Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Prof. Dr. M. Rösler

Reelle Analysis

Übungsblatt 7
WS 2015/16

Gruppenübungen für Woche 8

Aufgabe G1: Welche der folgenden Aussagen für einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ sind wahr?

a) Für Elementarfunktionen $f, g \in E^+(X)$ ist auch $f \cdot g \in E^+(X)$.
b) Für $f, g \in E^+(X)$ gilt: $\int_X (fg) d\mu = \int_X f d\mu \cdot \int_X g \, d\mu$.

Aufgabe G2:

a) Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ wird erzeugt von den Mengen $(b, \infty]$, $b \in \mathbb{R}$.
b) Seien $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare numerische Funktionen. Dann liegen folgende Mengen in $\mathcal{A}$:

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\}, \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}, \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

Hausübungen

Aufgabe H1: (3 Punkte) Eine *Hyperebene* im $\mathbb{R}^d$ ist eine Menge der Form

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : \langle a, x - c\rangle = 0\} \quad \text{mit festen } a, c \in \mathbb{R}^d, \ a \neq 0.$$

dabei bezeichnet $\langle \, . \, , \, . \, \rangle$ das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass H eine Lebesgue-Nullmenge ist.
Anleitung: Betrachten Sie zunächst den Fall $H = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 = 0\}$ und nutzen Sie für den allgemeinen Fall die Invarianz des Lebesgue-Maßes unter Translationen und orthogonalen Transformationen.

Aufgabe H2: (3+3 Punkte) (Messbare Funktionen)

(1) Beweisen Sie: Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton (wachsend oder fallend), so ist f Borel-messbar.

(2) Sei $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum. Beweisen Sie:

a) Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen $f_n : X \to \mathbb{C}$, die punktweise gegen $f : X \to \mathbb{C}$ konvergiert, so ist auch f messbar.
b) Eine Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ ist genau dann messbar, wenn es eine Folge von Elementarfunktionen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E(X)$ gibt mit $u_n \to f$ punktweise und $|u_n| \uparrow |f|$ auf X.

Aufgabe H3: (4 Punkte) Wir betrachten die folgende nicht-negative Funktion auf $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2^k & \text{falls } x \in \left[\frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{2k-1}}\right], \ k \in \mathbb{N}; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Geben Sie eine Folge von Elementarfunktionen $u_n \in E^+(\mathbb{R})$ an mit $u_n \uparrow f$.
b) Begründen Sie, dass f messbar ist, und berechnen Sie das Lebesgue-Integral $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$.
c) Ist f eine Regelfunktion? Begründung! (Eine Funktion auf einem Intervall I ist genau dann eine Regelfunktion, wenn sie in jedem Punkt aus I einen links- und einen rechtsseitigen Grenzwert besitzt.)

BITTE WENDEN!

Aufgabe H4: **(3 Punkte)** Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Seien ferner $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar mit $f \leq g$. Beweisen Sie:

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Hinweis: Monotonie-Lemma.

Aufgabe H5: (**Zusatzaufgabe, 2 Extra-Punkte**) Aus der Vorlesung wissen wir, dass für eine abzählbare Familie messbarer Funktionen $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$ auch die Funktion $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ meßbar ist.

Konstruieren Sie (mit Hilfe einer nicht-messbaren Menge $A \subset \mathbb{R}$) eine *überabzählbare* Familie messbarer Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$, für die $\sup_{i\in I} f_i$ *nicht* messbar ist.

Abgabetermin der Hausübungen: Freitag, den 11.12.2015, 9:00, im roten Kasten Nr. 18 auf D1, oder direkt vor der Vorlesung.