Reelle Analysis

Gruppenübungen für Woche 4

Aufgabe G1: Begründen Sie, ohne die Lösung zu berechnen: Das AWP

$$\dot{x} = x(x-1), \quad x(0) = \frac{1}{2}$$

besitzt eine eindeutige, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung.

Aufgabe G2: Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie ferner das zugehörige AWP mit $x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Hausübungen

Aufgabe H1: (4 Punkte) Wir betrachten das folgende autonome System im $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + (1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 + x_2^2 - 1)(1 - x_1 x_2). \end{aligned}$$

(a) Geben Sie für $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ explizit eine Lösung dieses Systems mit $x(t_0) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ an. (Tip: scharf hinschauen).

(b) Beweisen Sie: Jedes AWP $x(0) = x_0$ mit $\|x_0\|_2 < 1$ besitzt eine eindeutige, auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung. Sie verläuft ganz in der offenen Kreisscheibe $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}$.

Aufgabe H2: (3+3 Punkte)

(a) Berechnen Sie sämtliche Lösungen der DGL

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Achtung: Die Koeffizientenmatrix ist die aus Aufgabe G2 !

(b) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3: (3 Punkte) Beweisen Sie für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{spur} A}.$$

Aufgabe H4: (3 Punkte)
Beweisen Sie für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Für jede Lösung $x(t)$ des Systems $\dot{x} = Ax$ gilt $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.
(ii) Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil.

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 13.11.2015, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.