Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Rösler

Reelle Analysis

Übungsblatt 14
WS 2015/16

Gruppenübungen für Woche 15

Aufgabe G1: Gegeben seien die Kugelschale $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ sowie das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F(x,y,z) = (x,y,z)^T$.

(1) Verifizieren Sie, dass K ein Kompaktum mit glattem Rand ist.

(2) Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial K} F d\vec{S}$
   (a) direkt;
   (b) mit dem Satz von Gauß.

Aufgabe G2: Streckungen. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Wir betrachten die Streckung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto rx$ mit einem Faktor $r > 0$. Zeigen Sie:

(1) $rM := T(M)$ ist ebenfalls eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

(2) Eine Funktion $f : rM \to \mathbb{C}$ ist genau dann über rM integrierbar, wenn $f \circ T$ über M integrierbar ist, und in diesem Fall gilt

$$\int_{rM} f dS = r^k \int_M (f \circ T)\, dS$$

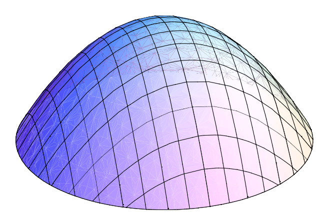
(3) Für Borelmengen $A \in \mathcal{B}(M)$ gilt $vol_k(rA) = r^k \cdot vol_k(A)$.

Hausübungen

Aufgabe H1: (4 Punkte) Berechnen Sie ein Einheitsnormalenfeld ν des Paraboloids

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2,\ x^2 + y^2 < 4\}$$

und integrieren Sie das Vektorfeld $F(x,y,z) = (x,y,xy+z)^T$ über (P,ν).



Aufgabe H2: (3 Punkte) Die Greenschen Formeln. Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand, und $f, g : U \to \mathbb{R}$ seien C^2-Funktionen auf einer offenen Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von K. Dann gelten

(1) $\displaystyle\int_K \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx = \int_{\partial K} f\, \partial_\nu g\, dS - \int_K f \Delta g\, dx.$

(2) $\displaystyle\int_K (f\Delta g - g\Delta f) dx = \int_{\partial K} (f\, \partial_\nu g - g\, \partial_\nu f) dS.$

Dabei bezeichnet $\partial_\nu g(x) = \langle \nabla g(x), \nu(x) \rangle$ die Ableitung von g in Richtung des äusseren ENF ν an K.

BITTE WENDEN!

Aufgabe H3: (5 Punkte) Beweisen Sie:

(1) Das Oberflächenmaß S der Sphäre S^{n-1} ($n \geq 2$) ist invariant unter orthogonalen Transformationen, d.h. für $A \in O(n)$ und jede Borelmenge $E \in \mathcal{B}(S^{n-1})$ gilt $S(AE) = S(E)$.

Hinweis: Nutzen Sie aus, dass das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ $O(n)$-invariant ist.

(2) Die Besselfunktion

$$j_n(x) := \int_{S^{n-1}} e^{-i\langle x,\xi\rangle} dS(\xi) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

ist $O(n)$-invariant.

(3) Für $n = 3$ gilt

$$j_3(x) = 4\pi \frac{\sin \|x\|}{\|x\|}.$$

Aufgabe H4: (4 Punkte) Berechnen Sie die Oberfläche des Torus T im $\mathbb{R}^3$, der durch Rotation des Kreises $\{(x,0,z) : (x-a)^2 + z^2 = r^2\}$ $(0 < r < a)$ um die z-Achse entsteht. Verwenden Sie dazu die Immersion aus Aufgabe H3, Blatt 12:

$$\gamma(t,\varphi) = \begin{pmatrix} (a + r\cos t)\cos\varphi \\ (a + r\cos t)\sin\varphi \\ r\sin t \end{pmatrix}, \quad (t,\varphi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie zunächst, dass $\gamma : (0,2\pi) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ eine Einbettung ist. Welcher Teil von T wird dadurch parametrisiert?

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 12.2.2016, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.

Bitte beachten: Die Aufgaben dieses Blatts sind prüfungsrelevant. Sie werden auch korrigiert (und können dann im Sekretariat bei Frau Borchert abgeholt werden), fließen aber nicht in die Punktewertung ein. Die Lösungen gibt es nach dem Abgabetermin auf koala.