepsilon_i(x) = 1 \quad \forall x \in K$$

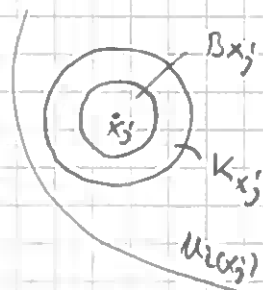
(ε_i) : der Überdeckung $\mathcal{U}$ untergeordnete C^∞ -Teilung d. Eins



Beweis: Zu $x \in K$ wähle $i(x) \in I$ mit $x \in U_{i(x)}$
Wähle ferner offene Kugel $B_x = B_{r(x)}(x) \subseteq \mathbb{R}^n$
mit $K_x := \overline{B_{2r(x)}} \subseteq U_{i(x)}$

K kompakt $\rightarrow$ endlich viele $B_{x_j}, 1 \leq j \leq N$,
überdecken K .

Wähle (gemäß Bsp zuvor) $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit
 $0 \leq \psi_j \leq 1, \psi_j = 1$ auf $B_{x_j}, \text{Tr } \psi_j \subseteq K_{x_j}$



Definiere auf $\mathbb{R}^n$:
$$\alpha_j := \frac{\psi_j}{\sum_{k=1}^N \psi_k + \prod_{k=1}^N (1 - \psi_k)}$$

Wohldef., da Nenner NS-frei auf $\mathbb{R}^n$ (denn:

$$\sum_{k=1}^N \psi_k(x) = 0 \Rightarrow \psi_k(x) = 0 \quad \forall k \Rightarrow \prod_{k=1}^N (1 - \psi_k(x)) = 1)$$

$\Rightarrow \alpha_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\text{Tr } \alpha_j = \text{Tr } \psi_j \subseteq U_{i(x_j)}, 0 \leq \alpha_j \leq 1$

$\sum_{j=1}^N \alpha_j = 1$ auf K , denn:

$$\text{Sei } x \in K \Rightarrow \exists k: x \in B_{x_k} \Rightarrow \psi_k(x) = 1 \Rightarrow \alpha_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^N \psi_k(x)}$$

setze
$$\varepsilon_i := \sum_{j: i(x_j)=i} \alpha_j \quad \blacksquare$$

(II) Weitere Vorbereitungen

12.10. Lemma Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ komp. mit glattem Rand. Sei $a \in \partial K$
 $\Rightarrow$ (nach erst. Umnumm. der Coord.) $\exists$ offene Umgeb.

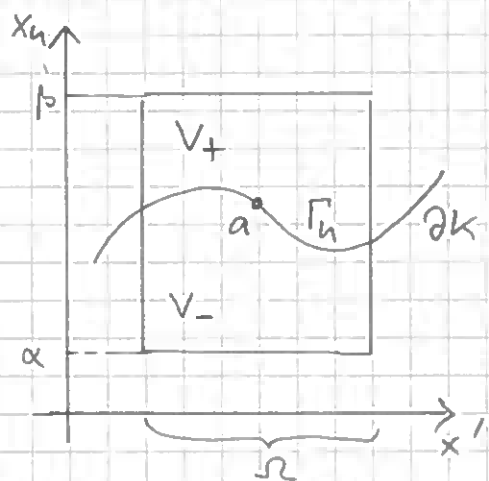
$V = \Omega \times (\alpha, \beta) \subseteq \mathbb{R}^n$ von a ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ offen) sowie C^1 -Fkt

$h: \Omega \rightarrow (\alpha, \beta)$, so dass

$$(1) V \cap \partial K = \{x \in V: x_n = h(x')\} \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$(2) \text{ entweder } V \cap \overset{\circ}{K} = \{x \in V: x_n < h(x')\} =: V_-$$

$$\text{oder " } = \{x \in V: x_n > h(x')\} =: V_+$$



Beweis: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgeb.

von a mit

$$U \cap K = \{x \in U: f(x) \leq 0\}$$

$$\nabla f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$$

$$\text{o.E. } \partial_{x_n} f(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$$

Satz über implizite Fkt $\Rightarrow$

$\exists$ Umgeb. $V \subseteq U$ von a und h wie angeg. mit

$$V \cap \partial K \stackrel{\text{L.R.S.}}{=} \{x \in V: f(x) = 0\} = \{x \in V: x_n = h(x')\}$$

$V_{\pm}$ wegzeflgt $\Rightarrow f(V_{\pm})$ ebenfalls

f NS-frei auf $V_{\pm} \Rightarrow f$ hat einheitliches Vorz. auf V_+ und V_-

Falls $\partial_{x_n} f(a) > 0 \Rightarrow f(a \pm t e_n) \gtrless f(a) = 0$ für kleine $t > 0$

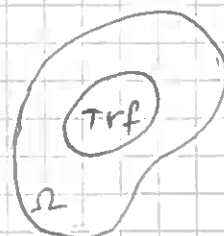
$\Rightarrow f > 0$ auf V_+ , $f < 0$ auf V_-

$$\Rightarrow V \cap \overset{\circ}{K} = V_-$$

Falls $\partial_{x_n} f(a) < 0 \Rightarrow$ 2. Variante

12.11. Lemma Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C_c^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \partial_j f \, dx = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n$$



Beweis: Setze f durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort $\Rightarrow$

$$\int_{\Omega} \partial_j f dx = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \partial_j f(x) dx_j \right)}_{=0 \text{ (HDI)}} dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n$$

5. Beweis d. Satzes v. Gauß

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ Komp. mit glattem Rand, ν äußeres ENF an ∂K

Es genügt zu zeigen: Ist $f \in C^1(U)$, $U \supseteq K$ offen $\Rightarrow$

$$(*) \quad \int_K \partial_j f dx = \int_{\partial K} f \cdot \nu_j dS \quad \forall 1 \leq j \leq n \quad \nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_n \end{pmatrix}$$

(dann $f = F_j$ und Summation über $j \Rightarrow$ Gauß)

Idee: Reduziere mittels Teilung d. Eins auf einfachere Situationen.

12.12. Lemma Sei $f \in C^1(U)$ ($U \supseteq K$ offen), mit $\text{Tr } f \in V$,
wobei $V = \Omega \times (\alpha, \beta)$ Umgeb. von $a \in \partial K$ wie in Lemma 12.10.

$$\Rightarrow \int_K \partial_j f dx = \int_{\partial K} f \cdot \nu_j dS \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

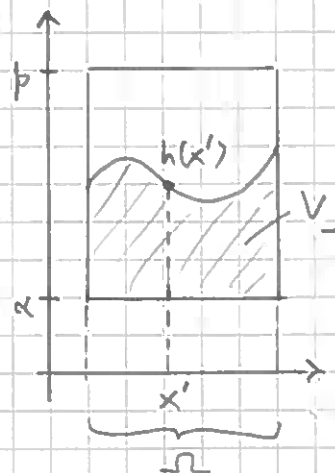
Beweis: Sei $V \cap K = V_-$. Dann ist auf $\partial K \cap V$

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla h(x')\|^2}} \cdot \begin{pmatrix} -\nabla h(x') \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{da } x_n - h(x') = 0)$$

(Fall $V \cap K = V_+$ analog mit $\nu(x) = - \dots$)

1. Fall: $j = n$

$$\begin{aligned} \int_{V_-} \partial_n f dx &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\Omega} \underbrace{\left(\int_{\alpha}^{h(x')} \partial_n f(x', x_n) dx_n \right)}_{\stackrel{\text{HDI}}{=} f(x', h(x')) \text{ (da } f(x', \alpha) = 0)} dx' \\ &= \int_{\Omega} f(x', h(x')) dx' = \int_{\partial K \cap V} f \nu_n dS \stackrel{\text{Bew.}}{\Rightarrow} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{Int. über Graphen} \end{aligned}$$



2. Fall: $1 \leq j \leq n-1$.

$$\int_{V_-} \partial_j f dx = \int_{\Omega} \left(\int_a^{h(x')} \partial_j f(x', x_n) dx_n \right) dx' =: (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\int_a^{h(x')} f(x', x_n) dx_n}_{=: g(x')} = \frac{\partial}{\partial x_j} F(x', h(x')) \quad \text{mit } F(x', y) = \int_a^y f(x', x_n) dx_n$$

= Kettenregel $(\partial_j F)(\dots) + \partial_n F(\dots) \cdot \partial_j h(x')$

$$= \int_a^{h(x')} \partial_j f(x', x_n) dx_n + f(x', h(x')) \cdot \partial_j h(x')$$

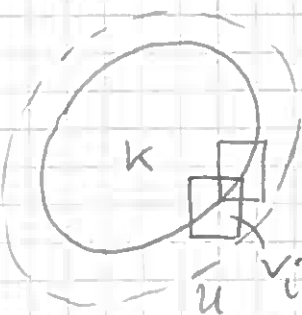
$$\Rightarrow (*) = \underbrace{\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} g(x') dx'}_{=0 \text{ nach L. 12.11, da } \text{Trg} \in \mathbb{R} \text{ komp.}} - \int_{\Omega} f(x', h(x')) \cdot \partial_j h(x') dx'$$

$= 0$ nach L. 12.11, da $\text{Trg} \in \mathbb{R}$ komp.

$$= \int_{\partial K \cap V} f \cdot v_j ds \quad \blacksquare$$

Beweis d. Stokes v. Gauß: Zeige (*).

∂K kompakt $\Rightarrow \exists$ endliche Überdeckung $(V_i)_{1 \leq i \leq N}$ von ∂K ,
 V_i wie in Lemma 12.10., dabei o.E. $V_i \in \mathcal{U}$.



$V_0 := \mathring{K} \Rightarrow (V_i)_{0 \leq i \leq N}$ ist offene Überdeck.
 von K . Sei $(\varepsilon_i)_{0 \leq i \leq N}$ eine untergeordnete
 C^∞ -Teilung d. Eins ($\sum \varepsilon_i = 1$ auf K)

$$\Rightarrow \int_K \partial_j f dx = \sum_{i=0}^N \int_K \partial_j (\varepsilon_i f) dx =: \otimes$$

$$\text{Tr}(\varepsilon_0 f) \subseteq \mathring{K}, \text{Tr}(\varepsilon_i f) \subseteq V_i \text{ für } i=1, \dots, N \quad \xrightarrow{\text{L. 12.11. und L. 12.12.}}$$

$$\otimes = \sum_{i=0}^N \int_{\partial K} (\varepsilon_i f) \cdot v_j ds = \int_{\partial K} f v_j ds \quad \blacksquare$$

§ 13 Exkurs: Faltung und Fouriers Transformation

Def. Seien $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Definiere die Faltung

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \quad (x \in \mathbb{R}^d)$$

sofern dieses Integral (im Lebesgue-Sinn) exist., oder mit Wert ∞ , falls $f, g \geq 0$

Beobachtungen:

(1) $f * g(x)$ existiere $\Rightarrow$

$$f * g(x) \stackrel{\text{Trasform. mit } y' = x-y}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(y')g(x-y')dy' = g * f(x)$$

dh. $*$ ist kommutativ

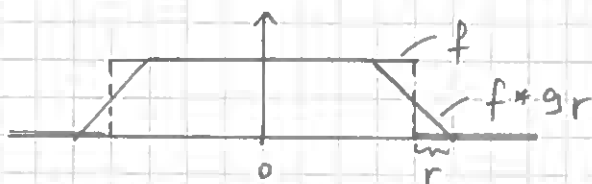
(2) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, g messbar + beschränkt $\Rightarrow$

$f * g(x)$ exist., $\forall x \in \mathbb{R}^d$

Falls $g \geq 0$ mit $\int g dx = 1$: $f * g(x)$ interpretierbar als gewichtete Mittelung von f um x

Bsp: $g_r(x) = \frac{1}{2r} 1_{[-r,r]}(x)$ auf $\mathbb{R}$, $r > 0 \Rightarrow$

$$f * g_r(x) = \frac{1}{2r} \int_{\mathbb{R}} f(y) 1_{[-r,r]}(x-y) dy = \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(y) dy$$



(3) $f * g(x)$ existiere $\forall x \in \mathbb{R}^d \Rightarrow$

$$\text{Tr}(f * g) \subseteq \overline{\text{Tr}f + \text{Tr}g}$$

$$A + B = \{x+y: x \in A, y \in B\}$$

$$\text{Denn: } f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy \stackrel{!}{\neq} 0$$

$$\Rightarrow y \in \text{Tr}g \wedge x-y \in \text{Tr}f \Rightarrow x \in \text{Tr}f + \text{Tr}g$$

Die Faltung glättet (!):

13.1. Stetigkeits- und Differentiationsregeln der Faltung

Sei $f \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^d)$, $g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ ($k \in \mathbb{N}_0$) und $\partial^\alpha g$ sei beschränkt

$\forall \alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leq k$

$\rightarrow f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\partial^\alpha (f * g) = f * \partial^\alpha g \quad \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k$$

Beweis: $k=0$ mit Stetigkeitsregel f. Parameterint.:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{g(x-y)}_{\text{stetig in } x} f(y) dy \quad (\text{ex. int. } \forall x)$$

$|g(x-y) f(y)| \leq \|g\|_\infty |f(y)| \in \mathcal{X}^1(\mathbb{R}^d)$
(von x unabh. int. bare Majorante)

Stetigkeitsregel $\Rightarrow f * g \in C(\mathbb{R}^d)$

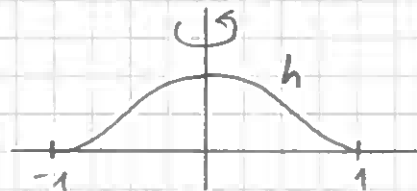
$k \geq 1$: Sei $\|\partial^\alpha g\|_\infty \leq C \quad \forall |\alpha| \leq k \Rightarrow |\partial^\alpha g(x-y) f(y)| \leq C |f(y)|$

Hilfsregel $\Rightarrow f * g \in C^k(\mathbb{R}^d)$, und unter Integral diffbar $\mathbb{R}$

Friedrichs-Kern

$$h(t) := \begin{cases} e^{-1/(1-t^2)} & , |t| < 1 \\ 0 & , |t| \geq 1 \end{cases}$$

$h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$



$$\text{Im } \mathbb{R}^d: j(x) := \begin{cases} c \cdot e^{-1/(1-\|x\|^2)} & , \|x\| < 1 \\ 0 & , \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

dabei $c > 0$ so, dass $\int_{\mathbb{R}^d} j(x) dx = 1$

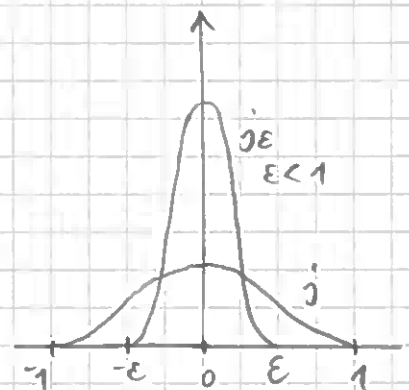
$$j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \text{Tr } j = \overline{B_1(0)}.$$

$$\text{Für } \varepsilon > 0 \text{ setze } j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

$$j_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \quad j_\varepsilon > 0, \quad \text{Tr } j_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} j_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = 1$$

Trafo $x' = \frac{x}{\varepsilon}$



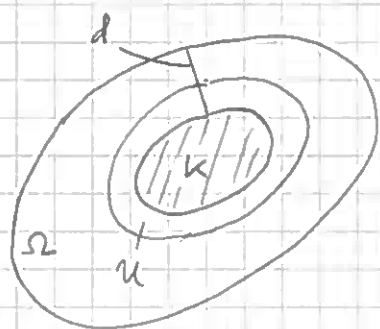
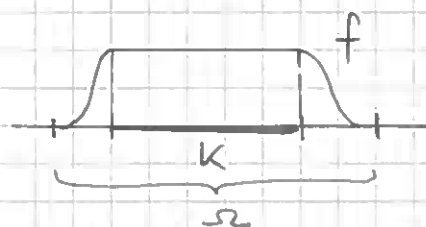
(j_\varepsilon): Friedrichs-Kern

Also: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f * j_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{Tr}(f * j_\varepsilon) \in \text{Tr} f + \overline{B_\varepsilon(0)}$

13.2. Satz (C^∞ -Lemma v. Urysohn im $\mathbb{R}^d$)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq \Omega$ kompakt mit $K \subseteq \Omega \Rightarrow$

$\exists f \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $0 \leq f \leq 1$, $f|_K = 1$



Beweis: K kompakt $\Rightarrow$

$d := \text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$ (Abstandsfkt stetig)

($d := 1$, falls $\Omega = \mathbb{R}^d$)

$U := \{x \in \Omega \mid d(x, K) < \frac{d}{2}\} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen
+ beschr.

Wähle $\varepsilon < \frac{d}{2}$, $f_i := 1_U * j_\varepsilon$

$\Rightarrow \text{Tr} f \subseteq \Omega$ kompakt $\left. \begin{array}{l} \Rightarrow f \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow f \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_U(x-y) j_\varepsilon(y) dy \geq 0 \\ |f(x)| \leq \int j_\varepsilon(y) dy = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq f \leq 1$$

$$x \in K \Rightarrow f(x) = \int_{B_\varepsilon(0)} \underbrace{1_U(x-y)}_{=1} j_\varepsilon(y) dy = 1$$

13.3. Satz $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, $f_\varepsilon := f * j_\varepsilon \Rightarrow f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_\varepsilon - f\|_\infty = 0.$$

Dh. jede Fkt aus $C_c(\mathbb{R}^d)$ kann glu. durch Fkt aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

approx. werden

Beweis: S. 149'

13.4. Satz $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow f * g(x)$ existiert für fast alle

$x \in \mathbb{R}^d$. Setze $f * g(x) := 0$ sonst

$\Rightarrow f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$, und

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Beweis v. Satz 13.3: $\text{Tr}(f * j_\varepsilon) \in \text{Tr} f + \overline{B_\varepsilon(0)}$, also kompakt

$$\begin{aligned} |f * j_\varepsilon(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) j_\varepsilon(y) dy \right| \\ &\leq \int_{B_\varepsilon(0)} |f(x-y) - f(x)| j_\varepsilon(y) dy \end{aligned}$$

$\text{Tr} f$ kompakt $\Rightarrow f$ gleichmäßig stetig $\Rightarrow \forall \gamma > 0 \exists \delta > 0$:

$|f(x-y) - f(x)| < \gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \text{ und } \forall y \text{ mit } \|y\| < \delta.$

$$\varepsilon < \delta \Rightarrow |f * j_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(0)} \gamma \cdot j_\varepsilon(y) dy = \gamma \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

$$\text{d.h. } \|f * j_\varepsilon - f\|_\infty < \gamma \Rightarrow \text{Beh.} \quad \blacksquare$$

Beweis: $F(x,y) := f(x-y)g(y)$ ist $\mathcal{B}_d \otimes \mathcal{B}_d$ -messbar auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$

Denn: $(x,y) \mapsto x-y, (x,y) \mapsto y, \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ messbar, f, g messbar

$\Rightarrow F$ messbar als Prod. messbarer Fkt.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |F(x,y)| d(x,y) &= \text{Tonelli} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(y)| \cdot \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| dx dy = \|g\|_1 \cdot \|f\|_1 \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 < \infty \Rightarrow F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d). \text{ Fubini} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dy < \infty$ für fast alle x und $f * g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)g(y)| dy \right) dx \stackrel{\text{oben}}{=} \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Faltung und Fourierreihe:

Erinnerung: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx \quad x \cdot \xi = \sum x_i \xi_i$$

$f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ nach Stetigkeitssatz

13.4. Faltungssatz: $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow$

$$\widehat{f * g} = (2\pi)^{d/2} \hat{f} \cdot \hat{g}$$

$$\text{Beweis: } (f * g)^\wedge(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy \right) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

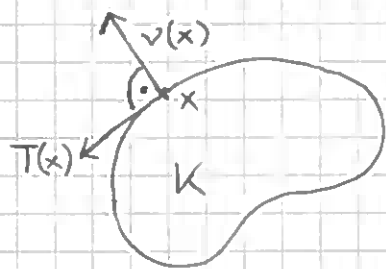
$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) e^{-ix \cdot \xi} dx \right) g(y) dy \\ &\quad (\text{Integrande } \mathcal{L}^1!) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i(x+y) \cdot \xi} dx \right) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy \cdot \xi} \hat{f}(\xi) g(y) dy = (2\pi)^{d/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \quad \square \end{aligned}$$

Bem: $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist

$$f(x) = (\hat{f})^\wedge(-x) \quad (\text{L}^1\text{-Inversitätssatz})$$

6. Der Satz v. Green (Gauß im $\mathbb{R}^2$)

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ Komp. mit glattem Rand, $F: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ C^1 -Vektorfeld
($U \supset K$ offen)



$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$: "äußeres ENF an ∂K

$\Rightarrow T(x) = \begin{pmatrix} -v_2(x) \\ v_1(x) \end{pmatrix}$ ist Tang.vektor in x

(so orientiert, dass stets K links von $T(x)$ liegt)

Betrachte das um 90° (im Uhrzeigersinn!) gedrehte Vektorfeld

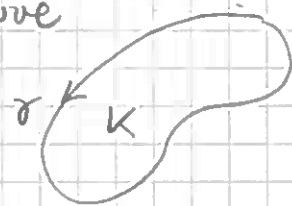
$H = \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}$, Gauß für $H \Rightarrow$

$$\int_K (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) dx = \int_{\partial K} \left\langle \begin{pmatrix} F_2 \\ -F_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle ds = \int_{\partial K} \langle F, T \rangle ds$$

Falls $\partial K = \text{Spur } \gamma$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ reguläre C^1 -Kurve

Dabei γ so parametrisierbar, dass

$$T(x) = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \quad \text{in } x = \gamma(t)$$



$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\partial K} \langle F, T \rangle ds &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \quad (\text{Kurvemult. aus Ana 2}) \\ &= \int_{\gamma} \omega \quad \text{mit } \omega = F_1 dx_1 + F_2 dx_2 \end{aligned}$$

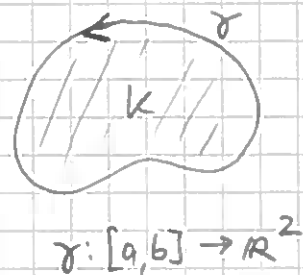
Satz v. Green: $\int_K (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) dx = \int_{\gamma} (F_1 dx_1 + F_2 dx_2)$

Anwendung: Flächenformel (Situation wie oben)

$$F(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 2$$

$$\text{Green} \Rightarrow 2 \text{vol}_2(K) = \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \right\rangle dt$$

$$\Rightarrow \text{vol}_2(K) = \frac{1}{2} \int_a^b (x_1 \dot{x}_2 - \dot{x}_2 x_1) dt$$



$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$