Gruppenübungen für Woche 2

Aufgabe G1:

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$(1-t^2)\dot{x} - tx + 1 = 0 \quad \text{im Bereich } |t| < 1$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{x} = (t+x)^2$, $x(0) = 1$.

Hinweis: Variablentransformation

Aufgabe G2: Ein Tank enthält s_0 kg Salz, gelöst in V Liter Wasser. Beginnend zur Zeit $t = 0$ fließt zusätzlich Wasser aus einem anderen Reservoir mit einer Geschwindigkeit von α Liter pro Minute in den Tank. Dieser Zufluss enthält β kg gelöstes Salz pro Liter. Entsprechend dem Zulauf fließt stets die gleiche Menge der vollständig gemischten Lösung aus dem Tank.

Bestimmen Sie die Menge des Salzes im Tank zur Zeit $t > 0$ (in Minuten). Untersuchen Sie das Verhalten der Salzkonzentration im Tank für $t \to \infty$.

Aufgabe G3: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen und $p, q : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung

$$(D) \quad p(t,x) + q(t,x)\dot{x} \;=\; 0$$

heißt *exakt*, wenn es eine differenzierbare Funktion $F : \Omega \to \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla F = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ auf Ω.

Sei nun (D) exakt. Beweisen Sie:

1. Ist $x : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $(t, x(t)) \in \Omega \, \forall t \in I$, so löst x genau dann die DGL (D), wenn die Funktion $t \mapsto F(t, x(t))$ konstant auf I ist.
   (Insbesondere verläuft daher jede Lösung von (D) in einer Niveaumenge von F.)

2. Ist $(t_0, x_0) \in \Omega$ mit $q(t_0, x_0) \neq 0$, so ist das AWP zu (D) mit $x(t_0) = x_0$ lokal eindeutig lösbar, d.h. es gibt ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ um t_0, so dass (D) eine eindeutige Lösung auf I besitzt.

Reelle Analysis

Hausübungen

Aufgabe H1: (5 Punkte) Die *Riccati-Differentialgleichung*

$$(R) \quad \dot{x} = a(t)x + b(t)x^2 + c(t)$$

mit Koeffizienten $a, b > 0$ ist ein Modell für natürliches Wachstum mit zusätzlichem äußeren Einfluss c. Dabei seien a, b, c stetige Funktionen auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Im Allgemeinen existiert für diese DGL kein explizites Lösungsverfahren.

1. Zeigen Sie: Ist eine partikuläre Lösung x_p von (R) bekannt, so führt die Substitution

$$y(t) := \frac{1}{x(t) - x_p(t)} \quad \text{d.h. } x = x_p + \frac{1}{y}$$

   auf eine lineare DGL für y. Geben Sie diese an.

2. Die Riccati-DGL

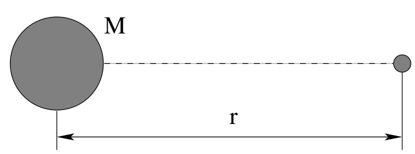
$$t^2\dot{x} = t^2x^2 + tx + 1$$

   besitzt die partikuläre Lösung $x_p(t) = -\frac{1}{t}$. Berechnen Sie die allgemeine Lösung für $t > 0$.

Aufgabe H2: (5 Punkte) Die Bewegung eines Massepunktes der Masse m im Gravitationsfeld einer anziehenden Masse M mit $M >> m$ genügt dem Gravitationsgesetz

$$\ddot{r} = -\gamma \frac{M}{r^2} \qquad (r > 0; \gamma > 0 \text{ die Gravitationskonstante})$$

Wir betrachten das Anfangswertproblem mit $r(0) = R > 0$, $\dot{r}(0) = v_0 > 0$.



a) Zeigen Sie, dass es unbeschränkte Lösungen dieses AWP nur geben kann, wenn

$$v_0 \geq v_F := \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}}. \quad (v_F \text{ heißt die Fluchtgeschwindigkeit})$$

b) Berechnen Sie die Lösung des AWP explizit im Fall $v_0 = v_F$.

Aufgabe H3: (4 Punkte) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = 2t \cdot \frac{1 + x^2}{(1 + t^2)^2}, \quad x(0) = x_0$$

und ihren maximalen Definitionsbereich in Abhängigkeit von x_0.
Tip: Setzen Sie zur Abkürzung $a = \arctan x_0$.

Aufgabe H4: (Zusatzaufgabe, 2 Extra-Punkte) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei ω-periodisch in der ersten Variablen, dh. es gelte $f(t + \omega, x) = f(t, x)$ für alle t, x. Wie wirkt sich das auf das Richtungsfeld der DGL $\dot{x} = f(t, x)$ aus? Was schließen Sie daraus für die Lösung einer solchen Differentialgleichung? Verifizieren Sie Ihre Vermutung.

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 30.10.2015, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1.