Gruppenübungen für Woche 12

Aufgabe G1: Der *Schwerpunkt* einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^d$ ist der Punkt $s = (s_1, \dots s_d)$ mit

$$s_i = \frac{1}{\lambda_d(K)} \int_K x_i \, dx \, .$$

Berechnen Sie den Schwerpunkt des bzgl. der x-Achse symmetrischen, abgeschlossenen Kreissektors $A \subset \mathbb{R}^2$ mit Öffnungswinkel $0 < \alpha < 2\pi$.

Aufgabe G2: Untersuchen Sie die Lebesgue-Integrierbarkeit der Funktion

$$x \mapsto \frac{1}{\|x\|^a} \quad (a \in \mathbb{R})$$

über die Kugel $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < R\}$ und den Außenraum $\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)$.

Hausübungen

Aufgabe H1: (3+2 Punkte)

(1) Das von den Vektoren $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}^d$ aufgespannte *Parallelotop* ist definiert als

$$P = \{\sum_{i=1}^{d} t_i a_i \, : \, t_1, \dots t_d \in [0,1]\}.$$

Skizzieren Sie P im Fall $d = 3$ und berechnen Sie das Volumen von P.

(2) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{B_1(0)} \frac{|x|}{x^2 + y^2 + z^2} \, d(x,y,z).$$

Aufgabe H2: (3 Punkte) Berechnen Sie für eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-x^t A x} dx.$$

Hinweis: A ist orthogonal diagonalisierbar.

Aufgabe H3: (6 Punkte)

a) Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} (u-v)^2 \\ 2uv \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass φ die Menge $\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : v < u\}$ diffeomorph abbildet auf $\mathbb{R}^2_+$.

b) Beweisen Sie die *Legendre'sche Verdopplungsformel* der Gammafunktion,

$$\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2x) \;=\; 2^{2x-1} \Gamma(x) \cdot \Gamma\big(x + \frac{1}{2}\big) \quad \text{für } x > 0,$$

BITTE WENDEN!

durch Anwendung der Transformation φ auf das Integral

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(s+t)} t^{2x-1} s^{-1/2} d(s,t).$$

Tip: Achten Sie auf Symmetrien in den auftretenden Integranden, damit kann man z.B. von Ω auf einen angenehmeren Integrationsbereich übergehen.

Aufgabe H4: **(3 Punkte)** Beweisen Sie Satz 9.2. der Vorlesung:
Sei $N \subset \mathbb{R}^d$ eine Lebesgue-Nullmenge und $\varphi : N \to \mathbb{R}^d$ Lipschitz-stetig. Ferner sei $\varphi(N)$ Borel-messbar. Dann ist auch $\varphi(N)$ eine Lebesgue-Nullmenge.

Tip: Hier ist es bequem, mit der Maximumsnorm $\|.\|_\infty$ zu arbeiten.

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 22.1.2016, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.