Analysis I

WS 14/15

Analysis: von griechisch analyein = auflösen, zerlegen

Gegenstand: Studium funktionaler Abhängigkeiten

wichtig dabei: Grenzprozesse

Begründer: Leibniz, Newton, 2. Hälfte des 17. Jahrh.

§1 Mengen und Abbildungen

Gegenstand d. Mathematik: Math. Objekte und Aussagen über sie.

1.1. Aussagen

Math. Aussage: entweder wahr oder falsch

Bsp: es gibt unendlich viele Primzahlen (w)

Das Wetter ist schön (keine Aussage)

Verknüpfung von Aussagen

Liefert neue Aussagen, deren Wahrheitswert von dem der Komponenten abhängt

P, Q: gegebene Aussagen

(1) Konjunktion: $P \wedge Q$ (P und Q) $\wedge$: Junktor

wahr genau dann, wenn (g.d.w.) P und Q wahr

(2) Disjunktion: $P \vee Q$ (P oder Q)

wahr g.d.w. mindestens eine der Auss. P, Q wahr ist

(einschließendes, nicht exklusives oder)

(3) Negation: $\neg P$ (nicht P)

wahr g.d.w. P falsch

Bsp: P = „alle Kühe sind lila"

$\neg P$ = „es gibt mindestens 1 Kuh, die nicht lila ist"

(4) Implikation: $P \Rightarrow Q$ (aus P folgt Q)

falsch g.d.w. P wahr, aber Q falsch ist

Ist P falsch, so ist $P \Rightarrow Q$ wahr, unabhängig von Q!

Bsp: 1. P = „es regnet", Q = „die Straße wird naß"

$P \Rightarrow Q$ = „wenn es regnet, wird die Straße naß"

2. „Wenn 8 eine Primzahl ist, ist 6 eine ungerade Zahl" ist eine wahre Aussage!

(5) Äquivalenz: $P \Leftrightarrow Q :\!= (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

↑ ist definiert als

(P äquivalent zu Q)

Wahrheitstafel:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
w	w	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	f	w	w	w	f
f	f	f	f	w	w	w

Definition. Eine zusammengesetzte Aussage, die für jede Belegung in der W-Tafel wahr ist, heißt allgemeingültig (Tautologie)

Bsp: 1. $P \vee \neg P$ ist Tautologie,

denn:

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
w	f	w
f	w	w

2. Weitere allgemeingültige Aussagen: (Bew. mit Wahrheitst.)

$$\left.\begin{aligned} \neg(P \wedge Q) &\Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q \\ \neg(P \vee Q) &\Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q \end{aligned}\right\} \text{Regeln v. de Morgan}$$

($\neg$ bindet stärker als $\vee, \wedge$)

Distributivgesetze: $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

[Kontrapositionsgesetz: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
(wichtige Regel beim logischen Schließen)]

1.2. Mengen

Definition nach G. Cantor: Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte (unseres Denkens) zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen die Elemente der Menge.

Diese Def. ist vage!
Pragmatischer Standpunkt: eine Menge ist gebildet, wenn feststeht, welche Elemente dazugehören.

Schreibweisen:
- $x \in A$ falls x Element der Menge A
- $x \notin A$ sonst

- $A \subseteq B$ (A Teilmenge von B), falls jedes Element von A auch im B liegt
  Entsprechend: $B \supseteq A$ (B Obermenge von A)
- $A = B$, falls $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$
- strikte Inklusion: $A \subsetneq B$
- $\emptyset$: leere Menge (die Menge ohne Elemente)

Beschreibung von Mengen:

1. Durch Aufzählung

Bsp: $A = \{1, \{1,2\}, \emptyset\}$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

2. Durch eine charakterisierende Eigenschaft, z. B.

$A = \{n \in \mathbb{Z} : n \text{ ist gerade}\}$

$= \{n \in \mathbb{Z} : \text{es gibt } k \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = 2k\}$

<u>Weitere Mengen von Zahlen</u>:

$\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$ rationale Zahlen

mit den üblichen Rechenregeln.

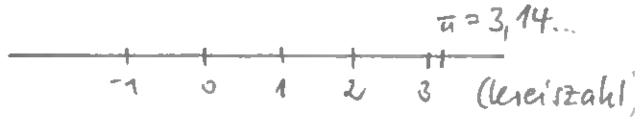
Beachte: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$

$\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen

(Darstellbar als Dezimalbrüche; Veranschaulichung: Zahlengerade)

Inklusionen: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Mehr zu $\mathbb{R}$ später!



1.3. <u>Einschub</u>: <u>Aussagen mit Quantoren</u>

Sei X eine Menge und $P(x)$ eine von $x \in X$ abhängige Aussage ($P(x)$: „Aussageform" mit Variable x)

Aussage	Schreibweise
Für alle $x \in X$ gilt $P(x)$	$\forall x \in X : P(x)$
Es gibt (mindestens) ein $x \in X$, für das $P(x)$ gilt	$\exists x \in X : P(x)$
" " genau ein $x \in X$, " " " "	$\exists! x \in X : P(x)$
" " kein " " " " "	$\nexists x \in X : P(x)$

$\forall$: Allquantor ; $\exists$: Existenzquantor

<u>Bsp</u>: 1. $\exists n \in \mathbb{N} : n \geq 2$

2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (Binomische Formel)

3. $\forall x \in \mathbb{Q} \; \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot x \in \mathbb{Z}$ hängt von x ab!

„Zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x \in \mathbb{Z}$"

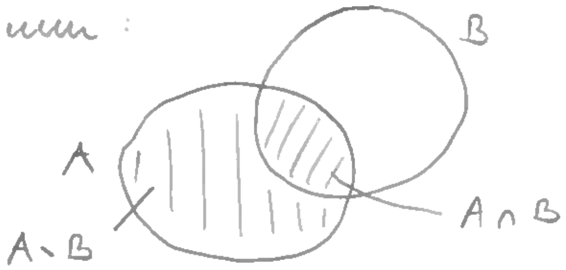
1.4. Mengenoperationen Seien A, B Mengen

$A \cup B := \{x ; x \in A \vee x \in B\}$ Vereinigung von A und B

$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}$ Durchschnitt " " " "

$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\}$ Komplement von B in A

Venn-Diagramm:



Regeln: (1) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Assoziativität

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Distributivität

Beides gilt ebenso mit $\cup, \cap$ vertauscht

Beweis von (2). $x \in A \cap (B \cup C) \Longleftrightarrow [x \in A] \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)]$

$\underset{\text{log. D-Gesetz}}{\Longleftrightarrow} [(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)]$

$\Longleftrightarrow [x \in (A \cap B)] \vee [x \in (A \cap C)]$

$\Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ∎

Beweisende

Allgemeiner: Sei $I \neq \emptyset$ eine Menge, und zu jedem $i \in I$ sei eine Menge A_i gegeben

$$\bigcup_{i \in I} A_i := \{x : \exists i \in I : x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i := \{x : \forall i \in I : x \in A_i\}$$

Kartesisches Produkt: Seien A, B Mengen

$A \times B := \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$

Menge aller geordneten Paare (a,b)

Im Gegensatz zu $\{a,b\}$ kommt es in (a,b) auf die Reihenfolge an. Insbes.: $(a,b) = (a',b') \iff a = a' \wedge b = b'$ || Präzise Def.: $(a,b) = \{a, \{a,b\}\}$

Bsp: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{*, \circ\}$ $\Rightarrow$

$A \times B = \{(1,*), (1,\circ), (2,*), (2,\circ), (3,*), (3,\circ)\}$

Bez: $A \times A =: A^2$ (Bsp: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$)

Beispiel zur Problematik des Mengenbegriffs:

$M := \{X : X \text{ Menge und } X \notin X\}$

„Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten"

Frage: Ist $M \in M$?

Falls $M \in M \Rightarrow M \notin M$ nach Def. von M

Falls $M \notin M \Rightarrow M \in M$ " " "

Also $M \in M \iff M \notin M$, ein Widerspruch (Russelsche Antinomie)

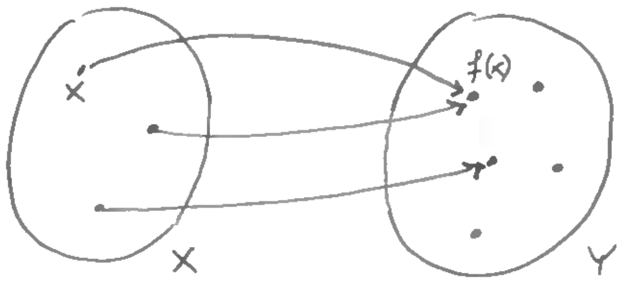
Ausweg: M ist keine Menge! (sondern eine sog. Klasse)

1.5. Abbildungen

Def. Seien X, Y Mengen. Eine Abbildung (Funktion) f von X nach Y ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein Element $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

Schreibweise:

$f: X \to Y, \; x \mapsto f(x)$



bei jedem $x \in X$ startet genau 1 Pfeil

X: Definitionsbereich von f

Y: Wertebereich von f

$f(x)$: Bild von x unter f
(Wert von f in x)

Graph von f: $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$

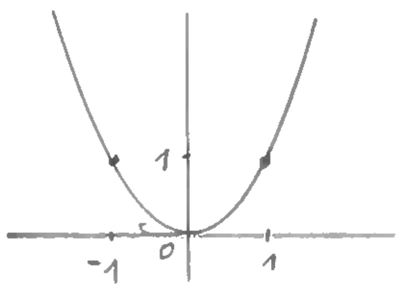
Bez. „Funktion" üblich, falls X, Y Mengen von Zahlen

Beispiele: 1. $X = \{$alle Studenten an der UPB$\}$

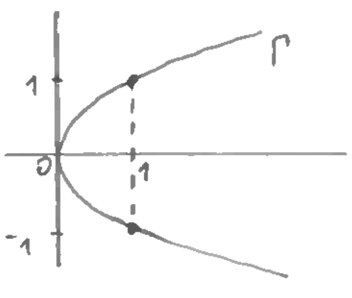
$f: X \to \mathbb{N}, \; x \mapsto$ Alter von x

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; x \mapsto x^2$

Γ_f: Normalparabel

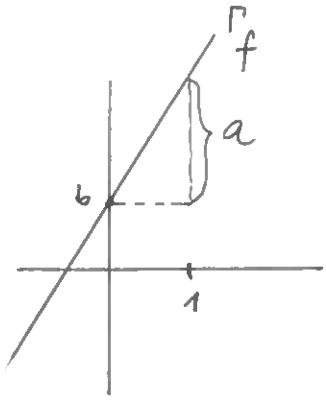


Aber:



$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$ ist kein Funktionsgraph, da $(1,1) \in \Gamma$ und $(1,-1) \in \Gamma$

3. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$ fest)
(Affin-)lineare Funktion
Γ_f: Gerade (Steigung a, Achsenabschnitt b)

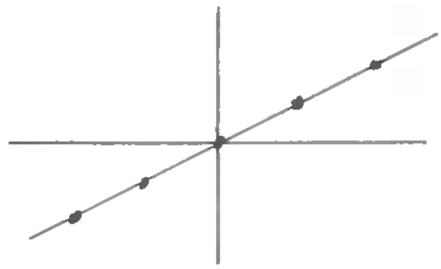


4. Polynomfunktionen: Fkt der Form
$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$
wobei $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (Koeffizienten)

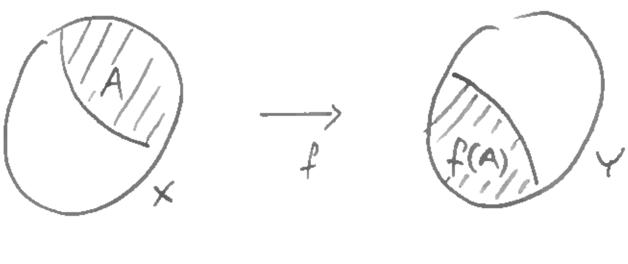
5. Identische Abbildung auf einer Menge X:
$id = id_X : X \to X$, $x \mapsto x$

<u>Achtung</u>: Für die Charakterisierung einer Abbildung ist neben der Abb.-Vorschrift auch der Def. bereich wichtig.

Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x$ und $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}x$
sind verschiedene Fkt
g ist eine <u>Restriktion</u> von f: $g = f|_{\mathbb{Z}}$
Γ_f: Gerade ; Γ_g: Punkte



<u>Def.</u> Sei $f: X \to Y$ eine Abb.
(i) Sei $A \subseteq X$. $f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subseteq Y$
<u>Bild</u> von A unter f



Speziell:
$f(X) \subseteq Y$ heißt
Bild von f

(ii) Sei $B \subseteq Y$. $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$

$\uparrow$ <u>Urbild</u> von B unter f

besagt <u>nicht</u>,
dass f^{-1} Abbildung! Nur Bezeichnung!

<u>Bsp:</u> $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto x^2$

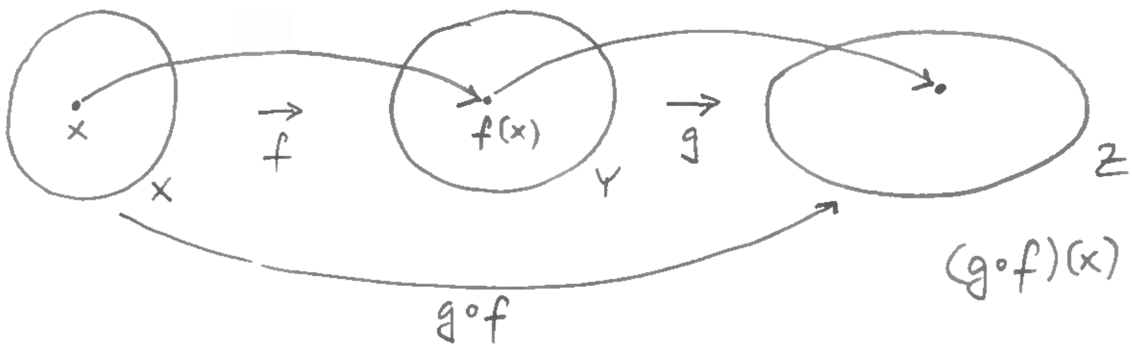
$f(\{-2,5\}) = \{4,25\}$; $f^{-1}(\{4,25\}) = \{\pm 2, \pm 5\}$

$f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{3,4\}) = \{\pm 2\}$

<u>Komposition von Abbildungen</u>

<u>Def.</u> Seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Abbildungen
Die Komposition (Verknüpfung) von f und g ist die Abb.

$g \circ f : X \to Z$, $x \mapsto g(f(x))$ (erst f, dann g!)



$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

<u>Bsp:</u> $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2x+1$, $g(x) = x^2$

$$\left.\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 \\ (f \circ g)(x) &= 2x^2 + 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \circ g \neq g \circ f$$

Aber es gilt:

<u>Satz</u> (<u>Assoziativität der Komposition</u>)

Seien $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$, $h: Z \to W$ Abb. $\Longrightarrow$

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

<u>Beweis:</u> $h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)) = \underbrace{(h \circ g)(f(x))}_{= ((h \circ g) \circ f)(x)} =$ ∎

Eigenschaften von Abbildungen

Def. $f: X \to Y$ heißt

(1) injektiv, falls es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

(2) surjektiv, falls es zu jedem $y \in Y$ mindestens ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$

(3) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv

Also: f injektiv $\iff$ $\forall x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

f surjektiv $\iff \forall y \in Y \ \exists x \in X : \ y = f(x)$

$\iff f(X) = Y$

f bijektiv $\iff \forall y \in Y \ \exists!\, x \in X : \ y = f(x)$

Bsp: 1. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$; 3 Varianten

(i)

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & \\ & \searrow & \searrow & \searrow & & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & \end{array}$$

$f(n) = n + 1$

injektiv, nicht surjektiv

(ii)

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 \\ \downarrow & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \dots \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 \end{array}$$

$$f(n) = \begin{cases} n-1, & \text{falls } n \geq 2 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \end{cases}$$

surjektiv, nicht injektiv

(iii)

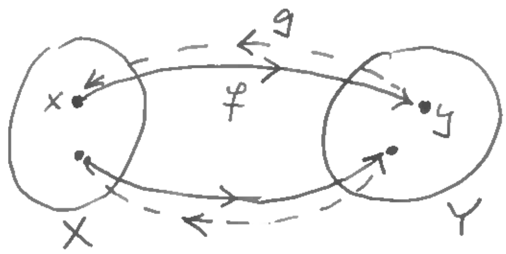
$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \multicolumn{2}{c}{\times} & \multicolumn{2}{c}{\times} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad \dots$$

bijektiv

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist weder surjektiv (da $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$) noch injektiv (da $f(-x) = f(x)$)

Sei $f: X \to Y$ bijektiv, also:

$\forall y \in Y \; \exists! \, x \in X: f(x) = y$



Wir können dann $g: Y \to X$ definieren durch

$g(y) := x$ falls $f(x) = y$ (Umkehren der Pfeile)

Damit: $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$

<u>Def.</u> g heißt die <u>Umkehrabbildung / Umkehrfunktion</u> von f

Bez: $g = f^{-1}$

Damit: $y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$ (falls f bijektiv)

<u>Satz</u> Für $f: X \to Y$ sind äquivalent:

(1) f ist bijektiv

(2) $\exists$ Abb. $g: Y \to X$ mit $g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$

Im diesem Fall ist $g = f^{-1}$

<u>Beweis</u>: Zu zeigen: $(1) \Rightarrow (2) \wedge (2) \Rightarrow (1)$

$(1) \Rightarrow (2)$: siehe oben

$(2) \Rightarrow (1)$: f ist injektiv, denn:

Sei $f(x_1) = f(x_2) \underset{g \circ f = id_X}{\Longrightarrow} x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$

f surjektiv, denn: Sei $y \in Y \underset{f \circ g = id_Y}{\Longrightarrow} y = f(\underbrace{g(y)}_{\in X})$

Ferner: g in (2) ist eindeutig, da $f(g(y)) = y$ und f injektiv.

Es folgt $g = f^{-1}$ ■

<u>Bsp</u>: $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 3x + 2$ ist bij. mit $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$

(löse $y = 3x + 2$ nach x auf: $x = \frac{y-2}{3}$)

§2 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

2.1. Prinzip der vollständigen Induktion

wichtiges Beweisprinzip für Aussagen über nat. Zahlen. Es beruht auf dem

Induktionsaxiom: Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ mit

(1) $1 \in M$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \qquad n \longrightarrow n+1 \; \cdots$$

(Durch fortlaufendes Zählen erreicht man genau alle $n \in \mathbb{N}$)

Bem: Axiome sind (in der Mathem.) Grundannahmen, aus denen die weitere Theorie abgeleitet wird.
Charakterisierung von $\mathbb{N}$ durch die sog. Peano-Axiome: Züb.

Satz 1 (Prinzip der vollst. Induktion)
Gegeben sei eine von $n \in \mathbb{N}$ abhängige Aussage $P(n)$. Es gelte:

(I) $P(1)$ ist wahr (Induktionsanfang)

(II) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
(Induktionsschritt)

Dann ist $P(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Setze $M := \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ ist wahr}\}$
M erfüllt (1), (2) des Induktionsaxioms. Also folgt $M = \mathbb{N}$ ∎

„Dominoeffekt": $P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow \ldots$

Verschiebung des Induktionsanfangs:

Gegeben: Aussagen $P(n)$ mit $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{Z}$ fest)

Prinzip d. vollst. Induktion gilt entsprechend mit Ind. Anfang bei n_0 statt 1 (Index verschieben)

2.2. Beispiele

Vorab: Summen und Produkte

Gegeben seien reelle Zahlen a_k für $m \leq k \leq n$, wobei $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$. Man setzt

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + \ldots + a_n \quad ; \quad \prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot \ldots \cdot a_n \qquad (*)$$

Bsp: $\sum_{k=2}^{5} k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$.

Konvention für $n < m$:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := 0 \quad \text{(leere Summe)}; \quad \prod_{k=m}^{n} a_k := 1 \quad \text{(leeres Produkt)}$$

Achtung: $(*)$ ist etwas heuristisch wegen „…"

Präzise: Rekursive Definition. z. B. für $\sum_{k=1}^{n} a_k$

$$\sum_{k=1}^{0} a_k := 0 \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} a_k := \Big(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\Big) + a_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Nach Induktionsaxiom ist dann $\sum_{k=1}^{n} a_k$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ definiert.

Analog: $\prod_{k=1}^{0} a_k := 1 \quad ; \quad \prod_{k=1}^{n} a_k := \Big(\prod_{k=1}^{n-1} a_k\Big) \cdot a_n \quad (n \in \mathbb{N})$

Bsp: (1) Fakultät: Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $n!$ rekursiv durch

$$0! := 1 \quad ; \quad n! := n \cdot (n-1)! \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Also: $\underset{\uparrow}{n!} = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$

„n Fakultät"

(2) Potenzen: Sei $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$x^n := \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}} = \prod_{k=1}^{n} x \quad . \quad \text{Insbes: } x^0 = 1$$

Regeln: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$; $(x^n)^m = \underbrace{x^n \cdot \ldots \cdot x^n}_{m \text{ Faktoren}} = x^{n \cdot m}$

$(n, m \in \mathbb{N}_0)$

Beispiel 1: Arithmetische Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + \ldots + n = ?$$

Idee von C.F. Gauß (als 10-jähriger Schüler!) für $n = 100$:

$$1 + \ldots + 100 = (1+100) + (2+99) + \ldots + (50+51) =$$
$$= 50 \cdot 101 = 5050$$

Satz 2 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Beweis: mit vollst. Induktion

$$P(n): \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$$

(I) Induktionsanfang $n = 1$: $P(1)$ wahr, da $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$

(II) Induktionsschritt $n \to n+1$:

Angenommen, $P(n)$ sei wahr (Induktionsvoraussetzung, I.V.)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + (n+1) \underset{\text{I.V.}}{=} \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1)$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

$\Rightarrow P(n+1)$ ist wahr

Mit vollst. Induktion folgt die Beh. ∎

Beispiel 2: Geometrische Summenformel

Satz 3 Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$

$\uparrow$ $= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$

Beweis: Induktion nach n

(I) Ind. Anfang $n = 0$: $x^0 = 1 = \frac{1-x}{1-x}$ ✓

(II) Ind. Schritt $n \to n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} \underset{\text{I.V.}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} =$$

$$= \frac{1-x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

Ein Beweis mit vollst. Induktion setzt voraus, dass man die zu beweisende Aussage kennt, bzw. eine Vermutung dafür hat.

2.3. Etwas Kombinatorik

Für eine endliche Menge A bezeichne $|A|$ die Anzahl der Elemente von A. (Mächtigkeit von A)

Aufgabe: Sei $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Wieviele mögliche Anordnungen von $a_1, \ldots, a_n$ gibt es?

$n = 2$, $A = \{1, 2\}$: 12, 21

$n = 3$, $A = \{1, 2, 3\}$: 123, 132, 213, 231, 312, 321

Jede Anordnung von $a_1, \ldots, a_n$ ist von der Form $f(a_1) \ldots f(a_n)$ mit einer eindeutigen Bijektion $f: A \to A$, und jede solche Bij. liefert eine Anordnung von $a_1, \ldots, a_n$.

Def: Eine bijektive Abb. $f: A \to A$ heißt eine Permutation von A.

Satz 4: Sei $|A| = n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es $n!$ Permutationen von A.

Beweis: o.E. (ohne Einschränkung) $A = \{1, 2, .., n\}$
Induktion nach n:
(I) $n = 1$: Es gibt $1 = 1!$ Permutationen ✓
(II) Ind. Schritt $n \to n+1$:
Besetze zunächst Position 1; dafür gibt es $n+1$ Möglichkeiten.

$$1 \quad \underbrace{2 \quad 3 \quad \cdots \quad n+1}_{n \text{ Positionen}}$$

Nach I.V. gibt es dann $n!$ Möglichkeiten, Positionen 2 bis $n+1$ zu besetzen
$\Rightarrow$ Anzahl der Permutationen von $\{1, .., n+1\}$:
$(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ ■

/21.10.

Def. (Binomialkoeffizienten) Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{n}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{(n-j+1)}{j} = \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

sprich: „k aus n" oder „n über k"

Folgerungen: 1. $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{n} = 1$

2. $\binom{n}{k} = 0$ falls $k > n$

3. $0 \leq k \leq n \Rightarrow \binom{n}{k} \underset{\uparrow}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

erweitern mit $(n-k)!$

Satz 5. $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ für $0 \leq k \leq n$

Rekursionsformel

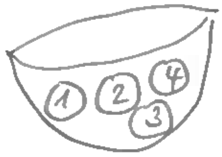
Beweis: Übung Konsequenz (Induktion nach n): $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$

Veranschaulichung: Pascalsches Dreieck

$$
\begin{array}{lccccccc}
n=0 & & & & \binom{0}{0} & & & \\
n=1 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
n=2 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
n=3 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
\quad \equiv \quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Satz 6 Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist $\binom{n}{k}$.

Beispiel: Zahlenlotto „6 aus 49“: Es werden 6 aus 49 nummerierten Kugeln gezogen, ohne Zurücklegen



Es gibt $\binom{49}{6} = 13'983'816$ mögliche Ziehungen

Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige: $\frac{1}{\binom{49}{6}} \approx \frac{1}{14 \cdot 10^6}$

Beweis v. Satz 6: Randfälle: $k > n \Rightarrow 0$ Teilmengen, $k=0$: eine ($\emptyset$)

Sonst: Veranschaulichung: Ziehe k Kugeln ohne Zurücklegen aus Urne mit n nummerierten Kugeln (zunächst unter Beachtung der Reihenfolge)

$$
\left.\begin{array}{ll}
1.\ \text{Zug}: & n \text{ Möglichkeiten} \\
2.\ \text{Zug}: & n-1 \quad \text{"} \\
\vdots & \\
k.\ \text{Zug}: & n-k+1 \quad \text{"}
\end{array}\right\}
\quad \begin{array}{l} \text{insgesamt:} \\ n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \\ \text{Möglichkeiten} \end{array}
$$

Nach Satz 4 kommt dabei jede k-elementige Teilmenge in

$k!$ verschiedenen Anordnungen (Reihenfolgen der Kugeln) vor.

$\Rightarrow$ die gesuchte Anzahl ist $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ ∎

Weitere wichtige Rolle der Binomialkoeff:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$. $(x+y)^n = ?$

$(x+y)^0 = 1$ (per Def.)

$(x+y)^1 = x+y$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ etc

<u>Satz 7</u> <u>(Binomischer Satz)</u> $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow$

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}}$$

Insbesondere (mit $y = 1$): $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

<u>Beweis</u>: Induktion nach n

(I) Ind. Anfang $n = 0$: $(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0$ ✓

(II) Ind. Schritt $n \to n+1$:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y) \cdot (x+y)^n \underset{\text{I.V.}}{=} (x+y) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) =$$

$$= x \cdot \sum_{k=0}^{n} (\ldots) + y \cdot \sum_{k=0}^{n} (\ldots)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k}}_{\substack{k_{neu} = k+1 \\ \text{Indexversch.}}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-(k-1)}$$

Bem.: Indexverschiebung: $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{k-1}$ etc.

$$\Rightarrow (x+y)^{n+1} = \underbrace{y^{n+1}}_{k=0} + \underbrace{x^{n+1}}_{k=n+1} + \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right]}_{= \binom{n+1}{k} \text{ (Satz 5)}} x^k y^{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n-k+1}$$ ∎

§3 Die reellen Zahlen

Wichtiges Ziel (historisch) der Erweiterung von Zahlbereichen:
Lösbarkeit von Gleichungen

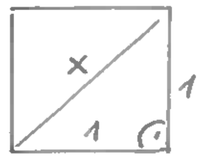
$\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$: Löse $x + n = m$ $(n, m \in \mathbb{N})$

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$: " $x \cdot n = m$ $(n, m \in \mathbb{Z}, n \neq 0)$

Aber: $x^n = m$ $(n, m \in \mathbb{N})$

hat i.A. keine Lsg in $\mathbb{Q}$

<u>Bsp</u> (vgl. Zü): Es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$
(wußten schon die Pythagoräer!)



Abhilfe: Erweiterung $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$; In $\mathbb{R}$ hat $x^2 = 2$ die Lsg $\pm\sqrt{2}$

$\mathbb{R}$ läßt sich eindeutig charakterisieren als vollständiger, angeordneter Körper. (Ziel dieses Paragraphen)

$\mathbb{Q}$: Ebenfalls angeordn. Körper, nicht vollständig.

Es gibt präzise Konstruktionen

$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ so dass $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

„Vervollständigung" von $\mathbb{Q}$, etwas aufwendig

3.1. Körper

<u>Def.</u> Ein Körper ist eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit 2 Operationen $+$ (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation),

$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ $\qquad$ $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$

$(x,y) \mapsto x + y$ $\qquad$ $(x,y) \mapsto x \cdot y$

so dass folgende Axiome erfüllt sind:

1. <u>Axiome der Addition</u>:

(A1) $\forall x,y,z \in \mathbb{K}: \quad x+(y+z) = (x+y)+z$ <u>Assoziativität</u>

(A2) $\forall x,y \in \mathbb{K}: \quad x+y = y+x$ <u>Kommutativität</u>

(A3) Existenz eines neutralen Elements:

$\exists\, 0 \in \mathbb{K}$ (<u>Null</u>): $\quad x+0 = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$

(A4) Existenz von <u>Inversen</u>: $\quad \forall x \in \mathbb{K}\ \exists y \in \mathbb{K}: x+y = 0$

Man sagt: $(\mathbb{K},+)$ ist eine abelsche Gruppe

2. <u>Axiome der Multiplikation</u>:

(M1) $\forall x,y,z \in \mathbb{K}: \quad x\cdot(y\cdot z) = (x\cdot y)\cdot z$ <u>Assoziativität</u>

(M2) $\forall x,y \in \mathbb{K}: \quad x\cdot y = y\cdot x$ <u>Kommutativität</u>

(M3) $\exists\, 1 \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ (<u>Eins</u>): $\quad x\cdot 1 = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$

(neutrales Element)

(M4) Existenz v. <u>Inversen</u>: $\quad \forall x \in \mathbb{K}\setminus\{0\}\ \exists z \in \mathbb{K}: x\cdot z = 1$

d.h. $(\mathbb{K}\setminus\{0\},\cdot)$ ist abelsche Gruppe

3. <u>Distributivgesetz</u>:

(D) $\forall x,y,z \in \mathbb{K}: \quad x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$

Wichtig: $x,y \in \mathbb{K} \Rightarrow x+y,\ x\cdot y \in \mathbb{K}$. Schreibe $x\cdot y =: xy$

<u>Satz 1</u> (<u>Folgerungen</u>). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper

(1) 0 und 1 sind eindeutig bestimmt

Beweis für 0 (für 1 analog):

Sei auch $0'$ neutral bzgl. $+$ $\Rightarrow$ $0 \underset{(A3)}{=} 0+0' \underset{K\text{-}G}{=} 0'+0 \underset{(A3)}{=} 0'$

(2) Inverse bzgl. $+,\cdot$ sind eindeutig bestimmt:

Beweis für $+$: Sei $x+y = 0 = x+y'$ $\Rightarrow$ $y \underset{(A3)}{=} y+0 =$

$= y+(x+y') \underset{A\text{-}G}{=} (y+x)+y' \underset{K\text{-}G}{=} (x+y)+y' =$

$= 0+y' \underset{K\text{-}G}{=} y'+0 \underset{(A3)}{=} y'$

Bez: $-x$: additives Inverses von x

$x^{-1} = \frac{1}{x}$: multiplikatives Inverses von $x \neq 0$ //

(3) $a, b \in K \Rightarrow$ die Gleichung $a + x = b$ hat eine eindeutige Lösung in $\mathbb{K}$, nämlich $x = b + (-a) =: b - a$

Falls $a \neq 0 \Rightarrow$ auch $a \cdot x = b$ hat eind. Lsg in $\mathbb{K}$, nämlich $x = b \cdot \frac{1}{a} =: \frac{b}{a}$

Beweis für $+$: $a + x = b \Leftrightarrow a + x + (-a) = b + (-a)$

$\underset{A\text{-}G + K\text{-}G}{\Leftrightarrow} \underbrace{a + (-a)}_{=0} + x = b - a \Leftrightarrow x = b - a$.

(4) $-(-x) = x$; ferner für $x \neq 0$: $(x^{-1})^{-1} = x$

Bew. für $-x$: $(-x) + x \underset{K\text{-}G}{=} x + (-x) = 0 \underset{(2)}{\Rightarrow} x = -(-x)$

(5) $-(x+y) = -x - y$; falls $xy \neq 0$: $(xy)^{-1} = x^{-1} y^{-1}$ (Üb.)

(6) $\forall x \in \mathbb{K}$: $x \cdot 0 = 0$

Denn: $x \cdot 0 + x \cdot 0 \underset{(D)}{=} x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 \underset{(3)}{\Rightarrow} x \cdot 0 = x \cdot 0 - x \cdot 0 = 0$

(7) $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$

(8) $(-x)y = -xy$; $(-x)\cdot(-y) = xy$

Speziell: $(-1) \cdot y = -y$

} Üb.

Endliche Summen und Produkte: Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} x_k := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k\right) + x_n, & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Wiederholte Anwend. des A- und K-Gesetzes $\Rightarrow$ Ergebnis ist unabh. von Reihenfolge der Summanden und Klammerungen.

Analog Produkte: $\prod_{k=1}^{0} x_k := 1$; $\prod_{k=1}^{n} x_k := \left(\prod_{k=1}^{n-1} x_k\right) \cdot x_n$

Potenzen: Sei $x \in K$

$$x^n := \prod_{k=1}^{n} x \quad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{Insbes: } x^0 = 1$$

Falls $x \neq 0$: $\quad x^{-n} := (x^{-1})^n \quad (n \in \mathbb{N})$

Damit: $\quad x^{-n} = (x^n)^{-1} \qquad$ (da $x^n \cdot (x^{-1})^n = 1$)

Regeln: $n, m \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow x^n x^m = x^{n+m}$; $x^n y^n = (xy)^n$; $(x^n)^m = x^{nm}$

Falls $x, y \neq 0$, gelten diese $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

Bsp: $x^n y^n = (xy)^n$ für $n < 0$:

$$x^n y^n = (x^{-n})^{-1} (y^{-n})^{-1} \underset{(5)}{=} (x^{-n} y^{-n})^{-1} \underset{-n>0}{=} [(xy)^{-n}]^{-1} = (xy)^n$$

Beispiele: $\mathbb{Q}$ ist Körper mit den üblichen Operationen.

$\mathbb{Z}$ nicht: nur $+1, -1$ haben multipl. Inverse in $\mathbb{Z}$!

Bsp eines endlichen Körpers: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$
mit Operationen gemäß folgender Verknüpfungstafeln:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

In $\mathbb{F}_2$ gilt also:
$1 + 1 = 0$

Nachweis d. Axiome: direktes Nachrechnen.

3.2. Angeordnete Körper

Def. Eine Relation auf einer Menge X ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$.

Schreibweise: $(x,y) \in R$ oder xRy „x steht in Relation zu y"

Bsp: $X = \mathbb{Z}$, $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} : x \mid y \ (x \text{ teilt } y)\}$

d.h. $\exists k \in \mathbb{Z} : y = kx$

(bekannt aus LA)

Def. Ein <u>angeordneter Körper</u> ist ein Körper $\mathbb{K}$ zusammen mit einer Relation „$<$" (kleiner) auf $\mathbb{K}$, so dass gilt:

(O1) $\forall x, y \in \mathbb{K}$ gilt genau 1 der Aussagen

$x < y, \; x = y, \; y < x$ — Trichotomie

(O2) $x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$ — Transitivität

(O3) $x < y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{K}: \; x + z < y + z$

(O4) $0 < x \wedge 0 < y \Rightarrow 0 < xy$

(O3), (O4): Verträglichkeitsaxiome

(Anordnungsaxiome)

Bez: $x > y \;:\Leftrightarrow\; y < x$

($:\Leftrightarrow$ steht für eine definierte Äquivalenz zweier Aussagen)

$x \leq y \;:\Leftrightarrow\; x < y \vee x = y$; $\quad x \geq y :\Leftrightarrow y \leq x$

$x \in \mathbb{K}$ heißt <u>positiv</u>/<u>negativ</u>, falls $x > 0$ / $x < 0$.

Satz 2 (Folgerungen)

(1) $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$

(2) $x < y \Leftrightarrow x - y < 0 \Leftrightarrow y - x > 0 \Leftrightarrow -x > -y$

Bsp:

(3) $x < y \wedge a < b \Rightarrow x + a < y + b$

Insbes: $y > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow y + b > 0$

(4) $x < y \wedge a > 0 \Rightarrow ax < ay$ (i)

$x < y \wedge a < 0 \Rightarrow ax > ay$ (ii)

(5) $0 \leq x < y \wedge 0 \leq a < b \Rightarrow ax < by$

(6) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$. Insbes: $1 = 1^2 > 0$

(7) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

(8) $0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$

Beweis: (1) $x<0 \underset{(O3)}{\Longrightarrow} 0 = x-x < -x$; „$\Leftarrow$" analog

(2) Beweis mit Zirkelschluss: Zum Nachweis einer Kette $P_1 \Longleftrightarrow P_2 \Longleftrightarrow \dots \Longleftrightarrow P_n$ zeigt man:

$P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_n \Rightarrow P_1$

Hier: $x<y \underset{(O3)}{\Longrightarrow} x-y < y-y = 0$.

$x-y<0 \underset{(1)}{\Longrightarrow} y-x = -(x-y) > 0$

$y-x>0 \Longrightarrow -x = (y-x)-y > -y$

$-x > -y \underset{+y+x}{\Longrightarrow} y > x$

(3) $x<y \underset{(O3)}{\Longrightarrow} x+a < y+a$; $a<b \underset{(O3)}{\Longrightarrow} y+a < y+b$

$<$ transitiv $\Longrightarrow x+a<y+b$

(4) (i) $a>0 \Longrightarrow ay-ax = a\underbrace{(y-x)}_{>0} > 0$ nach (O4)

(ii) $a<0 \underset{(1)}{\Longrightarrow} -a>0 \Longrightarrow ax-ay = (-a)(y-x) > 0$

(5) $by-ax = by-ay+ay-ax = \underbrace{(b-a)}_{>0}\underbrace{y}_{>0} + \underbrace{a}_{\geq 0}\underbrace{(y-x)}_{>0} > 0$

nach (O4) und (3)

(6) Falls $x>0 \underset{(O4)}{\Longrightarrow} x^2 = x \cdot x > 0$

Falls $x<0 \Longrightarrow -x>0 \Longrightarrow x^2 = (-x)\cdot(-x) > 0$

(7) $x>0 \Rightarrow x^{-1} \neq 0$, da sonst $1 = x \cdot x^{-1} = 0$ ↯

$\underset{(6)}{\Longrightarrow} (x^{-1})^2 > 0 \underset{(O4)}{\Longrightarrow} x^{-1} = x \cdot (x^{-1})^2 > 0$.

(8) Multipliziere die Ungl. mit $x^{-1}y^{-1} > 0$ ∎

Bsp: $\mathbb{Q}$ ist angeordneter Körper mit der üblichen Rel. $<$

$\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ kann nicht angeordnet werden, denn:

In $\mathbb{F}_2$ gilt: $1+1=0$. Wäre $\mathbb{F}_2$ angeordnet, so wäre

$1>0 \Longrightarrow 0 = 1+1 > 0$ ↯

Satz 3 (Bernoulli-Ungleichung)

Sei $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper, $x \in \mathbb{K}$ mit $x \geq -1 \Rightarrow$
$\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$

wo $n \cdot x := \underbrace{x + \dots + x}_{n \text{ Summen.}} = \sum_{k=1}^{n} x$. Insbes: $0 \cdot x = 0$

Beweis (mit vollst. Ind.)

$n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$ ✓

$n \to n+1$: $(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \cdot (1+x)^n \underset{\text{I.V.}}{\geq} (1+x) \cdot (1+nx)$

$= 1 + nx + x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)x$ ■

Def. Sei $\mathbb{K}$ angeordneter Körper. Für $x, y \in \mathbb{K}$ setze

$$\max(x,y) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{Maximum von } x, y$$

$$\min(x,y) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq y \\ y & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{Minimum von } x, y$$

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \qquad \underline{\text{Betrag}} \text{ von } x$$

Also: $|x| = \max(x, -x)$. Insbes: $|x| = |-x|$

Satz 4 (Eigenschaften des Betrags)

(i) $|x| \geq 0$, wobei $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$ (Multiplikativität)

(iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecks-Ungleichung)

Beweis: (i) ist klar

(ii) $\xi := |x|$, $\eta := |y| \Rightarrow x = \pm \xi$, $y = \pm \eta \Rightarrow$

$|xy| = |\pm \xi\eta| \underset{\xi\eta \geq 0}{=} \xi\eta = |x| \cdot |y|$

(iii) $\pm x \leq |x|,\ \pm y \leq |y| \underset{\text{Satz 1(3)}}{\Longrightarrow} \pm(x+y) \leq |x|+|y| \Rightarrow$ Beh. //

<u>Korollar</u> (1) $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$ umgekehrte Δ-Ungl.

"Folgerung" (2) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ falls $y \neq 0$

<u>Beweis:</u> (1) $|x| = |x-y+y| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |x-y|+|y| \Rightarrow$
$|x|-|y| \leq |x-y|$. Vertausche $x, y \Rightarrow |y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$

Zusammen folgt die Beh.

(2) $x = \frac{x}{y}\cdot y \Rightarrow |x| = \left|\frac{x}{y}\right|\cdot|y| \overset{|y|\neq 0}{\Longrightarrow} \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ∎

Zum Auflösen von Beträgen: Für $a \geq 0$ gilt: $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

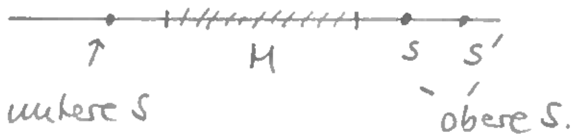
3.3. Das Vollständigkeitsaxiom

Hier stets: $\mathbb{K}$ ein angeordneter Körper

<u>Def.</u> Sei $M \subseteq \mathbb{K}$

(1) $s \in \mathbb{K}$ heißt <u>obere</u> [untere] <u>Schranke</u> von M, falls
$\forall x \in M: x \leq s \qquad [x \geq s]$

(2) M heißt <u>nach oben</u> [unten] <u>beschränkt</u>, falls eine obere [untere] Schranke $s \in \mathbb{K}$ von M existiert



Ist s obere S. von M und $s' \geq s$, so ist auch s' obere S. von M

(3) M <u>beschränkt</u> $:\Leftrightarrow$ M nach oben <u>und</u> unten beschränkt

(4) $m_0 \in M$ heißt <u>Maximum</u> [Minimum] von M, wenn es zugleich obere [untere] Schranke von M ist.
Bez: $m_0 = \max M$ bzw. $m_0 = \min M$

Beachte: $\max M$, $\min M$ sind, falls existent, eindeutig.

Denn: Seien m_0, m_0' Max. von M $\Rightarrow$

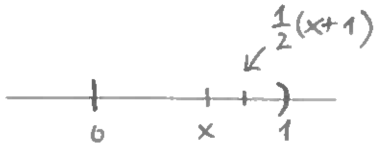
$m_0' \leq m_0$ (da m_0 Max.), ebenso $m_0 \leq m_0'$ $\Rightarrow$ $m_0' = m_0$

<u>Bsp</u>: 1. $M = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{Q}$

M ist beschr., jedes $s \in \mathbb{Q}$, $s \geq 1$ ist obere Schranke, jedes $t \in \mathbb{Q}$, $t \leq 0$ untere S,

$1 = \max M$, $0 = \min M$

2. $M = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\}$



M hat <u>kein</u> Max, denn: Sei $x \in M$

$x' := \frac{1}{2}(x+1) \Rightarrow x' \in M$, $x' > x$ $\Rightarrow$ x ist keine obere Schranke von M.

Analog: $\{x \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\}$ hat kein Minimum.

<u>Def.</u> Sei $M \subseteq \mathbb{K}$.

(1) $s \in \mathbb{K}$ heißt <u>Supremum</u> von M $:\Leftrightarrow$ s ist kleinste obere Schranke von M. Dh:

(i) s ist obere Schranke von M, und

(ii) $s \leq s'$ für jede weitere obere Schranke s' von M

(2) $t \in \mathbb{K}$ <u>Infimum</u> von M $:\Leftrightarrow$ t ist größte untere Schranke von M.

<u>(1)(ii) zeigt:</u> M hat höchstens 1 Supremum s, $s = \sup M$

Analog: M hat höchstens 1 Infimum t, $t = \inf M$

<u>Bsp</u>: $M = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x < 1\} \Rightarrow \sup M = 1$

Denn: 1 ist obere Schranke, und kein $x < 1$ ist obere Schranke von M, siehe Bsp 2 oben.

<u>Beachte</u>: Hat M ein Maximum $m_0 = \max M$, so ist zugleich

$m_0 = \sup M$ (denn: $x < m_0 \underset{m_0 \in M}{\Longrightarrow}$ x ist keine obere Schr. von M)

Analog: Hat M ein Minimum m_0, so ist zugleich $m_0 = \inf M$

<u>Vollständigkeitsaxiom</u>: Ein angeordneter Körper heißt (ordnungs-) <u>vollständig</u> oder <u>vollständig angeordnet</u> :$\Longleftrightarrow$ Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{K}$.

$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig! Beweis in Kürze

<u>Satz 5</u> Es gibt einen vollst. angeordneten Körper, der $\mathbb{Q}$ als angeordneten Körper umfaßt. Dieser ist bis auf Umbenennungen (Isomorphie) eindeutig und heißt der <u>Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen</u>

Hier ohne Beweis! Konstr. von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$: evtl. später

<u>Bem. zur Eindeutigkeit</u>: Seien $(\mathbb{K},+,\cdot,<)$ und $(\mathbb{K}',+',\cdot',<')$ zwei vollst. angeordnete Körper $\Longrightarrow$ $\exists$ Bijektion $f: \mathbb{K} \to \mathbb{K}'$ mit
$f(x+y) = f(x) +' f(y)$, $f(x \cdot y) = f(x) \cdot' f(y)$,
$x < y \Longleftrightarrow f(x) <' f(y)$

Man sagt: je 2 vollst. angeordnete Körper sind isomorph.

3.4. Konsequenzen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$

Notationen:

Intervalle: seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$(a,b) := \{\ \text{"} : a < x < b\}$ offenes "

$[a,b) := \{\ \text{"} : a \leq x < b\}$
$(a,b] := \{\ \text{"} : a < x \leq b\}$ } halboffene Intervalle

$b - a \geq 0$: Länge des Intervalls

Ferner: $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
↑ Symbol für Unendlich

$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

Analog (a, ∞), $(-\infty, a)$

} Unbeschränkte Intervalle

Erweiterte reelle Zahlengerade: $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

mit $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Vorsicht: Addition, Multiplikation nur bedingt auf $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ ausdehnbar!

Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ besagt:

Jede nichtleere, nach oben beschr. Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$. Bsp: $\sup [a,b] = \sup [a,b) = b$

Folgerung: Jede nichtleere, nach unten beschr. Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.

Denn: $-M := \{-x : x \in M\}$ hat sup. s $\Rightarrow$ $-s = \inf M$

Bsp: $\inf (a,b] = a$

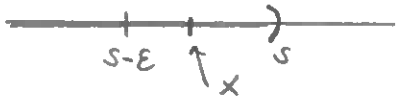
Konvention: Sei $M \subseteq \mathbb{R}$

$\sup M := \infty$, falls M nach oben unbeschr.

$\inf M := -\infty$, " " " unten "

Lemma 1 Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ nach oben beschr; $s = \sup M$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \underset{\substack{\uparrow \\ \text{abh. von } \varepsilon}}{x} \in M : \; s - \varepsilon < x \leq s$



Beweis: $s-\varepsilon$ ist keine obere Schranke von M (da s die kleinste)

$\Rightarrow \exists x \in M: \; x > s - \varepsilon$. Dabei $x \leq s$, da s obere S. von M ■

Satz 6 (Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$)

(AR) $\forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} : \; n > x$

D.h.: $\mathbb{N}$ ist nach oben unbeschränkt in $\mathbb{R}$

Beweis: Ang. (AR) gilt nicht $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}: \; n \leq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

D.h. $\mathbb{N}$ ist nach oben beschr. $\Rightarrow$ $s = \sup \mathbb{N}$ exist. in $\mathbb{R}$

$\underset{\text{Lemma 1, } \varepsilon = 1}{\Longrightarrow} \; \exists n \in \mathbb{N} : \; s - 1 < n \;\Rightarrow\; \underbrace{n+1}_{\in \mathbb{N}} > s$ ↯

Satz 7 Folgerungen aus (AR)

(1) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \; \frac{1}{n} < \varepsilon$ Das zeigt: $\inf \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$

(2) Wachstum von Potenzen:

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1 \Rightarrow \forall M \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} : \; a^n > M$

(3) Sei $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n \in \mathbb{N} : \; a^n < \varepsilon$

Beweis: (1) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. (AR) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{\varepsilon}$

$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$

(2) Sei $M \in \mathbb{R}$. $a = 1 + x$ mit $x := a - 1 > 0$.

Bernoulli-Ungl. $\Rightarrow a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(AR) $\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}: \ n > \frac{M}{x}$. Damit $a^n > M$.

(3) Sei $\varepsilon > 0$. $\frac{1}{a} > 1 \underset{(2)}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: \left(\frac{1}{a}\right)^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow a^n < \varepsilon$ ∎

// 30.10

Weitere wichtige Konsequenz der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$:

<u>Satz 8: Existenz von Wurzeln</u>

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ und $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists!\, x \in \mathbb{R},\ x \geq 0: x^k = a$

Schreibweise: $x = a^{1/k} = \sqrt[k]{a}$ (k-te Wurzel aus a)

$\sqrt[2]{a} =: \sqrt{a}$ (Quadratwurzel)

Beachte: $\sqrt[k]{a} > 0$ für $a > 0$; $0 < x < y \underset{\substack{\uparrow \\ \text{H1 Blatt 3}}}{\Longleftrightarrow} \sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$

Zum Beweis benötigen wir:

<u>Lemma 2</u>: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x \leq y$ und $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$0 \leq y^k - x^k \leq k(y-x)y^{k-1}$

<u>Beweis</u>: $x^k \leq y^k$ gem. H1, Bl. 3

$y^k - x^k = (y-x) \cdot (y^{k-1} + xy^{k-2} + \ldots + x^{k-2}y + x^{k-1})$

denn: $(y-x) \cdot \sum_{l=0}^{k-1} x^l y^{k-1-l} = \sum_{l=0}^{k-1} x^l y^{k-l} - \underbrace{\sum_{l=0}^{k-1} x^{l+1} y^{k-1-l}}_{= \sum_{l=1}^{k} x^l y^{k-l}} = y^k - x^k$

$\Rightarrow y^k - x^k \leq (y-x) \cdot k \cdot y^{k-1}$ ∎

<u>Beweis v. Satz 8</u>:

(I) <u>Eindeutigkeit</u>: Seien $x_1, x_2 \geq 0$, $x_1 \neq x_2$ mit $x_1^k = x_2^k = a$

Etwa $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^k < x_2^k$ ↯

(II) <u>Existenz</u>: Sei o.E. $k \geq 2$ und $a > 1$

(für $a = 0, a = 1$: klar; für $0 < a < 1$: betrachte $\frac{1}{a} > 1$

Falls $y^2 = \frac{1}{a} \Rightarrow \left(\frac{1}{y}\right)^2 = a$)

$M := \{ y > 0 : y^k \le a \}$

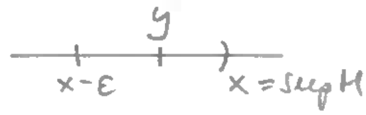
$M \neq \emptyset$, da $1 \in M$. M nach oben beschr. durch a, denn:

angen. $\exists\, y \in M,\ y > a \Rightarrow y^k > a^k > a$ (da $a > 1$) $\lightning$

Setze $x := \sup M$. Dann $x \geq 1$. <u>Beh:</u> $x^k = a$

<u>Annahme 1:</u> $x^k > a \Rightarrow \varepsilon := \dfrac{x^k - a}{k x^{k-1}} > 0$

Lemma 1 $\Rightarrow \exists\, y \in M: x - \varepsilon < y \le x$ (*)



$y \in M \Rightarrow y^k \le a$

$\Rightarrow x^k - a \le x^k - y^k \underset{\text{Lemma 2}}{\le} k(x-y)x^{k-1} \underset{(*)}{<} k \varepsilon x^{k-1} = x^k - a \ \lightning$

<u>Annahme 2:</u> $x^k < a \Rightarrow \dfrac{a}{x^k} - 1 > 0$

$r := \min\left(\frac{1}{2^k}\left(\frac{a}{x^k} - 1\right), 1 \right) \in (0,1]$

$\Rightarrow (1+r)^k \underset{\text{Binom. Satz}}{=} 1 + \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} r^j \underset{r \le 1}{\le} 1 + r \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} \underset{\text{Blatt 2, T1(b)}}{=}$

$= 1 + r(2^k - 1) < 1 + r \cdot 2^k \le \dfrac{a}{x^k}$

$\Rightarrow [x(1+r)]^k \le a \Rightarrow x(1+r) \in M$, aber $x(1+r) > x$

$\lightning$ zu $x = \sup M$ ∎

<u>Rechenregel:</u> Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y \geq 0$ und $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\sqrt[k]{x} \cdot \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{xy}$

Denn: $(\sqrt[k]{x} \cdot \sqrt[k]{y})^k = (\sqrt[k]{x})^k \cdot (\sqrt[k]{y})^k = xy \xRightarrow[\text{d. Wurzel}]{\text{Eindeutigk.}}$ Beh.

Wir wissen: $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Also $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$

Die Zahlen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen <u>irrational</u>

Alle Resultate aus Abschnitt 3.4. gelten ebenso für einen beliebigen vollständig angeordneten Körper $\mathbb{K}$ statt $\mathbb{R}$.

Korollar: $\mathbb{Q}$ ist (als angeordneter Körper) nicht vollständig

Beweis: Angen. $\mathbb{Q}$ wäre vollst. $\Rightarrow$ Satz 8 (Existenz von Wurzeln) gilt in $\mathbb{Q}$ $\Rightarrow \exists x \in \mathbb{Q}: x^2 = 2$ ↯

Konkretes Bsp: $M = \{y \in \mathbb{Q} : y > 0,\ y^2 \leq 2\}$
hat kein sup in $\mathbb{Q}$

Denn ang. $x = \sup M \in \mathbb{Q}$ exist. $\underset{\text{Bew. von Satz 8}}{\Longrightarrow}$ $x^2 = 2$ ↯

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist groß. Dennoch gilt:

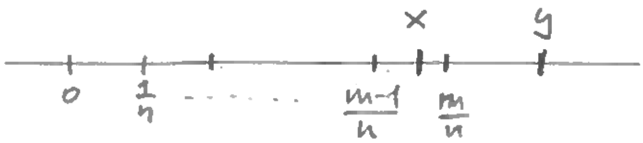
Satz 9. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}: x < q < y$
Man sagt: $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$

Der Beweis beruht auf dem
Wohlordnungsprinzip: Sei $M \subseteq \mathbb{N}$, $M \neq \emptyset \Rightarrow M$ hat ein Minimum
(Konsequenz des Induktionsaxioms, vgl. ZÜ 1)

Beweis v. Satz 9: o.E. $x > 0$, denn sonst wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > -x$ (nach (AR)) $\Rightarrow 0 < n + x < n + y$. Sei $q \in \mathbb{Q}$, $q \in (n+x, n+y) \Rightarrow q - n \in (x, y)$

Nun: $0 < x < y \Rightarrow y - x > 0 \underset{(AR)}{\Longrightarrow} \exists n \in \mathbb{N}: y - x > \frac{1}{n}$

Betrachte $\frac{k}{n}$, $k \in \mathbb{N}$



$m := \min \underbrace{\{k \in \mathbb{N} : \tfrac{k}{n} > x\}}_{\neq \emptyset} \in \mathbb{N}$ (exist. nach Wohlord. Prinzip)

$\Rightarrow \frac{m-1}{n} \leq x < \frac{m}{n}$ und $y > x + \frac{1}{n} \geq \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m}{n} \in (x, y)$ ∎

§4 Folgen

4.1. Konvergenzbegriff

<u>Def.</u> Sei X eine Menge. Eine Folge in X ist eine Abb.

$$f: \mathbb{N} \to X, \quad n \mapsto a_n = f(n)$$

Schreibweise: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$; kurz: (a_n)

Varianten: Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \dots)$

$(a_n)_{n\geq k} = (a_k, a_{k+1}, \dots)$ mit festem $k \in \mathbb{Z}$

Folgen in $\mathbb{R}$: reelle Folgen

<u>Bsp:</u> 1. $a_n = n^2$; $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 4, 9, 16, \dots)$

2. $a_n = (-1)^n \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, -1, 1, -1, \dots)$

3. Konstante Folgen: $a_n = a \ \forall n \in \mathbb{N}$; $(a_n) = (a, a, a, \dots)$

Dagegen: $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{a\}$

Also: unterscheide $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$!

4. <u>Fibonacci-Folge</u>: rekursiv definiert durch

$a_0 := 1,\ a_1 := 1$; $a_{n+1} := a_n + a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$

<u>Def.</u> Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ heißt <u>konvergent</u>, falls ein $a \in \mathbb{R}$ exist. so dass gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \underset{\substack{\| \\ n_0(\varepsilon)}}{n_0} \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

Dh. $\forall \varepsilon > 0$ liegen alle bis auf höchstens endlich viele Folgenglieder im Intervall $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

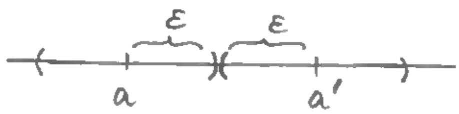
a: <u>Grenzwert</u> (<u>Limes</u>) der Folge (a_n)

Schreibweise: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a$ für $n \to \infty$

Lemma 1 Der Grenzwert einer konvergenten Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Sei $a_n \to a$, $a_n \to a'$. Annahme: $a \neq a'$

$\Rightarrow \varepsilon := \frac{1}{2}|a-a'| > 0 \quad \Rightarrow \exists\, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$:



$|a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_1$, $|a_n - a'| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_2$

setze $n_0 := \max(n_1, n_2)$.

$$n \geq n_0 \Rightarrow |a-a'| = |a - a_n + a_n - a'| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a-a_n| + |a_n - a'|$$
$$< 2\varepsilon = |a-a'| \;\lightning \quad \blacksquare$$

Bez: 1. Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ heißt <u>Nullfolge</u>

2. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt <u>divergent</u>

Beachte: Abändern/Weglassen von endlich vielen Folgengliedern ändert nicht das Konvergenzverhalten und den Grenzwert.

Beispiele: (1) $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0}$ (Nullfolge)

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht: $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0$

Wähle (mit (AR)) $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$n \geq n_0 \Rightarrow |\frac{1}{n}| \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \quad \blacksquare$

(2) $a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 & \text{"} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert, denn:

$|a_{n+1} - a_n| = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ang. $a_n \to a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < 1 \quad \forall n \geq n_0$

Also: $n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+1} - a_n| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < 2 \;\lightning$

(3) Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

Beweis: sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: |x^{n_0}| = |x|^{n_0} < \varepsilon$
$\overset{\text{Satz 7}}{}$

$n \geq n_0 \Rightarrow |x^n| = |x|^n \underset{|x|<1}{\leq} |x|^{n_0} < \varepsilon \Rightarrow$ Beh.

(4) $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$

Folgt aus (3), da $\frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$ und $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$

(5) $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1}$

Beweis: $n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} > 1 \Rightarrow x_n := \sqrt[n]{n} - 1 > 0$

$\Rightarrow n = (1 + x_n)^n \underset{\text{Binom. Satz}}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_n^k = 1 + x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \ldots$

$> 1 + \binom{n}{2} x_n^2$

$\Rightarrow n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} x_n^2 \Rightarrow 0 < x_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$

$n \geq n_0 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{n_0}} < \varepsilon$, sofern $n_0 > \frac{2}{\varepsilon^2} \Rightarrow x_n \to 0$ ∎

Def. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt beschränkt, falls
$\exists M > 0: |a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Lemma 2 Jede konvergente Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt.

Beweis: sei $a_n \to a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: |a_n - a| \leq 1 \quad \forall n \geq n_0$

$n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$

$\forall n \in \mathbb{N}$ gilt also: $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_{n_0}|, 1 + |a|\} =: M$

Bsp: $x \in \mathbb{R}$, $|x| > 1 \underset{\text{Satz 7}}{\Rightarrow} (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschr., also divergent

Die umgekehrte Aussage in Lemma 2 gilt nicht!
Bsp: $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Bem: Seien $(a_n), (b_n)$ Folgen mit $|a_n| \leq |b_n|$ und $b_n \to 0$
$\Rightarrow a_n \to 0$ (klar)

Satz 1 (Regeln für Grenzwerte)

Seien $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}$ Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$. Dann:

(1) $a_n + b_n \to a+b$

(2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

(3) Ist $b \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: b_n \neq 0 \ \forall n \geq N$, und $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

(4) $|a_n| \to |a|$

Konsequenz aus (1), (2) mit konst. Folge $b_n = b \ \forall n$:

$$a_n \to a \Rightarrow a_n + b \to a+b, \quad a_n \cdot b \to a \cdot b$$

Beweis: (1) $|a_n + b_n - (a+b)| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| =: s_n$

Zu $\varepsilon > 0$ wähle n_0 so groß, dass

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow s_n < \varepsilon \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ Beh.

(2) Übung

(3) Wegen (2) genügt es z. zeigen: $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$

$|b| > 0$ und $b_n \to b \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \ \forall n \geq N$

Dann: $|b_n| = |b - (b - b_n)| \underset{\text{Umgek. }\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} |b| - |b_n - b| > \frac{|b|}{2}$

Also: $n \geq N \Rightarrow \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n|$

$|b - b_n| \to 0 \underset{(2)}{\Longrightarrow} \frac{2}{|b|^2} \cdot |b - b_n| \to 0 \underset{\text{Bem. oben}}{\Longrightarrow} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \to 0$

(4) $\big||a_n| - |a|\big| \underset{\text{Umg. }\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} |a_n - a| \to 0 \Rightarrow$ Beh. ∎

Bsp. 1. $k \in \mathbb{N}$ fest $\Rightarrow$ $\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0}$

Also: $\frac{1}{n^2} \to 0$, $\frac{1}{n^3} \to 0$ etc.

Folgt mit (2) + Induktion aus $\frac{1}{n} \to 0$

2. $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \Rightarrow a_n \to 1$

3. $a_n = \frac{n^2-5}{2n^2+n} \underset{\text{Trick}}{=} \frac{\cancel{n^2}(1-\frac{5}{n^2})}{\cancel{n^2}(2+\frac{1}{n})} \to \frac{1}{2}$

<u>Satz 2</u> (1) <u>Vergleichskriterium</u>: Seien $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b$ und $a_n \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow a \leq b$

(2) Spezielle: Sei $a_n \to a$, $A \leq a_n \leq B \;\; \forall n \Rightarrow A \leq a \leq B$

(3) <u>Sandwich-Regel</u>: Seien $(a_n), (c_n) \subseteq \mathbb{R}$ Folgen mit $a_n \leq c_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

Sei $(b_n) \subseteq \mathbb{R}$ weitere Folge mit $a_n \leq b_n \leq c_n \; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (b_n)$ konvergiert, und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$

<u>Bem</u>: Die Bed. „$\forall n \in \mathbb{N}$" kann überall ersetzt werden durch „$\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$" (N geeignet)

<u>Bsp</u>: $x > 0 \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1}$

Bew: o.E. $x > 1$ (betrachte sonst $\frac{1}{x}$; $x = 1$ klar)

$\Rightarrow 1 < \sqrt[n]{x} < \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1 \text{ (Bsp (5))}}$ für $n > x$ $\underset{\text{Sandwich-R.}}{\Longrightarrow}$ Beh.

<u>Beweis v. Satz 2</u>. (1) Ang. $a > b$. Setze $\varepsilon := a - b > 0$

$\Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$

$\Rightarrow 0 \leq b_n - a_n = \underbrace{(b_n - b)}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{(b-a)}_{=-\varepsilon} + \underbrace{(a - a_n)}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < 0 \;\; ↯$

(3) $|b_n - a| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} (b_n - a_n) + |a_n - a| \leq \underbrace{(c_n - a_n)}_{\to 0} + \underbrace{|a_n - a|}_{\to 0} =: s_n$

Regel (1), Satz 1 $\Rightarrow s_n \to 0 \Rightarrow |b_n - a| \to 0$ ∎

Bsp: Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 1$ und $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{x^n} = 0}$$

D.h. $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ wächst schneller als jede Potenz von n.

Beweis: $r := |x| - 1 > 0 \Rightarrow |x|^n = (1+r)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} r^j$

Sei $n \geq 2k$ $(\geq k+1)$ $\Rightarrow$

$$|x|^n \geq \binom{n}{k+1} r^{k+1} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!} r^{k+1} \underset{n-k \geq \frac{n}{2}}{\geq} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^{k+1}}{(k+1)!} r^{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{n^k}{|x|^n} \leq \frac{2^{k+1}(k+1)!}{r^{k+1}} \cdot \frac{1}{n} \to 0 \text{ für } n\to\infty \quad \blacksquare$$

4.2. Monotone Folgen

Def. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt

monoton wachsend $:\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

monoton fallend $:\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n \quad$ "

Ist dabei stets $a_{n+1} > a_n$ bzw. $a_{n+1} < a_n$, so spricht man von strenger Monotonie.

Bsp: $a_n = n^2$ streng monoton wachsend

$a_n = \frac{1}{n}$ " " fallend

$a_n = (-1)^n$ nicht monoton

Satz 3 (Monotonie-Kriterium) Jede monotone und beschränkte Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ ist konvergent.

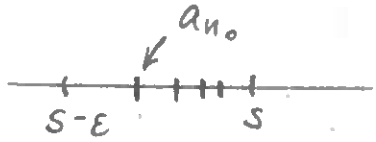
Dabei gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} & \text{falls } (a_n) \text{ mon. wachsend} \\ \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\} & \text{" " " fallend} \end{cases}$$

<u>Beweis</u> (für wachsend) $\quad s := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \quad s - \varepsilon < a_{n_0}$ $\quad$ (da $s-\varepsilon$ keine obere S.)

Monotonie von $(a_n) \Rightarrow$



$\forall n \geq n_0 : \quad s - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq s$

$\qquad \Rightarrow |a_n - s| < \varepsilon \quad \blacksquare$

<u>Bem:</u> Es genügt, dass (a_n) monoton ab einem gewissen $N \in \mathbb{N}$.

<u>Beispiel:</u> <u>Algorithmus zur Berechnung der Quadratwurzel</u>
(Babylonisches Wurzelziehen)

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Gesucht: $\sqrt{a}$

Definiere rekursiv Näherungen x_n, $n \in \mathbb{N}_0$:

$x_0 > 0$ beliebig (z. B. $x_0 := a$)

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $\quad n \in \mathbb{N}_0$

Idee dahinter: Sei x Näherung für $\sqrt{a}$, $\; x > \sqrt{a} \Rightarrow \frac{a}{x} < \sqrt{a} \Rightarrow$
Betrachte $\frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ als neue Näherung.

//

<u>Beh:</u> $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

<u>Beweis:</u> Induktion zeigt: $\quad x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Ferner: $\quad x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2} - 4a\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 \geq 0$$

$\underset{x_n > 0}{\Longrightarrow} \quad x_n \geq \sqrt{a} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$

Beh: $(x_n)_{n \geq 1}$ ist monoton fallend.

Denn: $\quad x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n} - 2x_n\right) = \frac{1}{2x_n}\left(a - x_n^2\right) \underset{(*)}{\leq} 0$

Wegen (*) ist (x_n) auch beschr.

Monotoniekrit. $\Rightarrow$ $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$ existiert,

$x \geq \sqrt{a}$ wegen (*) (Vergleichskrit.)

$x = ?$

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & & \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \Rightarrow x^2 = a \underset{x>0}{\Rightarrow} x = \sqrt{a}$$

Das Verfahren konvergiert sehr rasch!

4.3. Teilfolgen, Cauchyfolgen

Def. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Folge

Ist $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ eine streng mon. wachsende Folge von Indizes $n_k \in \mathbb{N}$, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots)$ eine Teilfolge von (a_n)

Ist $J = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, so schreibt man auch $(a_j)_{j\in J}$

Bsp: 1. $n_k = k^2 \Rightarrow (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_1, a_4, a_9, \ldots)$

2. $(a_j)_{j \text{ Primzahl}} = (a_2, a_3, a_5, a_7, \ldots)$

Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ konvergent mit Limes a $\Rightarrow$ Jede Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) ist ebenfalls konv. mit Limes a

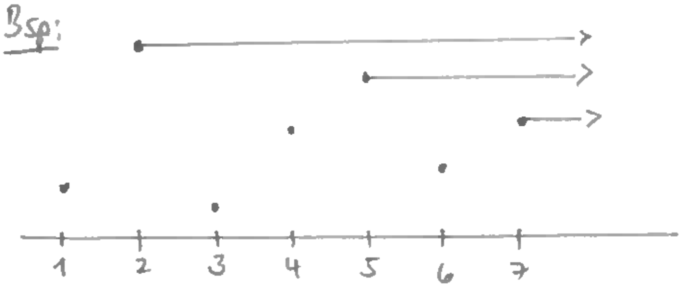
(denn: Sei $|a_n - a| < \varepsilon \;\forall n \geq n_0 \underset{n_k \geq k}{\Rightarrow} |a_{n_k} - a| < \varepsilon \;\forall k \geq n_0$)

Lemma 3: Jede reelle Folge (a_n) besitzt eine monotone Teilfolge

Beweis: Nenne a_n hoch, falls $a_m \leq a_n$ für alle $m > n$

$J := \{n \in \mathbb{N} : a_n \text{ hoch}\}$

Bsp:



$J = \{2, 5, 7, \dots\}$

$(a_j)_{j \in J} = (a_2, a_5, a_7, \dots)$

1. Fall: $|J| = \infty$ (dh. J ist unendlich) $\Rightarrow$ $(a_j)_{j \in J}$ ist monoton fallende Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

2. Fall: $|J| < \infty \Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: kein a_n mit $n > n_0$ ist hoch

Sei $n > n_0 \Rightarrow a_n$ nicht hoch $\Rightarrow \exists\, n_1 > n : a_{n_1} > a_n$

a_{n_1} " " $\Rightarrow \exists\, n_2 > n_1 : a_{n_2} > a_{n_1}$ etc.

Induktiv erhält man so eine mon. wachsende Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ■

Satz 4 (Bolzano-Weierstraß)

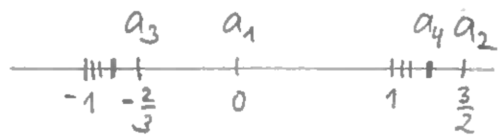
Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Lemma 3 $\Rightarrow$ (a_n) hat monotone + beschränkte Teilfolge. Diese konvergiert nach dem Monotonie-Krit. ■

Bsp: $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ist beschr., aber nicht konvergent:

$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1$

$a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \to -1$



$(a_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sind konvergente Teilfolgen

Def. Eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ heißt Cauchyfolge $:\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq n_0$

Bsp: $a_n = (-1)^n$ ist keine C.F., da $|a_{n+1} - a_n| = 2 \ \forall n$

Satz 5 Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ konvergent $\Rightarrow$ (a_n) ist Cauchyfolge

Beweis: Sei $a_n \to a$. $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq$
$\leq |a_n - a| + |a_m - a|$. Sei $\varepsilon > 0$, dazu n_0 so groß, dass
$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq n_0 \implies \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ∎

Satz 6 (Cauchy-Kriterium) Für $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ gilt:
(a_n) ist Cauchyfolge $\iff$ (a_n) konvergiert in $\mathbb{R}$.

Vorteil des C.F.-Begriffs: man kann über Konvergenz entscheiden, ohne den (allfälligen) Limes zu kennen!

Beweis: Nur noch „$\Rightarrow$" zu zeigen. (a_n) ist beschränkt, denn:
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n_0}| < 1\ \forall n \geq n_0 \quad (\text{mit } m = n_0)$$
$\implies |a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |a_{n_0}| + 1\}$
Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow$ (a_n) hat konvergente Teilfolge (a_{n_k})
$a := \lim_{k \to \infty} a_{n_k}$
Beh: (a_n) konv. gegen a.
Beweis: Sei $\varepsilon > 0 \implies |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall k \geq N_1$, und
$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n, m \geq N_2$
$$k \geq \max(N_1, N_2) \implies |a_k - a| < \underbrace{|a_k - a_{n_k}|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ da } n_k \geq k} + |a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad ∎$$

4.4. Uneigentliche Konvergenz

Def. $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ heißt uneigentlich konvergent gegen $+\infty$ [bzw. gegen $-\infty$], falls
$\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > M\ \forall n \geq n_0$ [bzw. $a_n < -M\ \forall n \geq n_0$]
Schreibe: $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ [bzw $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$]

Bsp: 1. $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$

2. (a_n) mon. wachsend, nach oben unbeschr. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

3. $a_n = (-1)^n \cdot n$ ist weder konv. noch uneigentlich konv.

Lemma 4 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff$
$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \ a_n > 0 \ \forall n \geq n_0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Bew: Für $M > 0$ gilt: $a_n > M \ \forall n \geq n_0 \iff a_n > 0 \wedge \frac{1}{a_n} < \frac{1}{M} \ \forall n \geq n_0$

Bsp: $x > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$, da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

4.5. Limes superior, Limes inferior

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ eine Folge. Betrachte

$s_n := \sup\{a_k : k \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$

$s_1 = \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}, \quad s_2 = \sup\{a_2, a_3, \ldots\}$, etc.

$\Rightarrow (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend oder identisch $+\infty$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n$ exist. in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (mit $\lim_{n\to\infty} \infty := \infty$)

Def. $\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Limes superior von (a_n)

Analog: $t_n := \inf\{a_k : k \geq n\} \Rightarrow$

(t_n) ist mon. wachsend oder id. $-\infty$

$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} a_k\right) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

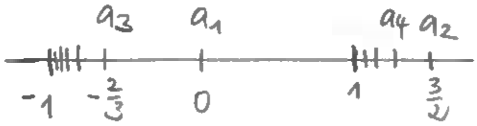
Limes inferior von (a_n)

Es gilt: $\limsup a_n < \infty \iff (a_n)$ nach oben beschr.

$\liminf a_n > -\infty \iff (a_n)$ " unten beschr.

Ferner: $\underbrace{\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n}_{t_1} \le \liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n \le \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n}_{s_1}$

<u>Bsp</u>: 1. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$



$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty}(-1) = -1$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} a_k\right) = 1, \text{ denn:}$$

$$\sup_{k\ge n} a_k = \begin{cases} 1+\frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \\ 1+\frac{1}{n+1}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

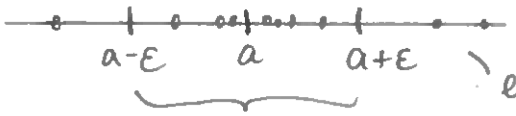
2. $a_n = (1, 1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \dots) \Rightarrow \liminf a_n = 0, \ \limsup a_n = +\infty$

<u>Satz 7</u> Für eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ sind äquiv.:

(1) $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$

(2) $\forall \varepsilon > 0$ gilt: (i) $a_n \ge a+\varepsilon$ für höchstens endlich viele n

<u>und</u> (ii) $a_n > a-\varepsilon$ für ∞ viele $n \in \mathbb{N}$



Analoge Charakteris. für $\liminf a_n$!

<u>Beweis</u>: $s_n = \sup_{k\ge n} a_k$

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $\varepsilon > 0$. $s_n \to a$ mon. fallend $\Rightarrow s_n \ge a \ \forall n$

Also: $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k \ge n: \ a_k > s_n - \varepsilon \ge a - \varepsilon \Rightarrow$ (ii)

da $s_n = \sup(..)$

Ferner: $a = \lim s_n \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ s_n < a+\varepsilon \ \forall n \ge n_0$

Dabei $a_n \le s_n \Rightarrow$ (i)

(2) $\Rightarrow$ (1): Aus (ii) folgt: $s_n > a - \varepsilon \ \forall n$ und $\forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n \ge a$.

(i) zeigt: Zu $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: $a_n \leq a + \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow s_n \leq a + \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$. Also: $\lim s_n \leq a$ ■

<u>Bem</u>: Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$a_n \to a \iff \limsup a_n = \liminf a_n = a$$

Siehe Übungen.

§ 5 Komplexe Zahlen

5.1. Der Körper der komplexen Zahlen

Motivation: Die Gleichung

$$(*) \quad x^2 + 1 = 0$$

hat keine Lsg in $\mathbb{R}$ (denn: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0$)

Ziel: Konstruktion eines Körpers $\mathbb{C}$, der $\mathbb{R}$ umfaßt, und in dem $(*)$ lösbar ist.

Vorüberlegung: Angenommen, $\exists$ Körper $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, so dass $(*)$ eine Lsg $i \in \mathbb{C}$ hat (i wie imaginär)

$$\Rightarrow i^2 = -1$$

Rechenregeln in Körper $\Rightarrow$ $\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v)$$

$$(x+iy) \cdot (u+iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

Dies motiviert:

Def. $\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit Add. und Multiplikation

$$(x,y) + (u,v) := (x+u, y+v)$$

$$(x,y) \cdot (u,v) := (xu - yv, xv + yu)$$

Satz 1 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper (Körper der komplexen Zahlen)

Beweis: $+, \cdot$ sind kommutativ + assoziativ; D-Gesetz erfüllt (leicht nachzurechnen)

Neutrale Elemente: $0 = (0,0)$ bzgl. $+$

$1 = (1,0)$ bzgl. $\cdot$

(denn: $(1,0) \cdot (x,y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y, 0 \cdot x + 1 \cdot y) = (x,y)$)

Inverse: $-(x,y) = (-x,-y)$;

$(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow (x,y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2} , -\frac{y}{x^2+y^2} \right)$ (nachprüfen)

$\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$: $(x,0) \pm (y,0) = (x \pm y, 0)$

$\Rightarrow$ $x \mapsto (x,0)$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist injektiver Körper-Homomorphismus.

Man identifiziert daher $x \in \mathbb{R}$ mit $(x,0) \in \mathbb{C}$ und fasst $\mathbb{R}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$ auf.

<u>Bezeichnung</u>: $i := (0,1) \in \mathbb{C}$ <u>imaginäre Einheit</u>

Damit: $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -1$

$\Rightarrow$ i und $-i = (-1)\cdot i$ lösen die Gleichung $x^2+1=0$

Ferner: $\mathbb{C} \ni z = (x,y) \Leftrightarrow z = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)\cdot(y,0)$

$$\Leftrightarrow z = x + iy$$

Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat daher eine eindeutige Darstellung d. Form

$$z = x+iy \quad \text{mit } x,y \in \mathbb{R}$$

<u>Def.</u> Sei $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $x,y \in \mathbb{R}$

$\operatorname{Re} z := x$ <u>Realteil</u> von z

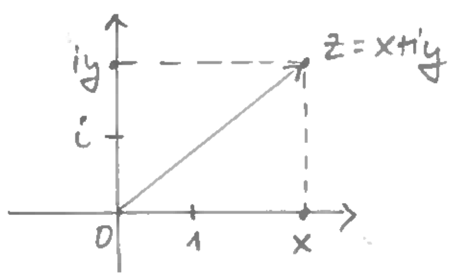
$\operatorname{Im} z := y$ <u>Imaginärteil</u> von z

z heißt reell, falls $\operatorname{Im} z = 0$; imaginär, falls $\operatorname{Re} z = 0$

Geometrische Veranschaulichung:

Komplexe Zahlenebene (Gauß, ≈ 1800)

Einf. von $\mathbb{C}$ wie oben: Hamilton (1805-65)

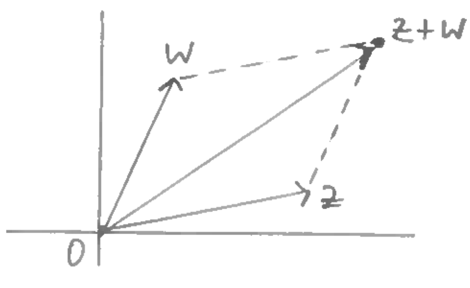


<u>Geom. Interpretation der Addition</u>:

$z = x+iy$, $w = u+iv$ $\Rightarrow$

$z+w = (x+u) + i(y+v) \mathrel{\hat{=}} (x+u, y+v)$

Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$

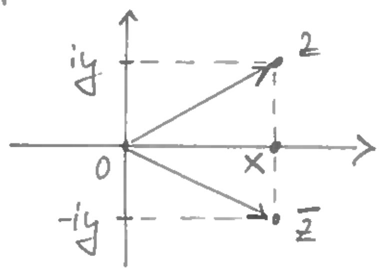


5.2. Komplexe Konjugation und Betrag

Def. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

$\overline{z} := x - iy$ konjugiert komplexe Zahl

Geometrisch: $z \mapsto \overline{z}$ ist Spiegelung an der x-Achse



Lemma 1
1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
3. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
4. $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$; $z - \overline{z} = 2i \cdot \operatorname{Im} z$
5. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
6. $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z\overline{z} = x^2 + y^2$,
   Insbes.: $z\overline{z} \in \mathbb{R}$, $z\overline{z} \geq 0$

Beweis: 1., 2., 4., 5. klar. Zu 3: $z = x + iy$, $w = u + iv \Rightarrow$

$\overline{zw} = \overline{xu - yv + i(xv + yu)} = xu - yv - i(xv + yu) = (x - iy)(u - iv)$

Zu 6.: $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$ ∎

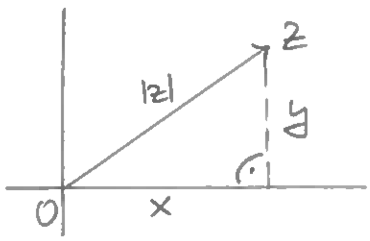
Bem. zum Invertieren in $\mathbb{C}$:

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $z \neq 0 \Rightarrow$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \underset{\text{Trick!}}{=} \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$ (wieder Form $a + ib$)

Def. Betrag von $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$:

$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$



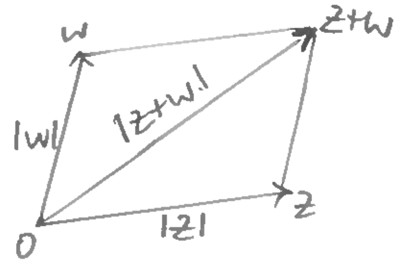
$|z|$: Länge des Ortsvektors von z (Satz d. Pythagoras)

Für $z = x \in \mathbb{R}$ ist $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$

↑ übliches Betrag in $\mathbb{R}$

Lemma 2 (Eigenschaften des Betrags)

1. $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|\bar{z}| = |z|$
3. $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$
4. $|zw| = |z| \cdot |w|$ Multiplikativität
5. $|z+w| \leq |z| + |w|$ Dreiecks-Ungl.
6. $\big||z| - |w|\big| \leq |z-w|$



Beweis: 1.–3. klar. Zu 4.:

$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = z\bar{z} \cdot w\bar{w} = |z|^2 \cdot |w|^2 \Rightarrow$ Beh (Wurzelziehen)

Zu 5.: $|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + (z\bar{w} + \bar{z}w) + w\bar{w}$

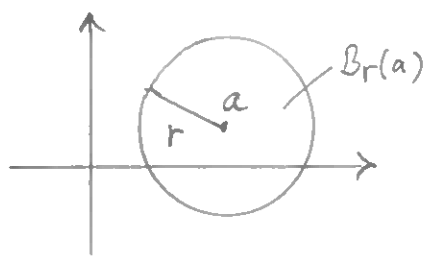
$$= |z|^2 + 2\underbrace{\mathrm{Re}(z\bar{w})}_{\leq |z| \cdot |w| \text{ nach } 3.+4.} + |w|^2 \leq (|z| + |w|)^2 \Rightarrow \text{Beh}$$

6. folgt aus 5. wie in $\mathbb{R}$ ∎

Bem: 1. Sei $a \in \mathbb{C}$, $r > 0 \Rightarrow$

$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}$

Ist Kreis um a mit Radius r.



2. Es gibt keine Ordnung $<$ auf $\mathbb{C}$, mit der $\mathbb{C}$ angeordneter Körper wäre (dh. $\mathbb{C}$ läßt sich nicht anordnen)

Denn: sonst wäre $-1 = i^2 > 0 \Rightarrow 1 < 0$

aber $1 > 0$ in jedem angeordn. Körper

$B_r(a) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$: offene Kreisscheibe um a vom Radius r.

„offen" heißt: ohne Rand.

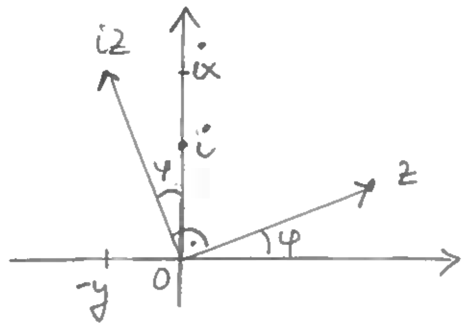
Zur geometrischen Interpretation der Multiplikation:

$z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow |z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

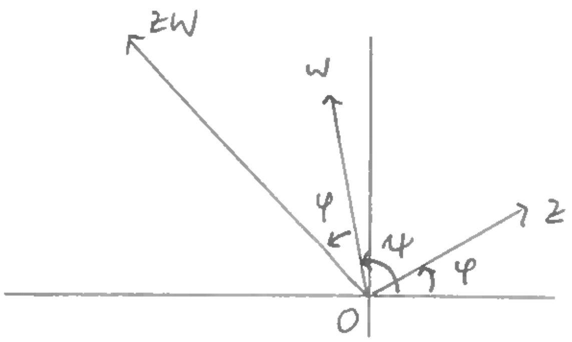
Bsp: $z = x+iy = (x,y) \Rightarrow$

$iz = -y+ix = (-y,x)$

$z \mapsto iz$ ist Drehung um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn.



Wir werden sehen: zw entsteht aus z, w durch Multiplikation der Beträge und Addition der Argumente (Winkel gegen die x-Achse)



Quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$

Seien $p, q \in \mathbb{C}$. Betrachte die Gleichung

$$(*) \quad z^2 + pz + q = 0$$

Lsg in $\mathbb{C}$?

$(*) \Leftrightarrow \left(z+\frac{p}{2}\right)^2 = -q + \frac{p^2}{4} =: c$ (quadrat. Ergänzung)

Damit Reduktion auf: Lsg von $z^2 = c$ mit $c \in \mathbb{C}$.

Mit z ist auch $-z$ Lsg.

Sei $c = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Ansatz: $z = x+iy$

$z^2 = c \Leftrightarrow (x+iy)^2 = a+ib$

$\Leftrightarrow x^2 + 2ixy - y^2 = a+ib$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = a \wedge 2xy = b$ (Vergl. Re-/Im-Teile)

Auflösen nach x, y: Nutze $x^2+y^2 = |z|^2 = |c|$.

$\Rightarrow 2x^2 = |c| + a, \quad 2y^2 = |c| - a \geq 0$

$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|c|+a)} \quad , \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(|c|-a)}$

$2xy = b \Rightarrow$ VZ-Kombinationen $(+,+), (-,-)$ falls $b \geq 0$

$(+,-), (-,+)$ " $b < 0$

$\Rightarrow z^2 = c$ hat 2 Lsgen $z_1, z_2 = -z_1$ $\quad (z_1 = z_2 = 0$, falls $c = 0)$

Schreibe $z_{1|2} = \pm\sqrt{c}$.

Damit: $(*)$ hat die Lsgen

$$z_{1|2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

<u>Algebraische Gleichungen in $\mathbb{C}$</u>

Hierunter versteht man Gleichungen der Form

$$z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$, Koeffizienten $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$; Unbekannte $z \in \mathbb{C}$

<u>Fundamentalsatz der Algebra</u>

Jede algebraische Gleichung in $\mathbb{C}$ hat eine Lösung in $\mathbb{C}$

Einfachster Beweis: Funktionentheorie ($\rightarrow$ später für BA M.)

5.3. <u>Polynome</u>

Hier: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

Vorbem: <u>Algebraische Operationen mit Funktionen</u>

Sei X eine Menge; $f, g: X \rightarrow \mathbb{K}$ Funktionen.

Definiere $f \pm g, f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{K}$:

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad ; \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

Ferner: $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$

$$\frac{f}{g}: \{x \in X : g(x) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

Def. Eine Fkt $p: \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ der Form
$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$
mit $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ heißt Polynomfunktion (kurz: Polynom) über $\mathbb{K}$. a_j: Koeffizienten von p

Nullpolynom: $p = 0$ (alle Koeff. $a_j = 0$)

Grad von p: $\quad \operatorname{grad} p := \begin{cases} \max\{k : 0 \le k \le n, a_k \neq 0\} & \text{falls } p \neq 0 \\ -\infty, & \text{falls } p = 0 \end{cases}$

$\mathcal{P}_{\mathbb{K}} := \{p : \mathbb{K} \to \mathbb{K} : p \text{ Polynomfkt}\}$

Summen u. Produkte von Polynomen sind wieder Polynome.
Klar für Summen (addiere Koeff.)

Produkte: $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + \ldots + a_0$
$$q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = b_m x^m + \ldots + b_0$$
$$\Rightarrow (pq)(x) = c_{n+m} x^{n+m} + \ldots + c_0 = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k \quad \text{mit}$$
$$c_k = \sum_{i,j \ge 0 : i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$
mit Konvention $a_i := 0$ für $i > n$, $b_j := 0$ für $j > m$

$\operatorname{grad}(pq) = \operatorname{grad} p + \operatorname{grad} q$ (mit $-\infty + n := -\infty \ \forall n \in \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$)
$\operatorname{grad}(p+q) \le \max(\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} q)$

Satz 2 (Polynomdivision) Seien $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, $q \neq 0$ $\Rightarrow$
es gibt eindeutige $r, s \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ mit
$$p = sq + r \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} q \quad (-\infty < n \ \forall n \in \mathbb{N}_0)$$

Beweis: 1. Existenz: o.E. $p \neq 0$ (sonst $s = r = 0$).
Induktion nach $n = \operatorname{grad} p \in \mathbb{N}_0$: Sei $m = \operatorname{grad} q$.
$n = 0 \Rightarrow$ o.E. $m = 0$, sonst $p = 0 \cdot q + r$ mit $r = p$
$\Rightarrow p, q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $s := \frac{p}{q} \Rightarrow p = sq + 0$.

$n \to n+1$: 1. Fall: $m > n \Rightarrow p = 0 \cdot q + r$ mit $r = p$.

2. Fall: $m \leq n$.

$p(x) = a_n x^n + \dots$; $q(x) = b_m x^m + \dots$, $a_n, b_m \neq 0$

$p_1(x) := p(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q(x)$

$\Rightarrow \operatorname{grad} p_1 < n \underset{\text{I.V.}}{\Longrightarrow} p_1 = s_1 q + r_1$, $\operatorname{grad} r_1 < \operatorname{grad} q$

$\Rightarrow p = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} q + (s_1 q + r_1) = \left(\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} + s_1\right) q + r_1 \Rightarrow$ Beh ∎

2. Eindeutigkeit: Sei $p = s_1 q + r_1 = s_2 q + r_2 \Rightarrow (s_1 - s_2) q = r_2 - r_1$

$\operatorname{grad}(r_2 - r_1) < \operatorname{grad} q \Rightarrow s_1 - s_2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2$ ∎

Bsp: $p(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 4$; $q(x) = x^2 + 1$

$$(x^3 + 2x^2 - 3x + 4) : (x^2 + 1) = \underbrace{x + 2}_{s(x)}$$

$$\begin{array}{l} x^3 + x \\ \hline \quad 2x^2 - 4x + 4 \\ \quad 2x^2 + 2 \\ \hline \qquad -4x + 2 = r(x) \end{array}$$

Damit: $p = sq + r$

Def: $q \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ heißt Teiler von $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}} :\Leftrightarrow \exists s \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}} : p = sq$

$\alpha \in \mathbb{K}$ heißt Nullstelle von $p :\Leftrightarrow p(\alpha) = 0$

Sei $p \neq 0$ mit $p(\alpha) = 0$. Polynomdivision mit $q(x) = x - \alpha \Rightarrow$

$p(x) = (x - \alpha) \cdot s(x) + r(x)$, $\operatorname{grad} r \leq 0$, dh. $r \in \mathbb{K}$

$p(\alpha) = 0 \Rightarrow r = 0$

Das zeigt:

Korollar Sei $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, $p \neq 0$, mit $p(\alpha) = 0 \Rightarrow \exists!\, s \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$:

$p(x) = (x - \alpha) \cdot s(x)$ dabei $\operatorname{grad} s = \operatorname{grad} p - 1$

Ist $s(\alpha) = 0$, so kann man $x - \alpha$ nochmals abspalten, etc.

Def. Ist p durch $(x-\alpha)^k$ teilbar, aber nicht durch $(x-\alpha)^{k+1}$, so heißt α k-fache Nullstelle von p

Korollar (1) Sei $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, grad $p = n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. $p \neq 0$) $\Longrightarrow$
p hat höchstens n NS (mit Vielfachheiten gezählt)
(2) Identitätssatz für Polynome
Sei $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$
Angenommen, p habe mindestens $n+1$ Nullstellen
$\Longrightarrow p = 0$, d.h. $a_0 = \ldots = a_n = 0$

Methode des Koeffizientenvergleichs:
2 Polynome über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind als Funktionen gleich $\Longleftrightarrow$ ihre Koeffizienten sind gleich.

Der Fund. Satz d. Algebra besagt: Jedes $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ mit grad $p \geq 1$ hat mind. 1 NS in $\mathbb{C}$
Abspalten des Lin.faktors und Iteration liefert:

Satz 3 Sei $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$, grad $p = n \geq 1$ $\Rightarrow$
p zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$, d.h.
$p(x) = c \cdot (x - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ die NS von p

Vorsicht: $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ hat i.A. keine reelle Faktorisierung!
Bsp: $p(x) = x^2 + 1$ hat keine NS in $\mathbb{R}$
Aber: $p(x) = (x+i)(x-i)$ über $\mathbb{C}$

Bsp: Allgemeine Binomialkoeffizienten

Def. Sei $z \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}_0$

$$\binom{z}{k} := \prod_{j=1}^{k} \frac{z-j+1}{j} = \begin{cases} \frac{z(z-1)\ldots(z-k+1)}{k!} & \text{falls } k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \end{cases}$$

Bsp: $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \binom{-1/2}{k} = \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2k-1}{2}\right) = (-1)^k \cdot \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^k\cdot k!}$

$z \mapsto \binom{z}{k}$ ist Polynom vom Grad k.

Satz 4 (Rekursionsformel)

$$\binom{z}{k} + \binom{z}{k+1} = \binom{z+1}{k+1} \quad \forall z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}_0$$

Beweis: Fixiere k. $p(z) := \binom{z}{k} + \binom{z}{k+1}$, $q(z) := \binom{z+1}{k+1}$. $p, q \in P_{\mathbb{C}}$

$p(n) = q(n) \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ (Satz 5, §2),

Id. Satz $\Longrightarrow p(z) = q(z) \ \forall z \in \mathbb{C}$ ∎

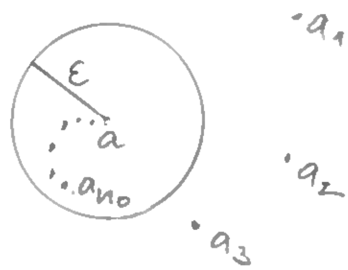
5.4. Folgen in $\mathbb{C}$

Def. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen.

(1) (a_n) heißt konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$ $:\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

Dh. $\forall \varepsilon > 0$ liegen fast alle (dh. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder a_n in der Kreisscheibe $B_\varepsilon(a)$.



Schreibe: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$; $a_n \to a$ für $n \to \infty$

(2) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge $:\Longleftrightarrow$

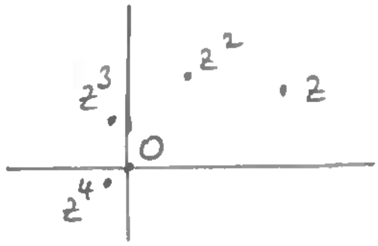
$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: |a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

(3) (a_n) beschränkt $:\Longleftrightarrow \exists M > 0: |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$

Beachte: $a_n \to a \Longleftrightarrow \underbrace{|a_n - a|}_{\text{reelle Folge}} \to 0$

Lemma 3 Der Grenzwert einer konvergenten Folge in $\mathbb{C}$ ist eindeutig. Jede konvergente Folge in $\mathbb{C}$ ist beschränkt

Beweis: wörtlich wie für reelle Folgen (Lemmata 1,2, §4)

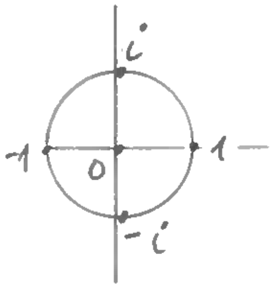


Bsp: (1) $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z^n = 0$

Denn: $|z^n| = |z|^n \to 0$ für $n \to \infty$

(2) $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$, $k \in \mathbb{N}_0$ fest $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$

(denn $\frac{n^k}{|z|^n} \to 0$, Bsp. in §4)



(3) $(i^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, i, -1, -i, 1, i, -1, \dots)$ divergiert (denn sie hat Teilfolgen mit verschiedenen Limiten)

Lemma 4. Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$, $a_n = x_n + i y_n$ $(x_n, y_n \in \mathbb{R})$

(1) $a_n \to a$ mit $a = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$

$x_n \to x \wedge y_n \to y \Leftrightarrow \operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a \wedge \operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$

(2) (a_n) ist Cauchyfolge $\Leftrightarrow$ $(\operatorname{Re} a_n)$ und $(\operatorname{Im} a_n)$ sind C.F. in $\mathbb{C}$

Beweis: (1) $|a_n - a|^2 = |(x_n + iy_n) - (x + iy)|^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2$

Also: $|a_n - a| \to 0 \Leftrightarrow |x_n - x| \to 0 \wedge |y_n - y| \to 0$

(2) analog ■

Satz 5 (Regeln für Grenzwerte)

Seien $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{C}$ Folgen mit $a_n \to a$, $b_n \to b \Rightarrow$

(1) $a_n + b_n \to a + b$, $a_n b_n \to ab$

(2) $b \neq 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}: b_n \neq 0 \ \forall n \geq N$, und $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

(3) $|a_n| \to |a|$

(4) $\overline{a_n} \to \overline{a}$

Beweis: (1)-(3) wörtlich wie für reelle Folgen (Satz 1, §4)

(4) $a_n = x_n + iy_n \to a = x + iy \underset{\text{Lemma 4}}{\Longrightarrow} x_n \to x \wedge y_n \to y \Rightarrow$
$\bar{a}_n = x_n - iy_n \underset{(1)}{\longrightarrow} x - iy = \bar{a}$

<u>Satz 6</u> (<u>Cauchy-Kriterium in $\mathbb{C}$</u>) Für eine Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ gilt:
(a_n) ist Cauchyfolge $\Longleftrightarrow$ (a_n) konvergiert.

<u>Beweis:</u> Lemma 4 + Cauchy-Kriterium in $\mathbb{R}$ (Satz 6, §4) ∎

<u>Satz 7</u> (<u>Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$</u>)
Jede beschränkte Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge

<u>Beweis:</u> $a_n = x_n + iy_n$ $(x_n, y_n \in \mathbb{R}) \Rightarrow |x_n|, |y_n| \leq |a_n| \leq M$
$\Rightarrow (x_n), (y_n)$ sind beschränkte reelle Folgen.
B.-W. in $\mathbb{R}$ (Satz 4, §4) $\Rightarrow$ (x_n) hat konvergente Teilf. $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$
Nochmals B.W. in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow (y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ hat konv. Teilf. $y_{n_{k_\ell}} \to y \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow \lim_{\ell\to\infty} a_{n_{k_\ell}} = x + iy$ ∎

<u>Def.</u> Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ Folge. $a \in \mathbb{C}$ heißt <u>Häufungswert</u> (H.W.) von (a_n)
$:\Longleftrightarrow$ $\exists$ Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \to a$

<u>Satz 8</u> 1. Sei (a_n) beschränkt $\Rightarrow$ (a_n) besitzt einen H.W.
Das ist gerade Bolzano-Weierstraß!
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $\Rightarrow$ a ist einziger H.W. von (a_n)
3. a ist H.W. von (a_n) $\Longleftrightarrow$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$.

<u>Bsp:</u> 1. $(i^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ hat die 4 H.W. $1, i, -1, -i$.
2. $a_n = n$ hat keinen H.W., da jede Teilfolge unbeschränkt.
3. $a_n = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n}, & \text{"} \quad n \text{ ungerade} \end{cases}$ ist unbeschr., hat aber H.W. 0

Beweis v. Satz 8: 2. $a_n \to a \Rightarrow a_{n_k} \to a$ für jede Teilfolge (a_{n_k}).

3. „$\Rightarrow$" Sei a H.W. und $a_{n_k} \to a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ gilt:

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon \quad \forall k \geq k_0$$

„$\Leftarrow$" konstruiere rekursiv $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$|a_{n_1} - a| < 1$, $|a_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$, $n_2 > n_1$ ($\exists \infty$ viele a_n in $B_{\frac{1}{2}}(a)$!)

.... $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$, $n_k > n_{k-1}$.

Dann $a_{n_k} \to a$ ∎

Satz 9 Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ reelle Folge.

Ist $\limsup a_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow a$ ist der größte H.W. von (a_n)

Ist $\liminf a_n = a \in \mathbb{R} \Rightarrow a$ " " kleinste " " "

Beweis: für limsup. Satz 7, §4 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ gilt:

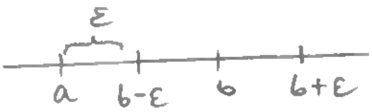
(i) $a_n > a - \varepsilon$ für ∞ viele n,

(ii) $a_n < a + \varepsilon$ für fast alle n.

$\Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ für ∞ viele $n \underset{\text{Satz 8}}{\Longrightarrow} a$ ist H.W. von (a_n)

$b > a \Rightarrow b$ ist kein H.W. Denn: $b = a + 2\varepsilon$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

in $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ liegen höchstens endlich viele a_n. ∎



§6 Reihen

6.1. Definition + erste Beispiele

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Folge (schließt reelle Folgen ein)

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \quad n\text{-te Partialsumme} \quad (n\in\mathbb{N})$$

Also $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1+a_2+a_3$, ...

Def. Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit Gliedern a_k ist definiert als die Folge der s_n:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := (s_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent, falls die Partialsummenfolge (s_n) konvergiert. Man schreibt dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{Wert der Reihe}$$

Also: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet sowohl die Partialsummenfolge, als auch deren Grenzwert im Fall der Konvergenz.

Analog: Geg. Folge $(a_k)_{k\geq n_0}$ mit $n_0\in\mathbb{Z}$ $\rightsquigarrow$ Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$

Bsp 1: 1. $a_k = k \quad \forall k\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^{n} k = \tfrac{1}{2}n(n+1). \quad (s_n) \text{ unbeschränkt}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} k \text{ divergiert.}$$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. $\quad s_n = ?$

Ansatz: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1} \quad (A,B\in\mathbb{R})$

$$\Leftrightarrow 1 = A(k+1) + Bk \Leftrightarrow A = 1,\ B = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad \text{„Partialbruchzerlegung"}$$

$$\Rightarrow s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

↑ „Teleskop-Summe"

// 20.11.

<u>Satz 1</u> Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = 0$

<u>Beweis:</u> $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \Rightarrow a_n = s_n - s_{n-1}$. $s_n \to s$

$\Rightarrow a_n \to s - s = 0$ ∎

<u>Achtung:</u> $\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \not\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert !

Bsp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert (später), obwohl $\frac{1}{k} \to 0$

<u>Bsp 2: Geometrische Reihe</u> $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$, $z \in \mathbb{C}$ fest

<u>1. Fall:</u> $|z| \geq 1 \Rightarrow |z^k| = |z|^k \geq 1 \ \forall\, k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k$ divergiert

da (z^k) keine Nullfolge

<u>2. Fall:</u> $|z| < 1$.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$ <u>geometrische Summenformel</u>

(gilt für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$; Beweis wie in $\mathbb{R}$, Satz 3, § 2)

$$|z| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}}$$ <u>Wert der geom. Reihe</u>

6.2. Konvergenzkriterien + Rechenregeln für Reihen

Nutze Kriterien für Folgen!

Das Cauchy-Kriterium f. Folgen liefert:

Satz 2 (Cauchy-Kriterium für Reihen)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert } \iff \left(s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \underbrace{|s_n - s_m|}_{=|a_{m+1}+\ldots+a_n|} < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0$$

Beachte: Ändert man endlich viele Glieder einer Reihe (oder läßt sie weg), so ändert sich das Konvergenzverhalten nicht!
Der Wert der Reihe ändert sich aber i.A. schon.

Satz 3 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k)$ konvergiert, und

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \cdot \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

Beweis: $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n := \sum_{k=1}^{n} b_k$. $s_n \to s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $t_n \to t = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s_n + \mu t_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Regeln f. Grenzwerte v. Folgen}}}{\longrightarrow} \lambda s + \mu t \quad \blacksquare$$

Produkte von Reihen: Später.

Warnung: Klammern in unendlichen Reihen dürfen i. A. nicht weggelassen werden.

Bsp: $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (1-1) = 0$, aber

$1 - 1 + 1 - 1 \pm \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ divergiert

<u>Satz 4</u> <u>(Reihen mit positiven Gliedern)</u>

Sei $a_k \in \mathbb{R}$ mit $a_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \iff \left(s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}$$

<u>Beweis:</u> (s_n) ist monoton wachsende, reelle Folge, nach dem Monotoniekrit. also genau dann konv., wenn beschränkt ∎

Schreibweise, falls $a_k \geq 0 \ \forall k$:

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty \ :\iff \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert
- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty \ :\iff \ \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergiert $\iff \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$

<u>Bsp 3.</u> (1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, denn

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}}_{\leq 1 \text{ nach Bsp 1 (2)}} \leq 2 \implies (s_n) \text{ beschr.}$$

(2) <u>Harmonische Reihe:</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (dh. divergent)

Beweis: die Partialsummenfolge (s_n) ist keine Cauchyfolge

denn: $s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \forall n$ ∎

Als nächstes: Alternierende Reihen, dh. Glieder abwechselnd positiv/negativ. Bauart: $\pm \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_k \geq 0$

<u>Satz 5</u> <u>Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen</u>

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ mit $a_k \geq 0 \ \forall k$ monoton fallende Nullfolge

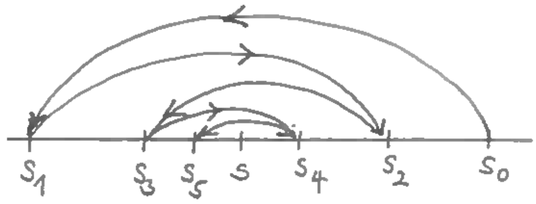
$\implies$ (i) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ konvergiert

(ii) <u>Fehlerabschätzung:</u> $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \implies$

$$\left| s - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

<u>Beweis:</u> $s_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \dots$

$$s_n - s_{n-2} = (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1}$$
$$= (-1)^n \underbrace{(a_n - a_{n-1})}_{\leq 0}$$



Also: n gerade $\Rightarrow s_n \leq s_{n-2}$, d.h. $s_0 \geq s_2 \geq s_4 \geq \dots$

n ungerade $\Rightarrow s_n \geq s_{n-2}$, d.h. $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots$

$s_0 \geq s_{2n} = s_{2n-1} + (-1)^{2n} a_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1$

$\Rightarrow (s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend + beschränkt

$(s_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ " " wachsend + beschr.

$\Rightarrow A := \lim_{n\to\infty} s_{2n}$, $B := \lim_{n\to\infty} s_{2n-1}$ existieren in $\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow a_{2n} = s_{2n} - s_{2n-1} \to A - B \\ \text{Andererseits: } a_{2n} \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = B =: s$$

$\Rightarrow s_n \to s$ für $n \to \infty$

(denn: $\varepsilon > 0 \Rightarrow |s_{2n} - s| < \varepsilon \ \forall n \geq n_1$, $|s_{2n-1} - s| < \varepsilon \ \forall n \geq n_2$)

Fehlerabschätzung: s liegt zwischen s_n und s_{n+1}

$|s_{n+1} - s_n| = a_{n+1} \Rightarrow |s - s_n| \leq a_{n+1}$ ■

Beachte: $s = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ liegt zwischen je 2 aufeinanderfolgenden Partialsummen.

<u>Bsp 4:</u> 1. <u>Alternierende Harmonische Reihe</u>

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

konvergiert nach Leibniz-Kriterium

Reihenwert: $\ln 2$ (später)

2. <u>Leibniz-Reihe:</u> $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$

konvergiert nach Leibniz-Krit. (gegen $\frac{\pi}{4}$)

Def. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $(a_k \in \mathbb{C})$ heißt <u>absolut konvergent</u>, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Bsp: 1. $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z^k$ ist absolut konv.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergiert, aber nicht absolut.

Satz 6. (<u>Majorantenkriterium</u>)

Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ Reihe mit $a_k \in \mathbb{C}$, wobei $|a_k| \leq b_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$, und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ („<u>konvergente Majorante</u>")

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent und auch absolut konv., und

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Beweis: Cauchy-Krit. (Satz 2) für $\sum b_k \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n > m \geq n_0$ gilt $\varepsilon > \sum_{k=m}^{n} b_k \geq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\geq} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|$

$\underset{\text{Cauchy-Krit.}}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergieren. Ferner:

$$\left|\sum_{1}^{\infty} a_k\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \underset{\Delta}{\leq} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

■

Korollar Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

Beweis: Majorantenkrit. mit $b_k = |a_k|$ ■

Bsp: $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}$ konvergiert, da $\frac{1}{k^n} \leq \frac{1}{k^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^3}$ konv. absolut, da $\left|\frac{i^k}{k^3}\right| = \frac{1}{k^3}$ und $\sum \frac{1}{k^3} < \infty$

Bem: Im Maj.krit. genügt $|a_k| \leq b_k \;\; \forall k \geq n_0$, n_0 groß genug.

Weiteres nützliches Kriterium:

Satz 7 Quotientenkriterium: Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Reihe, $a_n \in \mathbb{C}$

(1) Es gebe $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\forall n \geq n_0: \; a_n \neq 0 \text{ und } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konv. absolut.}$$

(2) Es gebe $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\forall n \geq n_0: \; a_n \neq 0 \text{ und } \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

Achtung: In (1) genügt nicht: ... und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

Gegenbsp: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n}{n+1} < 1 \;\; \forall n$, aber $\sum \frac{1}{n} = \infty$

$\frac{n}{n+1} \to 1 \Rightarrow \nexists\, q < 1 : \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$ für fast alle n

Beweis v. Satz 7: (1) $n \geq n_0 \Rightarrow$

$$|a_n| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \cdot |a_{n_0}| \leq q^{n-n_0} |a_{n_0}| = \underbrace{C}_{\text{unabh. von } n} \cdot q^n$$

$\Rightarrow C \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ ist konv. Majorante (geom. Reihe)

(2) $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n| \geq |a_{n_0}| > 0 \Rightarrow (a_n)$ ist keine Nullfolge $\blacksquare$

Korollar: Angenommen, $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in [0, \infty]$ existiere

- $R < 1 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ konv. absolut

- $R > 1 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n$ divergiert. (keine Aussage im Fall $R = 1$, siehe Bsp. oben)

Bsp: 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konv., denn:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{2} < 1 \underset{\text{Q-Krit.}}{\overset{\text{konv. zu}}{\Longrightarrow}} \text{Beh.}$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \to 1 \Rightarrow$ Q-Krit. nicht anwendbar!

<u>Satz 8</u> (<u>Wurzelkriterium</u>) Gegeben sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$L := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

1. $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ konv. absolut
2. $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ divergiert

<u>Beweis:</u> 1. Wähle $q > 0$ mit $L < q < 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n|$ hat konv. Majorante $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ (geom. Reihe)

2. $L > 1 \Rightarrow \exists \infty$ viele n mit $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, d.h. $|a_n| > 1 \Rightarrow$ (a_n) ist keine Nullfolge. ■

Bsp: $\sum_{n=1}^{\infty} n^s z^n$ mit $s \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^s} \cdot \sqrt[n]{|z^n|} = (\sqrt[n]{n})^s \cdot |z| \to |z| \Rightarrow L = |z|$

$\Rightarrow$ die Reihe konv. absolut, falls $|z| < 1$, und divergiert, falls $|z| > 1$.

Wurzelkrit. bisweilen anwendbar, wenn Quot. krit. versagt (→ Übungen). Falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, hilft manchmal:

Satz 9 (Verdichtungskriterium)
Sei $(a_n) \in \mathbb{R}$ monoton fallende Nullfolge. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert}$$

Beweis: Übung

Für Bsp. zunächst:

Einschub: Potenzen mit rationalen Exponenten
Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $s = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$. Setze

$$a^s = a^{m/n} := \sqrt[n]{a^m} > 0$$

a^s ist wohldef., dh. unabhängig von der Wahl der Darstellung von s als Bruch. Denn:
Sei $s = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}) \Rightarrow \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n]{a^m}$, da

$$(\sqrt[q]{a^p})^{nq} = a^{np} \underset{np=mq}{=} a^{mq} = (\sqrt[n]{a^m})^{nq}$$

Eigenschaften: (1) $a^0 = 1$ (vgl. früher)
(2) $a^s \cdot a^t = a^{s+t}$
(3) $a > 1$, $s < t \Rightarrow a^s < a^t$
(4) $0 \leq a < b \Rightarrow a^s < b^s$

Beweis: Schreibe $s = \frac{m}{n}$, $t = \frac{q}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$ Hauptnenner)

(2) $a^s \cdot a^t = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^q} = \sqrt[n]{a^{m+q}} = a^{s+t}$

(3) $s < t \Rightarrow m < q \Rightarrow a^s = \sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{a^q} = a^t$

(4) $a < b \Rightarrow a^m < b^m \Rightarrow \sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}$ ■

Bem: Potenzen mit bel. reellen Exponenten: später

Satz 10. Sei $s \in \mathbb{Q}$. Dann: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty \iff s > 1$

Beweis: mit Verdicht. krit. (Übung!)

Nun: Was passiert, wenn man die Glieder einer Reihe umordnet?

Bsp: Alternierende Harm. Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} =: s$

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \lim_{n\to\infty} s_{2n} > \frac{1}{2}$$

$$s' := 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right)}_{= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right)} + \ldots$$

$$\Rightarrow s' = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) + \ldots\right] = \frac{1}{2} s \quad !$$

Umordnungen können verschiedene Reihenwerte liefern!

Das passiert aber nicht bei absolut konvergenten Reihen:

Satz 11 (Umordnungssatz)

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent und $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv (Permutation der Indizes)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ konvergiert absolut, und hat denselben Grenzwert.

Beweis: $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$, $\tilde{s}_n := \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$; $s = \lim_{n\to\infty} s_n$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$:

$$|s_N - s| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{k>N}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (*)$$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\{1, \dots, N\} \subseteq \{\sigma(1), \dots, \sigma(n_0)\}$

$$n \geq n_0 \Rightarrow \tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{N} a_k + \sum_{\text{Restindizes}} a_k =$$

$$= s_N + \sum_{\text{Restind.}} a_k$$

$$\Rightarrow |\tilde{s}_n - s| \leq |s_N - s| + \sum_{\text{Restind.}} |a_k| \underset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \lim_{n \to \infty} \tilde{s}_n = s.$$

Die gleiche Überlegung für $|a_{\sigma(n)}|$ statt $a_{\sigma(n)}$ zeigt:

$\sum_{1}^{\infty} |a_{\sigma(n)}| = \sum_{1}^{\infty} |a_n| < \infty$, d.h. die umgeordn. Reihe konv. ebenfalls absolut ∎

Bem: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, aber nicht absolut konv., so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Permut. $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = x$ (Riemann, 1866)

6.3. Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$, $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen.

$$\Rightarrow AB = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} a_j B = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_j b_k \Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} a_j b_k \Big) \quad (1)$$

Analog: $AB = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j b_k \Big)$ (2)

Beides oft nicht praktisch bzw. hilfreich.

Andere Idee:

$$AB = (a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots)$$

$$\overset{?}{=} a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit} \quad c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

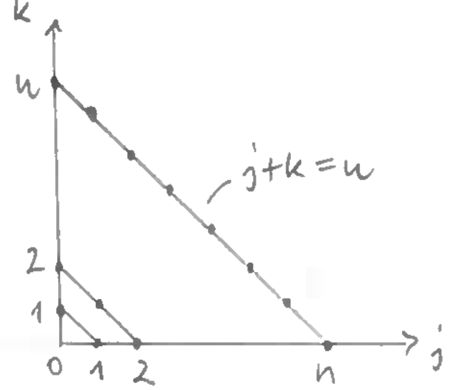
Stets richtig, falls A, B endliche Summen. Aber für unendliche Reihen nicht uneingeschränkt gültig!

<u>Satz 12</u> Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ <u>absolut</u> konvergent. Setze

$$c_n := \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} = \sum_{(j,k):\, j+k=n} a_j b_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert absolut, und

$$\Big(\sum_{j=0}^{\infty} a_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\Big)$$

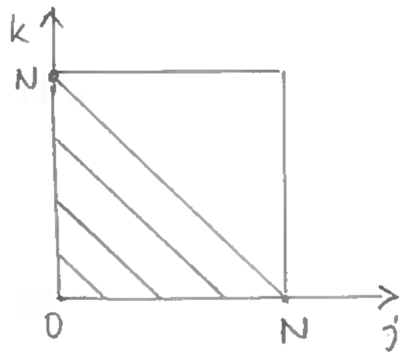


<u>Cauchy-Produkt</u> der Reihen

Auf absolute Konv. der Ausgangs-Reihen kann nicht verzichtet werden! Bsp: ÜG.

<u>Beweis</u>: $A = \sum_{j=0}^{\infty} a_j$, $B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k$; $S_1 := \sum_0^{\infty} |a_j|$, $S_2 := \sum_0^{\infty} |b_k|$

(1) $$\sum_{n=0}^{N} |c_n| \underset{\Delta}{\le} \sum_{n=0}^{N}\sum_{j=0}^{n} |a_j b_{n-j}| \le$$
$$\le \sum_{j=0}^{N}\sum_{k=0}^{N} |a_j b_k| = \Big(\sum_{j=0}^{N}|a_j|\Big)\Big(\sum_{k=0}^{N}|b_k|\Big)$$
$$\le S_1 \cdot S_2 < \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$$



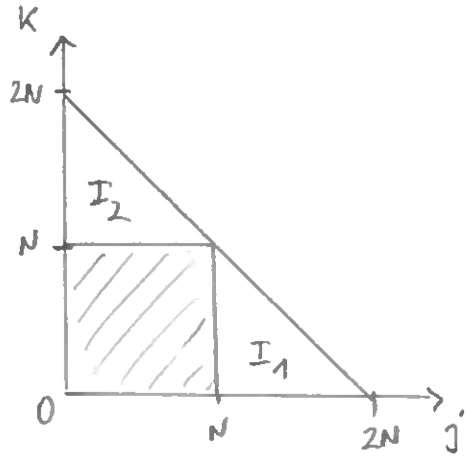
(2) Grenzwert: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: \forall N \ge n_0$:

$$\Big|\Big(\sum_{j=0}^{N} a_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{N} b_k\Big) - AB\Big| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \underline{\text{und}}$$

$$\sum_{j>N} |a_j| < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad \sum_{k>N} |b_k| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{mit } M := S_1 + S_2$$

$$N \ge n_0 \Rightarrow \Big|\sum_{n=0}^{2N} c_n - AB\Big| \le$$

$$\le \underbrace{\Big|\Big(\sum_{j=0}^{N} a_j\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{N} b_k\Big) - AB\Big|}_{< \frac{\varepsilon}{3}\ (////)} + \underbrace{\sum_{(j,k)\in I_1 \cup I_2} |a_j|\cdot|b_k|}_{=:\, r}$$



$$r \le \Big(\sum_{j>N} |a_j|\Big)\cdot S_2 + S_1 \cdot \Big(\sum_{k>N} |b_k|\Big)$$

$$\le M\cdot\Big(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M}\Big) = \frac{2}{3}\varepsilon$$

$$\Rightarrow \Big|\sum_{n=0}^{2N} c_n - AB\Big| < \varepsilon \quad \forall N \geq n_0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB \qquad \blacksquare$$

Bsp: Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (absolut konv.)

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-z)^2} = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\Big)^2 \underset{\text{Cauchy-Prod.}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \quad \text{mit}$$

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} z^j z^{n-j} = (n+1)\, z^n$$

$$\Rightarrow \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$, und die Reihe konv. absolut (schon bekannt)

§7 Darstellung reeller Zahlen und Abzählbarkeit

7.1. b-adische Entwicklungen

Schule: Darstellung reeller Zahlen als Dezimalbrüche

Bsp: $417{,}29 = 4\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 + 2\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-2}$

Unendliche Dezimalbrüche werden als Reihen definiert (s.u.!)

Statt Basis 10 auch andere Basen $b\in\mathbb{N}$, $b\geq 2$ möglich.

$b=2$: Dual-Darstellung ($b=10$: Dezimal-Darst.)

$b=8$: Oktal-Darst.

Def. (b-adische Brüche) Sei $b\in\mathbb{N}$, $b\geq 2$ (Basis)

Ein b-adischer Bruch ist eine Reihe d. Form

$$(*)\quad \pm\sum_{k=-N}^{\infty} a_k b^{-k} =: a_{-N}\dots a_0, a_1 a_2 \dots$$

mit $N\in\mathbb{N}_0$ und $a_k\in\{0,1,\dots,b-1\}$ (Ziffern)

Bsp ($b=10$): $0{,}\overline{3} := 0{,}333\dots = \sum_{k=1}^{\infty} 3\cdot 10^{-k}$

$$= \frac{3}{10}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$$

$b=8 \Rightarrow 2{,}45 = 2\cdot 8^0 + 4\cdot\frac{1}{8} + 5\cdot\frac{1}{64}$ (im Dez. System)

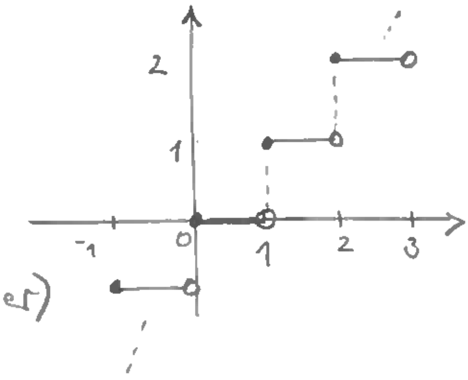
Satz 1 Jeder b-adische Bruch ist eine konvergente Reihe und stellt daher eine reelle Zahl dar.

Umgekehrt läßt sich jedes $x\in\mathbb{R}$ als b-adischer Bruch darstellen.

Die b-adische Darstellung ist nicht notwendig eindeutig!

Bsp ($b=10$): $0{,}\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} 9\cdot 10^{-k} \underset{\text{wie oben}}{=} 1$

$$0{,}6\overline{9} = 0{,}7$$



<u>Vorbem</u>: Für $x \in \mathbb{R}$ setze

$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$

„ganzzahliger Anteil von x"

$\lfloor . \rfloor : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$: <u>Floor-Fkt</u> (Gauß-Klammer)

<u>Beweis v. Satz 1</u>: (1) Konv. d. Reihe (*): $(b-1)\sum_{k=-N}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^k$

ist konverg. Majorante (geom. Reihe)

(2) Sei $x \in \mathbb{R}$, o.E. $x \geq 0$

<u>1. Fall</u>: $x \in [0,1)$. Gesucht: b-adische Darst. $x = 0,a_1a_2\ldots$

Konstruiere $a_1, a_2 \ldots \in \{0,\ldots,b-1\}$ rekursiv so, dass:

$(\square)$ $\quad 0,a_1\ldots a_n \leq x < 0,a_1\ldots a_n + \frac{1}{b^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dazu: $\quad a_1 := \lfloor bx \rfloor \in \{0,1,\ldots,b-1\}$

$a_1 \leq bx < a_1 + 1 \Rightarrow 0,a_1 \leq x < 0,a_1 + \frac{1}{b}$ ✓

Seien $a_1,\ldots,a_{n-1}$ bereits konstruiert. Setze

$$a_n := \lfloor b^n \underbrace{(x - 0,a_1\ldots a_{n-1})}_{\in [0, \frac{1}{b^{n-1}}) \text{ nach } (\square) \text{ für } n-1} \rfloor$$

$\Rightarrow a_n \in \{0,\ldots,b-1\}$ und

$\frac{a_n}{b^n} \leq x - 0,a_1\ldots a_{n-1} < \frac{a_n}{b^n} + \frac{1}{b^n}$

Mit Subtraktion von $\frac{a_n}{b^n}$ folgt $(\square)$ für n.

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b^n} = 0 \underset{(\square)}{\Rightarrow} x = \lim_{n\to\infty} 0,a_1\ldots a_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^{-k}$

<u>2. Fall</u>: $x \geq 1 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : x < b^N \Rightarrow \frac{x}{b^N} \in [0,1)$

$\Rightarrow \frac{x}{b^N} = 0,a_1a_2\ldots \Rightarrow x = a_1\ldots a_N, a_{N+1}\ldots$ ■

<u>Zusatz</u>: Die b-adische Darst. von x ist eindeutig, wenn

man ausschließt, dass $a_k = b-1$ für fast alle k, dh. $x = \ldots, \ldots \overline{b-1}$.

<u>Beweis</u>: Ang. $x = \sum_{k=-N}^{\infty} a_k b^{-k} = \sum_{k=-N}^{\infty} c_k b^{-k}$, jeweils ohne $\overline{b-1}$ - Endung, aber mit verschiedenen Ziffernfolgen.

Sei $n \geq -N$ minimal mit $a_n \neq c_n$, etwa $a_n > c_n$

$$\Rightarrow 0 = x - x = \sum_{k=n}^{\infty} (a_k - c_k) b^{-k} \geq \underbrace{(a_n - c_n) b^{-n}}_{\geq b^{-n}} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k b^{-k}}_{(*)}$$

Vorauss. $\Rightarrow (*) < (b-1) \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} b^{-k} = \frac{1}{b^n}$

$\Rightarrow 0 > b^{-n} - b^{-n} = 0$ ↯

7.2. <u>Abzählbare Mengen, Mächtigkeit</u>

Wie entscheidet man, ob 2 Mengen gleichviele Elemente haben?

<u>Def.</u> (1) 2 Mengen X, Y heißen <u>gleichmächtig</u>, kurz: $X \sim Y$

$:\Leftrightarrow \exists$ bijektive Abb. $f: X \to Y$.

(2) Eine Menge X heißt endlich, falls $X = \emptyset$ oder $\exists n \in \mathbb{N}$ mit $X \sim \{1, \ldots, n\}$.

Ansonsten heißt X unendlich.

<u>Bsp</u>: $\mathbb{N}$ ist unendlich, denn ang $f: \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ bij. $\Rightarrow$

$m := \max\{f(1), \ldots, f(n)\} + 1 \notin \mathbb{N}$ ↯

<u>Bem</u>: $\{1, \ldots, n\} \sim \{1, \ldots, m\}$
$\Leftrightarrow n = m$
Dirichletsches Schubfachprinzip
(Beweis mit Ind. nach n, $n \geq m$)

<u>Def.</u> Eine Menge X heißt

- <u>abzählbar unendlich</u>, falls $X \sim \mathbb{N}$
- <u>abzählbar</u>, falls X endlich oder abz. bar unendlich.
- <u>überabzählbar</u>, falls nicht abzählbar.

Abzählbar unendlich sind z.B.: • $\mathbb{N}$

• $\mathbb{N}_0$: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$, $n \mapsto n-1$ ist bij.

• $\mathbb{Z}$: Bij. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \cdots \end{array}$$

Achtung: $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z}$, aber alle 3 sind gleichmächtig!

<u>Lemma 1</u> $X \neq \emptyset$ abzählbar $\Longleftrightarrow$ $\exists$ surjektives $f: \mathbb{N} \to X$

(D.h. $\exists f: \mathbb{N} \to X$, so dass mit $x_i = f(i)$ gilt: $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$)

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$" o.E. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ endlich. Def. $f: \mathbb{N} \to X$:

$f(i) := x_i$, $1 \le i \le n$; $f(i) := x_n$, $i > n$ $\Rightarrow$ f surj.

„$\Leftarrow$" Sei $f: \mathbb{N} \to X$ surj. o.E. X unendlich.

$X = \{f(1), f(2), \dots\}$, $f(i) = f(j)$ für $i \neq j$ möglich

Konstruiere daraus neue Abzählung $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, bei der bereits gezählte Elemente übersprungen werden:

Rekursive Def:

$x_1 := f(1)$; $i_1 := 1$

$x_2 := f(i_2)$, wobei $i_2 := \min\{i \in \mathbb{N} : f(i_2) \neq x_1\}$

$\vdots$

$x_n := f(i_n)$, wo $i_n := \min\{i \in \mathbb{N} : f(i_n) \notin \{x_1, \dots, x_{n-1}\}\}$

Dann: $x_n \notin \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$ und $f(n) \in \{x_1, \dots, x_n\}$ (da $i_n \ge n$)

$\Rightarrow$ $\mathbb{N} \to X$, $n \mapsto x_n$ Bij. ■

<u>Korollar:</u> Sei X abz. bar, $Y \subseteq X$ $\Rightarrow$ Y abz. bar (Übung)

<u>Satz 2</u> Seien X_n ($n \in \mathbb{N}$) abzählbar $\Rightarrow$

$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ist abzählbar.

<u>Beweis:</u> o.E. $X \neq \emptyset$, $X_n \neq \emptyset$ $\forall n$ (ersetze sonst X_n durch nichtleeres X_m)

Sei $X_1 = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots\}$

$X_2 = \{x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots\}$ etc.

Abzählung von X:

$$\begin{array}{c|cccccc}
X_1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & \cdots \\
X_2 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} & \cdots \\
X_3 & x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \cdots & \\
X_4 & x_{41} & x_{42} & x_{44} & \cdots & & \\
X_5 & x_{51} & x_{52} & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & & & & &
\end{array}$$

liefert surjektives $f: \mathbb{N} \to X$

<u>Korollar</u>: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar

Beweis: $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\left\{ \frac{k}{n} : k \in \mathbb{Z} \right\}}_{\text{abz. bar}}$ ■

<u>Satz 3</u> $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. (Also auch $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)

<u>Beweis:</u> (<u>Cantor'sches Diagonalverfahren</u>)
Wir zeigen, dass bereits das Intervall $(0,1)$ überabzählbar ist.
Angen. $(0,1)$ sei abzählbar, $(0,1) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$
Schreibe x_n als Dezimalbruch:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0{,}a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \dots \\
x_2 &= 0{,}a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \dots \\
x_3 &= 0{,}a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \dots \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \ddots
\end{aligned}$$

(ohne $\overline{9}$-Endungen)

Definiere $z \in (0,1)$ als Dezimalbruch wie folgt:

$$z := 0{,}z_1 z_2 z_3 \dots \quad \text{mit} \quad z_n := \begin{cases} 5, & \text{falls } a_{nn} \neq 5 \\ 4, & \text{"} \quad a_{nn} = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ z unterscheidet sich an der n-ten Stelle von x_n $\Rightarrow$ Eind. keit der Darst.
$z \neq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ ↯

§8 Exponentialfunktion und Potenzreihen

8.1. Die Exponentialreihe

<u>Def.</u> Für $z \in \mathbb{C}$ setze $\boxed{\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$ Exponentialreihe

<u>Satz 1</u> (1) $\forall z \in \mathbb{C}$ ist $\exp(z)$ absolut konvergent.

(2) <u>Funktionalgleichung</u>:

$$\forall z, w \in \mathbb{C}: \quad \exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z+w)$$

Die Fkt $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(z)$ heißt <u>Exponentialfkt</u>.

<u>Beweis</u>: (1) o.E. $z \neq 0$. Quotientenkrit: $a_n = \frac{z^n}{n!}$ $\Rightarrow$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{1}{n+1} \cdot |z| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1 \Rightarrow \text{Beh.}$$

(2) exp-Reihe absolut konv. $\Rightarrow$ Cauchyprod. bildbar:

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{w^{n-j}}{(n-j)!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w)$$

Binom. Satz (selber Beweis für $\mathbb{C}$ wie für $\mathbb{R}$) ▪

<u>Spezielle Werte:</u>
- $\exp(0) = 1$
- $\boxed{\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =: e}$

<u>Eulersche Zahl</u>

$e = 1 + \frac{1}{2} + \ldots > 1$

$e \approx 2{,}718$ (später)

exp-Reihe: Newton, ≈ 1669

Buchstabe e: Euler, 1736 (Mechanica)

Korollar 1. $\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$; $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$

2. $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$

3. $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp(x) \in \mathbb{R}$ mit $\exp(x) > 0$; $x > 0 \Rightarrow \exp(x) > 1$

4. $z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \exp(nz) = (\exp(z))^n$

5. $q \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exp(q) = e^q$

Beweis: 1. $\exp(z) \cdot \exp(-z) \underset{FG}{=} \exp(0) = 1 \Rightarrow$ Beh.

2. $\exp(\bar{z}) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)}$

3. $x > 0 \Rightarrow \exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \ldots > 1$; $\exp(0) = 1$

$x < 0 \Rightarrow \exp(x) \underset{1.}{=} \underbrace{\exp(-x)}_{>1}{}^{-1} \in (0,1)$

4.+5.: Übung ∎

Teil 4 des Kor. motiviert die

Schreibweise: $\boxed{e^z := \exp(z)}$ für $z \in \mathbb{C}$

Damit: $e^0 = 1$

$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ (FG)

$e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

Bem: Zur Bedeutung der exp-Fkt

Sei $f(t)$ der Bestand einer Substanz, Population, ...
zur Zeit $t \in \mathbb{R}$

Annahme: Alle Teile des Bestands entwickeln sich unabhängig voneinander nach demselben Gesetz („nat. Wachstum")

Sei $f(0) = 1$.

Dann: $f(t) = f(t)\cdot 1$ Bestand zu Zeit t

$\Rightarrow$ $f(t+s) = f(t)\cdot f(s)$ " " " $t+s$

Dies ist die FG von exp!

Wir werden sehen: $f(t) = e^{at}$, $a\in\mathbb{R}$ sind die einzigen <u>stetigen</u> Lsg dieser FG mit $f(0)=1$.

<u>Satz 2</u> $z\in\mathbb{C} \Rightarrow$ $\boxed{e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n}$

Insbes: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (die Konvergenz ist langsam)

<u>Beweis:</u> Sei $\varepsilon>0$. Wähle $n_0\in\mathbb{N}$ so groß, dass

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (*)$$

Sei $n>n_0$. $A_n := \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n - e^z\right| = \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\right| \le$

$$\le \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0}\left|\binom{n}{k}\frac{z^k}{n^k}-\frac{z^k}{k!}\right|}_{=:B_n} + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{n}\binom{n}{k}\frac{|z|^k}{n^k}}_{=:C_n} + \underbrace{\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}}_{<\frac{\varepsilon}{3}\text{ nach }(*)}$$

$$\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} \le \frac{1}{k!} \quad \text{und}$$

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \quad (k \text{ fest})$$

Also: $C_n \le \sum\limits_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{k!}|z|^k < \frac{\varepsilon}{3}$

$$B_n \le \sum_{k=0}^{n_0}\underbrace{\left|\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}-\frac{1}{k!}\right||z|^k}_{\to 0\ (n\to\infty)} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für } n \ge n_1 = n_1(\varepsilon)$$

Zusammen: $n > \max(n_0,n_1) \Rightarrow A_n < \varepsilon \Rightarrow$ Beh ∎

Anwendung: Kontinuierliche Verzinsung (D. Bernoulli, 1728)

Anfangskapital: $K > 0$

Zinssatz f. 1 Jahr: $p\%$ (Zinsfuß)

Verzinsung: in jedem $\frac{1}{n}$-ten Jahr $\frac{p}{n}\%$ Zins auf das aktuelle Kapital; dann:

Kapital nach 1 Jahr: $K \cdot \left(1 + \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{100}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} K \cdot e^{p/100}$

Nun: exp für reelle Argumente ($x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x \in \mathbb{R}$)

Einschub: Monotone Funktionen

Def. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Fkt $f: D \to \mathbb{R}$ heißt monoton wachsend [fallend] $:\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in D$ mit $x < y$ gilt $f(x) \leq f(y)$ $[f(x) \geq f(y)]$

Ist sogar stets $f(x) < f(y)$ $[f(x) > f(y)]$, so heißt f streng monoton wachsend [fallend]

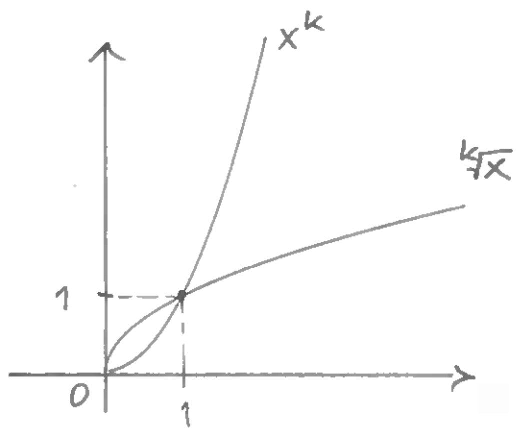
Bsp: 1. Potenzfkt: ($k \in \mathbb{N}$)

$f: x \mapsto x^k$, $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ s.m.w.

Dabei $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ bijektiv,

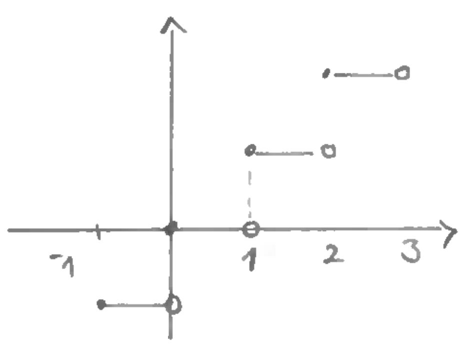
denn: $y \geq 0 \Rightarrow \exists!\, x \geq 0: x^k = y$

nämlich $x = \sqrt[k]{y}$



2. k-te Wurzelfkt $x \mapsto \sqrt[k]{x}$, $[0,\infty) \to \mathbb{R}$ s.m.w. (haben wir gezeigt!)

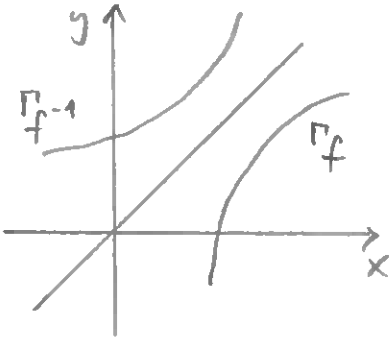
3. Floor-Fkt $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ monoton wachsend auf $\mathbb{R}$, aber nicht streng monoton.



/4.12.

Satz 3 Sei $f: D \to \mathbb{R}$ s.m.w. [s.m.f.] $\Longrightarrow$

$f: D \to f(D) = \{f(x) : x \in D\}$ ist bijektiv, und $f^{-1}: f(D) \to D$ ist ebenfalls s.m.w [s.m.f.]



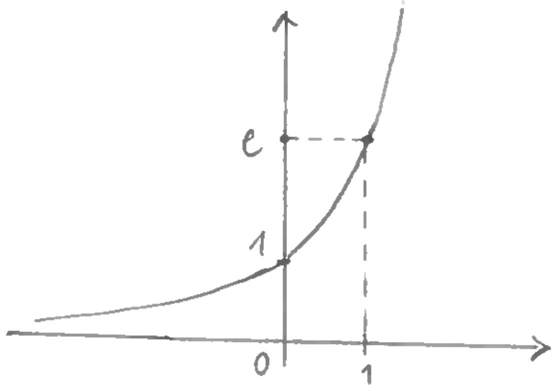
$\Gamma_{f^{-1}}$ entsteht aus Γ_f durch Spiegelung an Diag. $y = x$

Beweis: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \Longrightarrow$
f injektiv, also bij. auf sein Bild
$f(x) < f(y) \Longrightarrow x < y$, denn ang.
$x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ ↯
$\Longrightarrow f^{-1}$ s.m.w. ■

Satz 4 $\exp: \mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \mapsto e^x$ ist streng mon. wachsend

Beweis: $x < y \Rightarrow y = x + s$, $s > 0$

$$\Rightarrow e^y = e^x \cdot \underbrace{e^s}_{>1 \text{ nach Kor. zu Satz 1}} > e^x$$ ■



$x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 = 1$
$x < 0 \Rightarrow 0 < e^x < 1$

Vermutung:
$\exp: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist surjektiv.
Beweis erst später möglich.

Zur Berechnung von e^x

$x \in \mathbb{R} \Longrightarrow x = g + x'$, $g \in \mathbb{Z}$, $x' \in [0, 1)$

$$\Longrightarrow e^x = e^g \cdot e^{x'}$$

Ziel: Näherung für e^x, $|x| \leq 1$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x); \quad R_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Restglied

$$|x|\le 1 \Rightarrow |R_{n+1}(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{|x|}{n+2}+\frac{|x|^2}{(n+2)(n+3)}+\dots\right)$$

$$\le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots\right) = 2\cdot\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

hier gilt „<", sofern $x \neq 0$

Dieselbe Abschätzung funktioniert für $x\in\mathbb{C}$, $|x|\le 1$. Also:

__Satz 5__ (__Restgliedformel für exp__)

$$z\in\mathbb{C},\ |z|\le 1 \Rightarrow \left|e^z - \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\right| \le 2\cdot\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dabei gilt „<", falls $z\neq 0$

Betrag des 1. weggelassenen Glieds

__Speziell__: $|z|\le 1 \Rightarrow |e^z-1|\le 2|z|$

$$|e^z-1-z|\le |z|^2$$

__Bsp__: $e = e^1 = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} + R_{n+1}(1)$; $|R_{n+1}(1)| < \frac{2}{(n+1)!}$

$R_{11}(1) < 6\cdot 10^{-8} \Rightarrow e \approx 2{,}7182818$ (7 gültige Nachkommastellen)

__Korollar.__ e ist irrational

__Beweis__: Ang. $e = \frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ mit $m,n\in\mathbb{N}$

$$0 < \left|e - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right| < \frac{2}{(n+1)!} \Rightarrow$$

$$0 < \underbrace{\left|n!\left(\frac{m}{n}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\right|}_{=:s\in\mathbb{N}} < \frac{2}{n+1} \Rightarrow s<1 \ \lightning$$

8.2. Potenzreihen

exp-Reihe: $\quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, abs. konv. $\forall z \in \mathbb{C}$

Def. Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n , \quad z \in \mathbb{C}$$

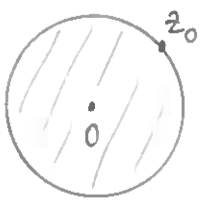
mit Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$ und Entwicklungspkt $a \in \mathbb{C}$

Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe?

Substitution $z - a =: z'$ $\leadsto$ Reduktion auf Fall $a = 0$, also

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Lemma 1 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ konvergent für $z = z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq 0 \Rightarrow$



die Reihe konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ (offene Kreisscheibe)

Beweis: $\sum_0^{\infty} c_n z_0^n$ konv. $\Rightarrow \exists M > 0 : |c_n z_0^n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$|z| < |z_0| \Rightarrow |c_n z^n| = |c_n z_0^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \cdot q^n , \; q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$

$M \cdot \sum q^n$ ist konv. Majorante $\Rightarrow$ Beh ∎

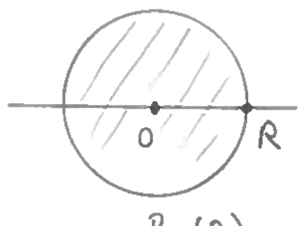
Def. $R := \sup\{ r \geq 0 : \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n$ konvergiert $\} \in [0, \infty]$

Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

Satz 6 (1) $|z| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ konvergiert absolut

(2) $|z| > R \Rightarrow$ " divergiert

$B_R(0)$: Konvergenzkreis(scheibe) des PR



$B_R(0)$

Beachte: Der Satz trifft keine Aussage für $|z| = R$!

$R = \infty \iff$ absolute Konv. $\forall z \in \mathbb{C}$

$R = 0 \iff$ Konvergenz nur für $z = 0$

<u>Bsp:</u> $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ (geom. Reihe) : $R = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (Exp-Reihe) : $R = \infty$

<u>Beweis d. Satzes:</u> (1) Sei $|z| < R$. Wähle $r > 0$ mit $|z| < r < R \overset{\text{Def. von } R}{\Longrightarrow}$

$\sum_0^{\infty} c_n r^n$ konv. $\underset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow}$ $\sum c_n z^n$ konv. absolut

(2) Sei $|z| > R$. Angen. $\sum c_n z^n$ konv. $\overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow}$

$\sum c_n r^n$ konv. $\forall r$ mit $R < r < |z|$ ↯ zu Def. von R ∎

<u>Satz 7</u> <u>Berechnung des Konv. Radius</u>

(1) Falls $q = \lim \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \in [0, \infty]$ exist. $\Longrightarrow R = \frac{1}{q}$

(2) $R = \frac{1}{q}$ mit $q = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \in [0, \infty]$

Dabei $\frac{1}{\infty} := 0$, $\frac{1}{0} := \infty$

<u>Beweis:</u> (1) $\left|\frac{c_{n+1} z^{n+1}}{c_n z^n}\right| \to q|z| \begin{cases} < 1 & \text{für } |z| < \frac{1}{q} \\ > 1 & \text{" } |z| > \frac{1}{q} \end{cases}$

$\underset{\text{Q-Krit. + Satz 6}}{\Longrightarrow}$ Beh

(2) Analog mit Wurzelkrit: $\limsup \sqrt[n]{|c_n z^n|} = q \cdot |z|$ ∎

<u>Bsp:</u> 1. Exp-Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $c_n = \frac{1}{n!}$. Berechne R mit (1):

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 \Longrightarrow R = \infty$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$. $c_{n^2} = 1$, $c_k = 0$ sonst. $R = \left(\limsup \sqrt[n]{|c_n|}\right)^{-1} = 1$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} z^n$: stets $R = 1$ (Q-Krit.)

1. Reihe: divergiert $\forall z$ mit $|z| = 1$

2. Reihe: div. für $z = 1$, konv. für $z = -1$

3. Reihe: konv. $\forall z$ mit $|z| = 1$ (da $\sum \frac{1}{n^2}$ konv. Majorante)

Am Rand des Konv.kreises kann keine allg. Konvergenzaussage getroffen werden ($\rightarrow$ Einzelfallanalyse erforderlich!)

Bem: Für PR der Form $\sum a_n (z-a)^n$ hat man Konv. Kreisscheibe $B_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ R: Konv. Radius
(= der von $\sum c_n z^n$)

Satz 8 Cauchy-Produkt von Potenzreihen

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ Potenzreihen mit KR $R_a, R_b > 0$

$\Rightarrow \forall z$ mit $|z| < \min(R_a, R_b)$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$ absolut konv., und

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

Beweis: Cauchy-Prod. Satz 12, § 6 $\Rightarrow \Big(\overbrace{\sum a_n z^n}^{\text{abs. konv.}}\Big)\Big(\overbrace{\sum b_n z^n}^{\text{abs. konv.}}\Big) =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j z^j b_{n-j} z^{n-j}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad \blacksquare$$

Bsp: Die Binomialreihe

Für $s \in \mathbb{C}$ setze $\boxed{B_s(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} z^n}$

$\binom{s}{0} = 1$; $\binom{s}{n} = \frac{s(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-n+1)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$

$s \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \binom{s}{n} = 0$ für $n > s$, und $B_s(z) = \underbrace{(1+z)^s}_{\text{binom. Satz}}$

<u>Satz 9</u>: Für $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ hat die Reihe $B_s(z)$ den Konv. Radius $R = 1$

Ferner: $B_s(z) \cdot B_t(z) = B_{s+t}(z) \quad \forall\, s,t \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$

<u>Beweis</u>: Konv. Radius: Übung.

$|z| < 1 \Rightarrow B_s(z), B_t(z)$ abs. konv. Cauchy-Prod.:

$B_s(z) \cdot B_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ mit $c_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{s}{j} \cdot \binom{t}{n-j} = \binom{s+t}{n}$ ■

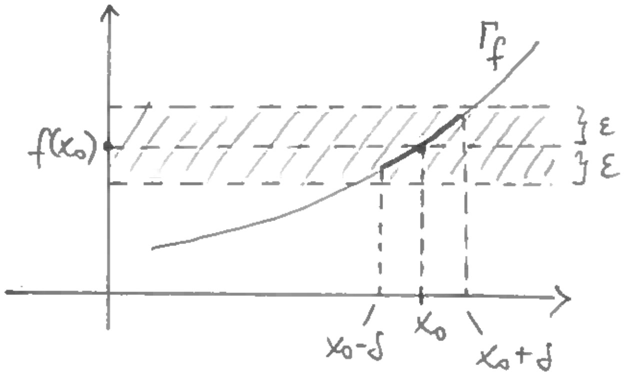
Add. Theorem, Aufg. H4, Blatt 6

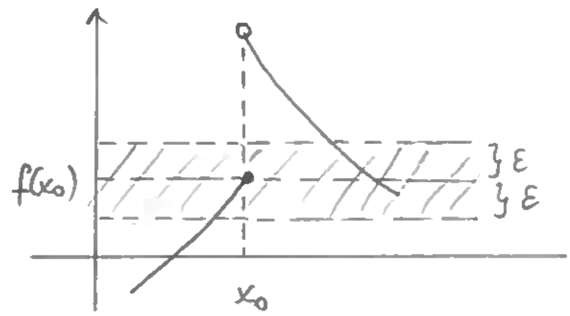
§9 Stetige Funktionen und Grenzwerte

1. Stetigkeitsbegriff

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f: D \to \mathbb{R}$ eine Fkt und $x_0 \in D$

Anschaulich: f stetig in x_0 $:\Longleftrightarrow$ der Graph von f hat keinen Sprung in x_0





Präzise Fassung:

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$

Dh. kleine Änderungen des Arguments bewirken nur kleine Änderungen der Fkt-werte.

Im folgenden stets: $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $D \subseteq \mathbb{C}$

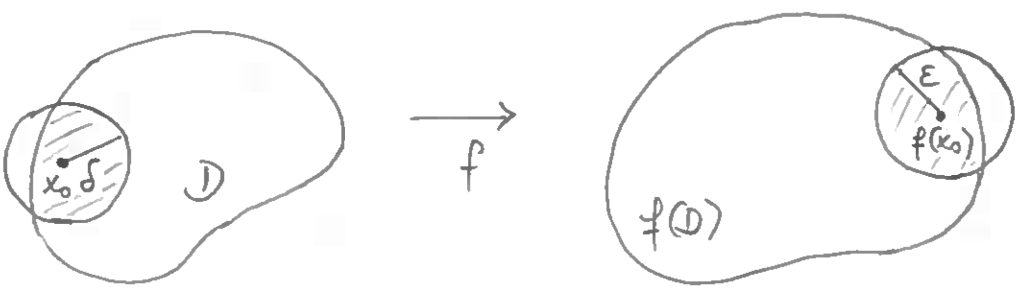
$f: D \to \mathbb{C}$ (schließt $f: D \to \mathbb{R}$ ein)

Def. $f: D \to \mathbb{C}$ heißt *stetig* in $x_0 \in D$ $:\Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \;\; \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$

(ε-δ-Kriterium)

f stetig auf D $:\Longleftrightarrow$ f stetig in allen $x_0 \in D$.



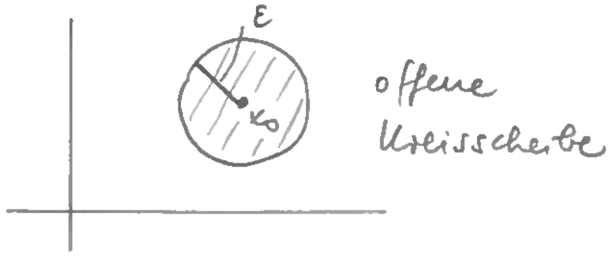
Formulierung mit Umgebungen:

Sei $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $x_0 \in X$

$\mathcal{U}_\varepsilon(x_0) := \{x \in X : |x - x_0| < \varepsilon\}$ $\quad$ ε-Umgebung von x_0 (in X)

$X = \mathbb{R}$:

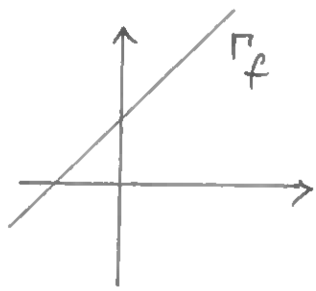
$X = \mathbb{C}$:



Sei $D \subseteq X$, $f : D \to \mathbb{C}$ Fkt, $x_0 \in D$. Dann:

f stetig in x_0 $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$f(x) \in \mathcal{U}_\varepsilon(f(x_0)) \quad \forall x \in D \cap \mathcal{U}_\delta(x_0)$$



Bsp: 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$

f stetig auf ganz $\mathbb{R}$, denn:

Sei $\varepsilon > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $|f(x) - f(x_0)| = |a| \cdot |x - x_0|$

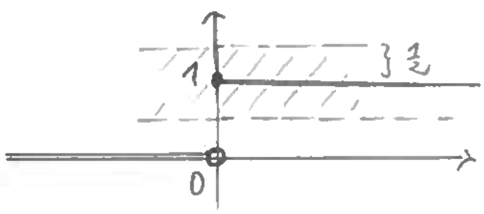
1. Fall: $a = 0$ $\Rightarrow$ $\delta > 0$ beliebig wählbar

2. Fall: $a \neq 0$. $\delta := \frac{\varepsilon}{|a|}$ $\Rightarrow$ $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$

Ebenso: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$ stetig auf ganz $\mathbb{C}$

2. Heaviside-Fkt: $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



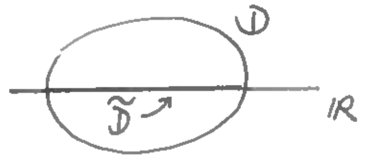
H unstetig in $x_0 = 0$ (zu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ läßt sich kein $\delta > 0$ finden, so dass ε-δ-Krit. erfüllt)

Aber H stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, dh. in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft!

3. Sei $f: D \to \mathbb{C}$ stetig. $\tilde{D} \subseteq D \Rightarrow$ die Restriktion
$f|_{\tilde{D}}: \tilde{D} \to \mathbb{C}$, $f|_{\tilde{D}}(x) := f(x)$ ist stetig auf $\tilde{D}$ (klar)

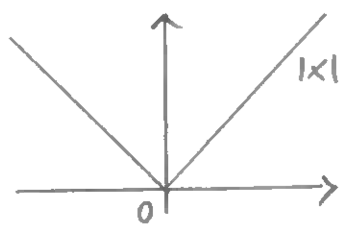
Wichtiger Spezialfall: $D \subseteq \mathbb{C}$;
$\tilde{D} = D \cap \mathbb{R}$.



4. $f: D \to \mathbb{C}$ heißt <u>Lipschitz-stetig</u> auf D :$\Leftrightarrow$
$\exists L \geq 0: \; |f(x)-f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x,y \in D$
L: Lipschitz-Konst. für f.

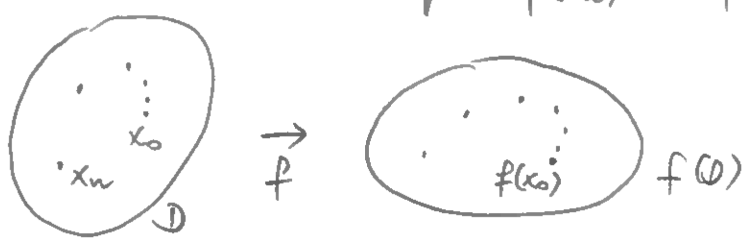
f L-stetig auf $D \Rightarrow f$ stetig auf D, denn: O.E. $L>0$.
$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ falls $|x-x_0| < \frac{\varepsilon}{L} =: \delta$

<u>Bsp</u>: 1. $f(z) = az+b$ $(a,b \in \mathbb{C})$ ist L-stetig auf $\mathbb{C}$ mit $L = |a|$
2. $f(z) = |z|$, $f: \mathbb{C} \to [0,\infty)$ ist L-stetig auf $\mathbb{C}$ mit $L=1$
Denn: $\big||z|-|w|\big| \leq |z-w|$
Also auch $f(x) = |x|$ L-stetig auf $\mathbb{R}$



3. $f(z) = \bar{z}$: L-stetig auf $\mathbb{C}$ mit $L=1$.

<u>Satz 1</u> <u>Folgenkriterium für Stetigkeit</u>
Sei $f: D \to \mathbb{C}$, $x_0 \in D$. Dann:
f stetig in $x_0 \Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$
gilt $f(x_n) \to f(x_0)$



Man sagt: f ist folgenstetig in x_0

<u>Beweis</u>: „$\Rightarrow$" Sei $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0$. Sei $\varepsilon > 0$
f stetig in $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0: |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$ mit $|x-x_0|<\delta$
$x_n \to x_0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}: |x_n - x_0| < \delta \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$. Also $f(x_n) \to f(x_0)$

„$\Leftarrow$" Angen. f sei unstetig in $x_0 \Rightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0$, zu dem sich kein δ finden läßt, so dass ε-δ-Krit. erfüllt

Insbes. (mit $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$): $\exists\, x_n \in D$: $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, aber

$$|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0$$

$\Rightarrow x_n \to x_0$, aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$ ∎

<u>Satz 2</u> $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$ ist stetig auf $\mathbb{C}$

(damit auch $x \mapsto e^x$ stetig auf $\mathbb{R}$)

<u>Beweis</u>: Restgliedabsch.: $|z| \leq 1 \Rightarrow |e^z - 1| \leq 2|z|$ (Satz 5, §8)

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $(z_n) \subseteq \mathbb{C}$ Folge mit $z_n \to z_0$, o.E. $|z_n - z_0| \leq 1$

$\Rightarrow |e^{z_n} - e^{z_0}| = |e^{z_0}(e^{z_n - z_0} - 1)| \leq |e^{z_0}| \cdot 2|z_n - z_0| \to 0$

$\underset{\text{Folgenkrit.}}{\Longrightarrow}$ f stetig in z_0 ∎

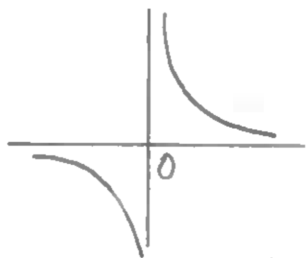
<u>Satz 3</u> <u>Regeln für stetige Funktionen</u>

Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ stetig in $x_0 \in D$, $\lambda \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$

$f+g, f \cdot g, \lambda f : D \to \mathbb{C}$ sind stetig in x_0

Falls $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} : \{x \in D : g(x) \neq 0\} \to \mathbb{C}$ stetig in x_0

<u>Bsp</u>: $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



<u>Beweis</u>: Mit Folgenkrit.: Sei $(x_n) \subseteq D$

mit $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$, $g(x_n) \to g(x_0)$ $\underset{\text{f. GW}}{\overset{\text{Regeln}}{\Longrightarrow}}$

$f(x_n) \pm g(x_n) \to f(x_0) \pm g(x_0)$, $\lambda f(x_n) \to \lambda f(x_0)$

Falls $g(x_0) = y_0 \neq 0$ $\underset{g(x_n) \to y_0 \neq 0}{\Longrightarrow}$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $|g(x_n)| \geq \frac{1}{2}|y_0| > 0 \ \forall n \geq n_0$

und $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$ ∎

Konsequenz: $C(D) := \{f: D \to \mathbb{C} \text{ stetig}\}$ ist $\mathbb{C}$-VR

$C_{\mathbb{R}}(D) := \{f: D \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ist $\mathbb{R}$-VR

Bsp: Polynome und rationale Fkt

1. Sei $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ Polynomfkt, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$
   Wiederholte Anwend. von Satz 3 $\Rightarrow$ p stetig auf ganz $\mathbb{K}$

2. Eine rationale Fkt auf $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist eine Fkt der Form

   $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ mit $p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, $q \neq 0$

   Def. Bereich: $D = \{x \in \mathbb{K} : q(x) \neq 0\}$. Menge $\mathbb{K} \setminus D$ der Def.-Lücken ist endlich!

   Satz 3 $\Rightarrow$ R stetig auf D

Vergrößerung von D evtl. möglich durch Kürzen gemeinsamer Teilerpolynome.

Def. Sei R rational auf $\mathbb{K}$. $\alpha \in \mathbb{K}$ heißt n-facher Pol von R $(n \in \mathbb{N})$ $:\Leftrightarrow$ $R = \dfrac{p}{q}$, wobei $p(\alpha) \neq 0$ und α n-fache NS von q.

d.h. $R(x) = \dfrac{p(x)}{(x-\alpha)^n s(x)}$ mit $s \in \mathcal{P}_{\mathbb{K}}$, $s(\alpha) \neq 0$

Bsp: $R(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ rat. auf $\mathbb{R}$. $R(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\Rightarrow$ $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

-1: 1-facher Pol

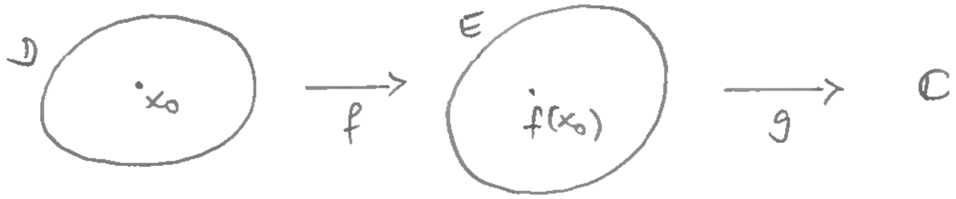
Bessere Kenntnis von Polynomen / rat. Fkt bei Betrachtung als Fkt auf $\mathbb{C}$ (wegen Fund. Satz d. Algebra)

Satz 4 Komposition stetiger Fkt

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $f: D \to E$, $g: E \to \mathbb{C}$ geg.

Sei f stetig in $x_0 \in D$, g stetig in $f(x_0) \in E$ $\Rightarrow$

$g \circ f: D \to \mathbb{C}$ ist stetig in x_0



Beweis: Sei $(x_n) \subseteq D$ mit $x_n \to x_0 \overset{\text{Folgenkrit.}}{\Rightarrow} f(x_n) \to f(x_0)$

$\underset{\text{Folgenkrit. für } g}{\Rightarrow} \quad g(f(x_n)) \to g(f(x_0))$ ∎

Bsp: 1. $z \mapsto e^{z^2} = e^{(z^2)}$ ist stetig auf $\mathbb{C}$, da
$e^{z^2} = (\exp \circ f)(z)$, $f(z) = z^2$.

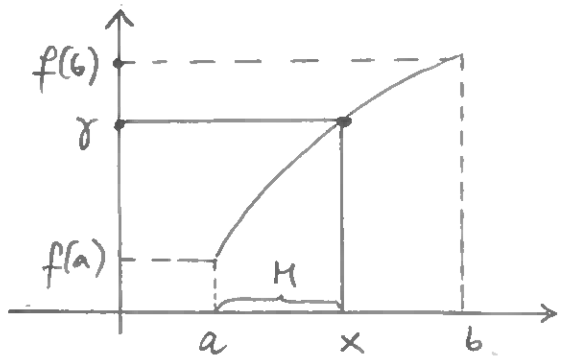
2. Für $f: D \to \mathbb{C}$ definiere $\bar{f}, |f|: D \to \mathbb{C}$ durch
$\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$; $\quad |f|(x) := |f(x)|$
Also: $\bar{f}, |f| = g \circ f$ mit $g(z) = \bar{z}, |z|$, $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig
Sei f stetig in $x_0 \in D \underset{\text{Satz 4}}{\Rightarrow} \bar{f}, |f|$ stetig in x_0.

2. Stetige reelle Funktionen auf Intervallen

Satz 5: Zwischenwertsatz (ZWS)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$\Rightarrow$ f nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



Dh: $\gamma \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ $\Rightarrow$ $\exists\, x \in [a,b] : f(x) = \gamma$.

Beweis: Sei etwa $f(a) \leq f(b)$. o.E. $f(a) < \gamma < f(b)$ (sonst wähle $x = a$ bzw $x = b$)

$M := \{ t \in [a,b] : f(t) \leq \gamma \}$

$M \neq \emptyset$ (da $a \in M$), M beschränkt

$x := \sup M \Rightarrow x \in [a,b]$

Beh: $f(x) = \gamma$

Dazu: $x = \sup M \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists\, t_n \in M :: x - \frac{1}{n} < t_n \leq x$

$f(t_n) \leq \gamma$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x$

f stetig $\Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) \leq \gamma < f(b)$

Insbes. folgt: $x < b$

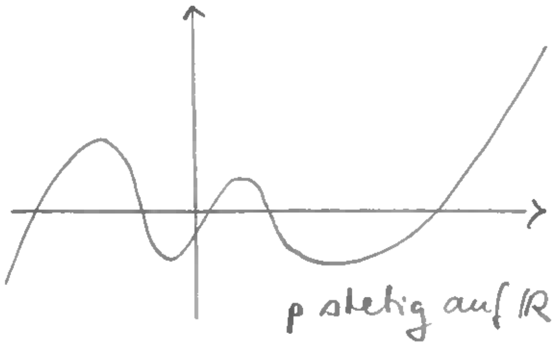
Wähle Folge (s_n) in $(x, b]$ mit $s_n \to x$

$\Rightarrow f(s_n) > \gamma$ (da $s_n \notin M$)

$\Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(s_n) \geq \gamma$

Zusammen: $f(x) = \gamma$ ∎

Korollar Sei $p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ reelles Polynom ungeraden Grades $\Rightarrow$
p hat mindestens 1 reelle Nullstelle.



Beweis: p habe o.E. Leitkoeff. 1, dh.

$$p(x) = x^n + \underbrace{a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}_{=: q(x)}$$

n ungerade

Betrachte $q(\pm r)$, $r > 1$

$$|q(\pm r)| \leq |a_{n-1}| r^{n-1} + \ldots + |a_0| \underset{r>1}{\leq} r^{n-1} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|}_{=: M}$$

$r \geq M \Rightarrow |q(\pm r)| \leq r^n$

$\Rightarrow p(r) = r^n + q(r) \geq 0, \; p(-r) = -r^n + q(-r) \leq 0$

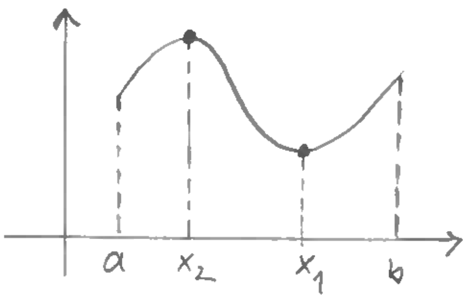
p stetig $\underset{ZWS}{\Rightarrow} \exists x \in [-r, r] : p(x) = 0$ ∎

Def: 1. Ein abgeschlossenes, beschr. Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ heißt auch kompaktes Intervall.

2. Eine Fkt $f: D \to \mathbb{C}$ ($D \subseteq \mathbb{C}$) heißt beschränkt $:\Leftrightarrow$
$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \;\; \forall x \in D$.

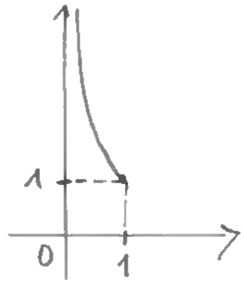
Satz 6 (Satz vom Maximum u. Minimum)
Sei $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig
$\Rightarrow$ f ist beschränkt und nimmt auf I ein Maximum und ein Minimum an, dh.

$$\exists x_1, x_2 \in I : \underbrace{f(x_1)}_{\min\limits_{x \in I} f(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_2)}_{\max\limits_{x \in I} f(x)} \quad \forall x \in I$$

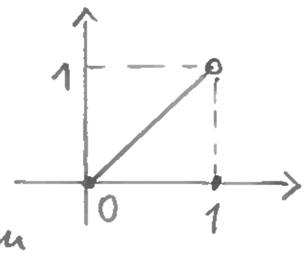


Beide Voraussetzungen sind notwendig! Dazu:

<u>Bsp:</u> 1. $f(x) = \frac{1}{x}$ auf $\underbrace{(0,1]}_{\text{nicht kompakt!}}$ ist stetig, aber unbeschr.



2. Auf $[0,1]$: $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 0, & x = 1 \end{cases}$



f unstetig, nimmt auf $[0,1]$ kein Max. an

<u>Beweis v. Satz 6</u>: Nachweis des Max. (Min. analog)

$s := \sup\{f(x) : x \in I\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Def. von sup $\Rightarrow \exists$ Folge $(x_n) \subseteq I$ mit $f(x_n) \to s$

(x_n) beschr. $\Rightarrow$ (Bolzano-Weierstraß)

(x_n) besitzt konvergente Teilfolge (x_{n_k}), $x_{n_k} \to x \in \mathbb{R}$

$I = [a,b] \Rightarrow a \le x_{n_k} \le b \;\; \forall k \Rightarrow a \le x \le b$, d.h. $x \in I$

f stetig $\Rightarrow \underbrace{f(x_{n_k})}_{\to s} \to f(x) \Rightarrow s = f(x) < \infty$, und

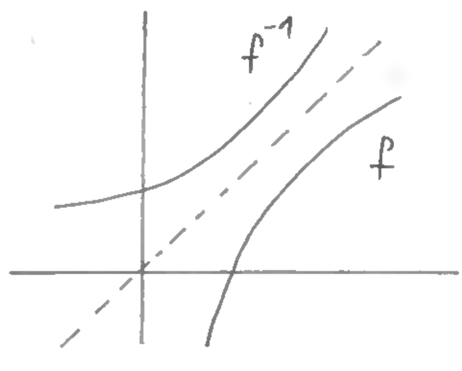
$s = \max\limits_{x \in I} f(x)$ ∎

<u>Satz 7</u> Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann:

(1) $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ist ebenfalls Intervall

(2) (<u>Satz über die Stetigkeit der Umkehrfkt</u>)

Ist f zusätzlich streng monoton, so ist $f: I \to f(I)$ bijektiv, und die Umkehrfkt f^{-1} ist ebenfalls stetig und im selben Sinne streng monoton.

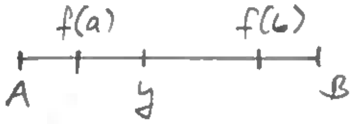


Achtung: Hier I <u>beliebiges</u> Intervall

Beweis: (1) $A := \inf f(I) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

$B := \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Sei $A < y < B \Rightarrow \exists\, a, b \in I : f(a) < y < f(b)$



ZWS $\Rightarrow \exists\, x \in I : y = f(x)$, d.h. $y \in f(I)$

$\Rightarrow (A, B) \subseteq f(I) \Rightarrow f(I)$ ist eines der Intervalle (A, B), $[A, B)$, $(A, B]$, $[A, B]$ (je nachdem, ob $A, B \in f(I)$ oder nicht)

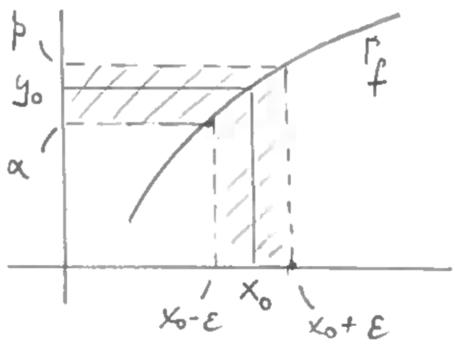
(2) f streng monoton $\Rightarrow f : I \to f(I) =: J$ bij. und $f^{-1} : J \to I$ im selben Sinne streng mon. (Satz 3, §8)

Noch zu zeigen: f^{-1} stetig in jedem $y_0 \in J$

Sei $y_0 = f(x_0)$. o.E. f s.m.w.

1. Fall: x_0 kein Randpkt von I.

Sei $\varepsilon > 0$, o.E. ε so klein, dass $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq I$



$\alpha := f(x_0 - \varepsilon)$, $\beta := f(x_0 + \varepsilon)$

$\Rightarrow \alpha < y_0 < \beta$

Sei $y \in (\alpha, \beta) \xRightarrow{(f^{-1}\text{ s.m.w.})}$

$\underbrace{f^{-1}(\alpha)}_{x_0 - \varepsilon} < f^{-1}(y) < \underbrace{f^{-1}(\beta)}_{x_0 + \varepsilon}$

$\Rightarrow |f^{-1}(y) - \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{= x_0}| < \varepsilon \quad \forall\, y \in (\alpha, \beta) \Rightarrow f^{-1}$ stetig in y_0.

2. Fall: x_0 linker bzw. rechter Randpkt von I: ersetze $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ durch $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ bzw. $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ im obigen Argument. ■

Bsp: k-te Wurzelfkt ($k \in \mathbb{N}$)

Potenzfkt $f(x) = x^k$, $[0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig, s.m.w., bijektiv

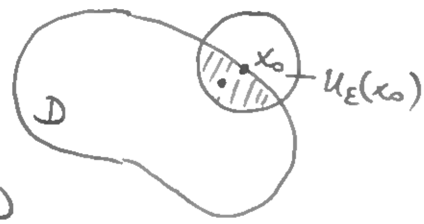
Umkehrfkt: $\sqrt[k]{x} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ s.m.w. (schon bekannt), stetig auf $[0, \infty)$ nach Satz 6.

3. Häufungspunkte

Sei $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

<u>Def.</u> Sei $D \subseteq X$. $x_0 \in X$ heißt <u>Häufungspunkt</u> (HP) von D, falls jede ε-Umgebung von x_0 (in X) einen von x_0 verschiedenen Punkt aus D enthält.

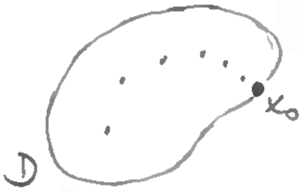
(x_0 muß nicht zu D gehören!)



$x_0 \in D$ heißt <u>isoliert</u> $:\Longleftrightarrow$ x_0 kein HP von D

$(\Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x_0) \cap D = \{x_0\})$

<u>Satz 8</u> $x_0 \in X$ ist HP von $D \Longleftrightarrow \exists$ Folge $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$



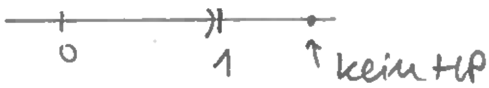
<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$" Zu $n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in D \setminus \{x_0\}$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ $\Rightarrow x_n \to x_0$.

„$\Leftarrow$" Sei $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$

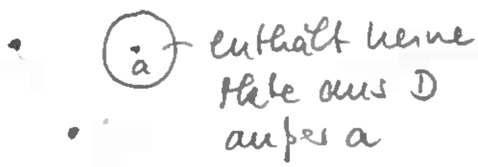
$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \varepsilon$, d.h. $x_n \in U_\varepsilon(x_0)$ ∎

<u>Bsp:</u> 1. $D = [0,1) \subseteq \mathbb{R}$

Menge aller HP: $[0,1]$



2. D endlich $\Rightarrow$ D hat keine HP, alle $x \in D$ sind isoliert.

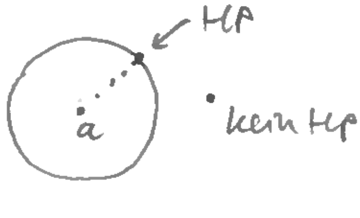


3. $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$

0 ist einziger HP

4. $D = B_R(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$

Menge aller HP: $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \le R\}$



Bem: Unterscheide Häufungspkt / Häufungswert !
↑ eines Menge ↑ eines Folge

Ein Häufungswert eines Folge (x_n) muß nicht notwendig HP der Menge $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ sein!

Bsp: $x_n = (-1)^n$ hat HW ± 1, aber $\{\pm 1\}$ hat keine HP

4. Grenzwerte von Funktionen

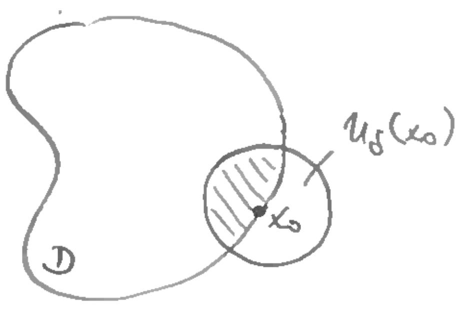
Ziel: Studiere $f : D \to \mathbb{C}$ in der Nähe eines HP von D.
(oft: Def.-lücke von D)

Bsp: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; f stetig auf D

Wie verhält sich f nahe $x_0 = 0$?

Def. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ Fkt ($D \subseteq \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$), x_0 HP von D.
f konvergiert für $x \to x_0$ gegen $a \in \mathbb{C}$ $:\Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \ |f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x \in D \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$

d.h. $\forall x \in \underbrace{(D \setminus \{x_0\}) \cap U_\delta(x_0)}_{\neq \emptyset, \text{ da } x_0 \text{ HP}}$



a: Grenzwert (Limes) von f in x_0

Schreibweise: $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = a}$

oder: $f(x) \to a$ für $x \to x_0$

Satz 9 Folgenkriterium für Grenzwerte

Geg. $f: D \to \mathbb{C}$, x_0 HP von D. Dann gilt:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \iff$ für jede Folge $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt $f(x_n) \to a$.

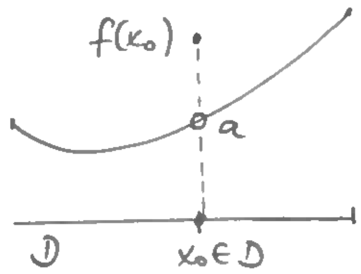
Beweis: wörtlich wie Folgenkrit. für Stetigkeit.

Beachte: Falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ exist., so ist er eindeutig
(da Grenzwerte von Folgen eindeutig)

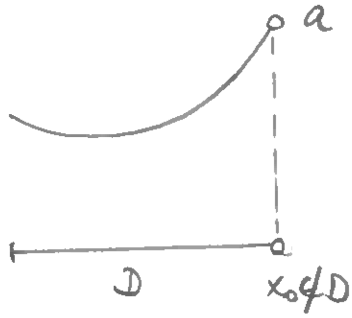
Falls $x_0 \in D$, so gilt:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ist (sofern existent) unabh. von $f(x_0)$!
2. f stetig in $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Bsp ($D \subseteq \mathbb{R}$):



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \neq f(x_0)$



$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$

Falls $x_0 \notin D$: Die Existenz eines GW von f in x_0 ist äquiv. zu stetiger Fortsetzbarkeit von f in x_0

Genauer gilt (gemäß GW-Def.):

Satz 10 Sei $x_0 \notin D$ HP von D. Dann: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$
$\iff$ die Fortsetzung $\tilde{f}: D \cup \{x_0\} \to \mathbb{C}$,
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in D \\ a, & x = x_0 \end{cases}$$
ist stetig in x_0.

Bsp: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \underbrace{(x+1)}_{=\tilde{f}(x),\ \text{stetig in } 1} = 2$

Satz 11 $\boxed{\lim\limits_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1}$ $(D = \mathbb{C} \setminus \{0\})$

Beweis: $\left| \frac{e^z-1}{z} - 1 \right| = \frac{1}{|z|} \left| e^z - 1 - z \right| \leq |z|$ für $0 < |z| \leq 1$

(Restgliedabschätzung. Satz 5, § 8)

Sei $\varepsilon > 0$, o.E. $\varepsilon \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{e^z-1}{z} - 1 \right| < \varepsilon \ \forall z$ mit $0 < |z| < \varepsilon \Rightarrow$ Beh.

Satz 12 Rechenregeln für Grenzwerte

(1) Seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ und x_0 HP von D mit

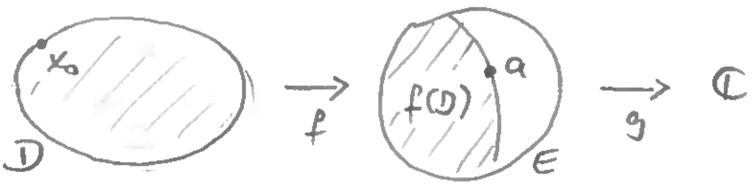
$f(x) \to a$, $g(x) \to b$ für $x \to x_0$ $(a, b \in \mathbb{C})$ $\Rightarrow$

$f(x) \pm g(x) \to a \pm b$; $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{a}{b}$ falls $b \neq 0$

(2) Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, x_0 HP von D, $f : D \to E$ Fkt

mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \in E$. Sei ferner $g : E \to \mathbb{C}$ stetig in a

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = g(a)$



(3) Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ reellwertig mit $f \leq g$ auf D,

x_0 HP von D $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, sofern die Limiten exist.

Beweis: Mit Folgenkrit. für GW (Satz 9):

(1) Sei $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a$, $g(x_n) \to b \Rightarrow$

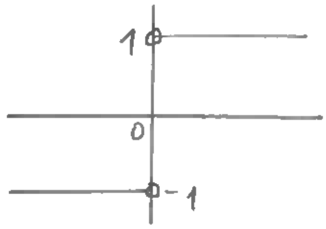
$f(x_n) \pm g(x_n) \to a \pm b$; $b \neq 0 \Rightarrow \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{a}{b}$.

(2) $(x_n) \subseteq D \setminus \{x_0\}$, $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to a \underset{\text{in } a}{\overset{g \text{ stetig}}{\Longrightarrow}} g(f(x_n)) \to g(a)$.

(3) analog ∎

Bsp: $f(x) = \frac{x}{|x|}$ auf $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ exist. nicht



Aber: Limes exist., falls $D = (0, \infty)$ oder $(-\infty, 0)$

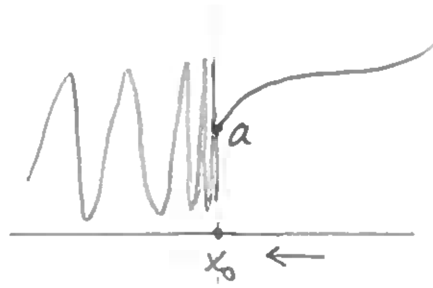
Def Einseitige Grenzwerte. Hier: $D \subseteq \mathbb{R}$

Sei $f: D \to \mathbb{C}$ und x_0 HP von $\{x \in D : x > x_0\}$

$a \in \mathbb{C}$ heißt rechtsseitiger Grenzwert von f in x_0 :$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\substack{\{x \in D : x > x_0\} \\ x \to x_0}} f(x) = a$$

Schreibweise: $\boxed{\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = a}$

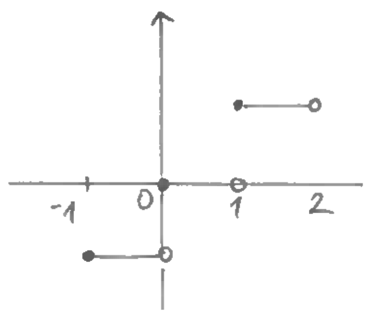


Analog: Linksseitiger GW $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$

Falls $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$, so heißt f rechtsseitig stetig in x_0. Analog: linksseitig stetig.

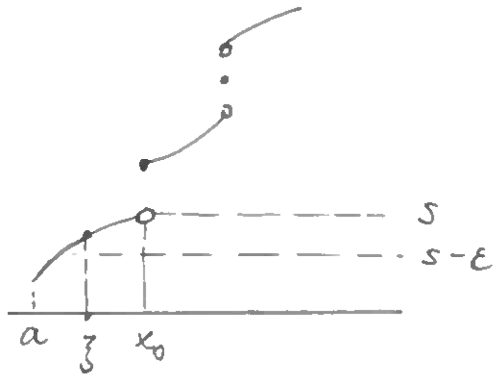
Bsp: 1. $\lim\limits_{x \downarrow 0} \frac{x}{|x|} = 1$, $\lim\limits_{x \uparrow 0} \frac{x}{|x|} = -1$

2. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist rechtsseitig stetig in allen $x \in \mathbb{R}$.



Sätze 9, 12 gelten entsprechend für einseitige GW.
(9: Folgenkrit., 12: Rechenregeln)

Satz 13 Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ monoton + beschränkt $\Rightarrow$
f hat in jedem $x_0\in[a,b]$ einseitige Grenzwerte (in a bzw. b nur rechts- bzw. linksseitigen)



Beweis: Für mon. wachsend.

Sei $x_0\in(a,b]$

Beh: $\lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = \sup\{f(x): x\in(a,x_0)\}$
$=: s$

Dazu: Sei $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\, \xi\in(a,x_0): \ f(\xi) > s-\varepsilon$ (nach Def. von s)

f monoton $\Rightarrow$ $s-\varepsilon < f(x) \le s \quad \forall x\in[\xi,x_0)$

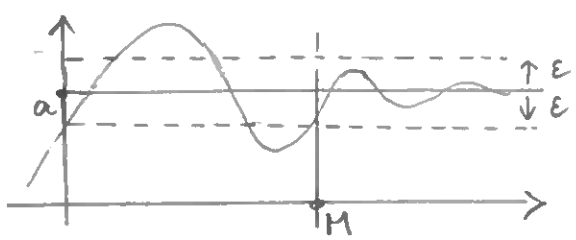
$\Rightarrow \lim\limits_{x\uparrow x_0} f(x) = s$

Analog für $x_0\in[a,b)$: $\lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x) = \inf\{f(x): x\in(x_0,b)\}$ ■ // 18.12.

Grenzwerte für $x\to\pm\infty$

Hier $D\subseteq\mathbb{R}$

Def. Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt; $f: D\to\mathbb{C}$ geg.
$a\in\mathbb{C}$ heißt Grenzwert von f in $+\infty$, kurz: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$
$:\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists M>0: |f(x)-a|<\varepsilon \quad \forall x\in D$ mit $x\geq M$



Analog def. man $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, falls D nach unten unbeschr.

Die Regeln aus Satz 12 gelten entsprechend. Dies sieht man aus folgender

Beobachtung: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{\xi\downarrow 0} f\left(\frac{1}{\xi}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{\xi\uparrow 0} f\left(\frac{1}{\xi}\right)$
(sofern Limiten exist.)

Lemma Sei $f: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton wachsend, nach oben unbeschr.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$$

Beweis: $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists M \geq a: f(M) > \frac{1}{\varepsilon} \underset{f \text{ mon.}}{\Longrightarrow} 0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \;\; \forall x \geq M$ ■

Beispiele: 1. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} = 0$

2. $$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{b_0}{x^n}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{a_n}{b_n}$$

falls $b_n \neq 0$

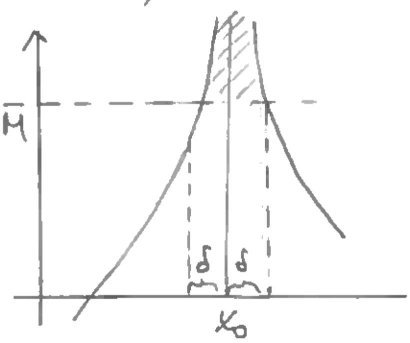
Uneigentliche Grenzwerte

Def. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$, x_0 HP von D und $f: D \to \mathbb{R}$ (reellwertig)

f hat in x_0 den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$, kurz:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \;:\Longleftrightarrow$

$\forall M > 0 \;\exists \delta > 0: \; f(x) \geq M \;\; \forall x \in D \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta$

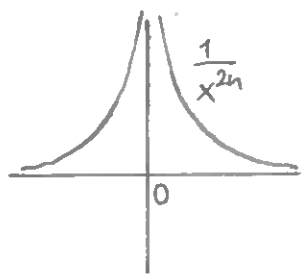


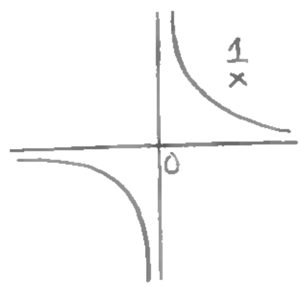
Analog def. man uneigentlichen GW $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, sowie uneigentliche Grenzwerte, falls $D \subseteq \mathbb{R}$, für $x \downarrow x_0$, $x \uparrow x_0$, $x \to \pm\infty$.

Bsp: 1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

2. $\lim_{x\downarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$,

$\lim_{x\uparrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$

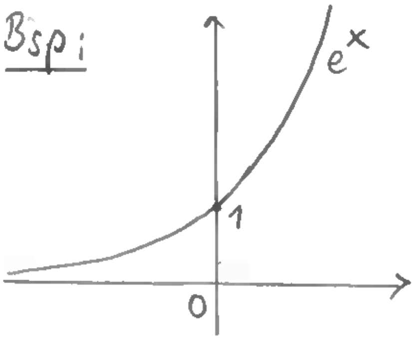




Regeln: 1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ („$\Leftarrow$" gilt nicht!)

2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \wedge f(x) > 0 \;\forall x \in D \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$

Bsp:



Sei $n \in \mathbb{N}_0 \Longrightarrow$

(1) $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}$

d.h. e^x wächst für $x \to +\infty$ stärker als jede Potenz von x

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Beweis: (1) $x > 0 \Rightarrow e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Longrightarrow$

$$\frac{e^x}{x^n} > \frac{x}{(n+1)!} \to +\infty \text{ für } x \to +\infty \Rightarrow \text{Beh.}$$

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x \underset{y=-x}{=} \lim\limits_{y \to +\infty} (-1)^n y^n e^{-y} \underset{(1)}{=} 0.$

§ 10 Verwandte der Exponentialfunktion

1. Logarithmus und allgemeine Potenzen

Lemma 1 $\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ ist stetig, streng mon. wachsend und bijektiv.

Beweis: stetig + s.m.w. schon bekannt (Satz 2, § 9, Satz 4, § 8), insbes. inj.

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\underset{\text{ZWS}}{\Longrightarrow}$ exp nimmt jedes $y \in (0,\infty)$ als Wert an (denn exp nimmt Werte $\geq y$ als auch Werte $\leq y$ an)

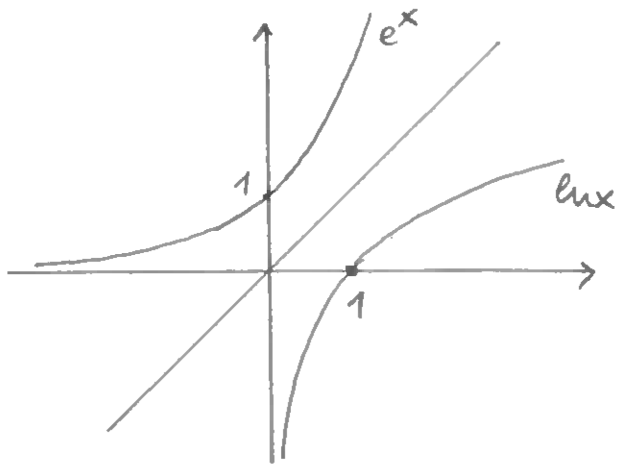
$\Rightarrow$ exp surj. ∎

Mit Satz über die Stetigkeit d. Umkehrfkt. folgt:

$\exp: \mathbb{R} \to (0,\infty)$ hat Umkehrfkt

$\ln: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ Natürlicher Logarithmus

$\ln$ ist stetig + streng monoton wachsend auf $(0,\infty)$



Also:

$e^x = y \iff x = \ln y$

$(x \in \mathbb{R}, y > 0)$

Spezielle Werte:

$\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$

Aus Grenzwerten von e^x: $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, $\lim_{x\downarrow 0} \ln x = -\infty$

Satz 1 (1) $\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$ $\forall x,y > 0$ Funktionalgl.

(2) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Beweis: (1) $e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y} \underset{\exp \text{ inj.}}{\Longrightarrow}$ Beh.

(2) $\underbrace{\ln\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)}_{= \ln 1 = 0} \underset{(1)}{=} \ln x + \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

(3) $y := \ln(1+x)$, d.h. $x = e^y - 1$. $x \to 0 \Leftrightarrow y \to 0$. Also:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{e^y - 1} \underset{\text{Satz 11, §9}}{=} 1 \qquad \blacksquare$$

Exponentialfkt zu allgemeinen Basen

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. $q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $(m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow$

$$a^q = \sqrt[n]{(e^{\ln a})^m} \underset{FG}{=} \sqrt[n]{e^{m \ln a}} \underset{FG}{=} e^{q \ln a}$$

Def. Für $a > 0$ setze $\boxed{a^z = \exp_a(z) := e^{z \ln a}}$

Exponentialfkt zur Basis a

Lemma 2 (Eigenschaften)

(1) FG: $a^z \cdot a^w = a^{z+w}$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$

Denn: $a^z \cdot a^w = e^{z \ln a} \cdot e^{w \ln a} = e^{(z+w)\ln a} = a^{z+w}$

(2) $a^0 = 1$; $a^z \neq 0$ und $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

(3) $\exp_a$ ist stetig auf $\mathbb{C}$ (Kompos. stetiger Fkt)

(4) $a > 1 \underset{\ln a > 0}{\Longrightarrow} \exp_a : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ streng mon. wachsend, bij.

$a < 1 \underset{\ln a < 0}{\Longrightarrow}$ " " " " fallend, bij.

(5) $a, b > 0 \Longrightarrow \begin{cases} a^x b^x = (ab)^x \\ (a^x)^y = a^{xy} \end{cases}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

(Übung)

Potenzfunktionen:

Fixiere Exponenten $s \in \mathbb{R}$

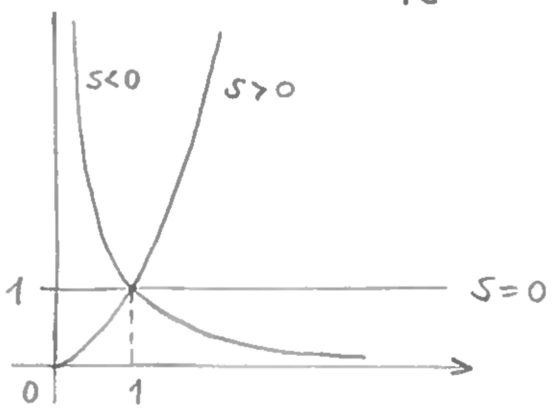
$p_s(x) := x^s = e^{s \ln x}$, $x \in (0,\infty)$ Potenzfkt zum Exponenten s

Speziell: $p_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{x}$

p_s ist stetig auf $(0,\infty)$ (Kompos. stetiger Fkt)

Falls $s>0$: $\lim\limits_{x \downarrow 0} x^s = \lim\limits_{x\downarrow 0} e^{s\ln x} = 0$, da $\lim\limits_{x\downarrow 0} s \ln x = -\infty$

$\Rightarrow p_s$ stetig fortsetzbar in 0 mit $p_s(0) = 0$

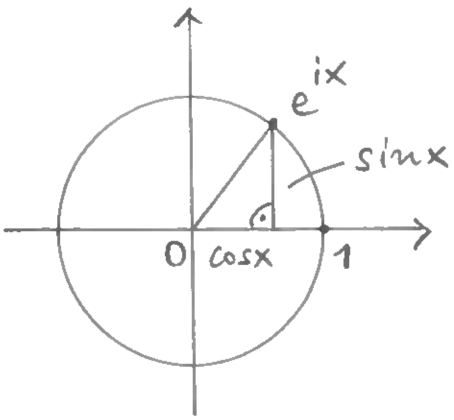


Ferner: $\lim\limits_{x\to\infty} x^s = +\infty$

2. Trigonometrische Funktionen

Wir wissen: $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

Speziell: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{e^{ix}} = e^{-ix} \Rightarrow |e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot e^{-ix} = 1$



Def. (Sinus/Cosinus auf $\mathbb{R}$)

Sei $x \in \mathbb{R}$

$\cos x := \mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$\sin x := \mathrm{Im}(e^{ix}) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

Damit:

Satz 2 $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ 1. $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$ Eulersche Formel

2. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ $\qquad \cos^2 x = (\cos x)^2$

Insbes: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -1 \leq \cos x, \sin x \leq 1$.

Verallgemeinerung obiger Def:

Def. (Cosinus/Sinus auf $\mathbb{C}$) Sei $z \in \mathbb{C}$.

$$\cos z := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \quad ; \quad \sin z := \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Bez: Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ mit $D = -D = \{-x : x \in D\}$

$f: D \to \mathbb{C}$ gerade $:\Leftrightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$

" ungerade $:\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$

Lemma 3 (1) cos und sin sind stetig auf ganz $\mathbb{C}$ (klar)

(2) cos ist gerade, sin ungerade, d.h.

$\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(3) Potenzreihen:

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k + (-i)^k}{2} \cdot \frac{z^k}{k!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} \mp \dots$$

analog: $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots$

Konv. Radius beider Reihen: ∞ (da jeweils Summe zweier Reihen mit KR ∞)

(4) Additionstheoreme: $z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow$

(i) $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

(ii) $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

Zu (i): $\cos(z+w) = \frac{1}{2}(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}) = \frac{1}{2}(e^{iz}e^{iw} + e^{-iz}e^{-iw}) =: c$

$$\cos z \cos w - \sin z \sin w = \frac{1}{4}\Big[(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) +$$
$$+ (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw})\Big] = \dots = c$$

(ii) analog.

(5) Differenzenformeln:

$$\cos z - \cos w = -2\sin\frac{z+w}{2}\cdot\sin\frac{z-w}{2}$$

$$\sin z - \sin w = 2\cos\frac{z+w}{2}\cdot\sin\frac{z-w}{2}$$

Beweis analog zu (4)

(6) $\boxed{\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1}$ $\quad (D = \mathbb{C}\setminus\{0\})$

Denn: $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0}\Big(\underbrace{\frac{e^{iz}-1}{2iz}}_{\to\frac{1}{2}} - \underbrace{\frac{e^{-iz}-1}{2iz}}_{\to -\frac{1}{2}}\Big) = 1$

Nun: Nullstellen, Periodizität von Cosinus, Sinus.

Dazu zunächst Untersuchung auf $\mathbb{R}$

Lemma 4 (Einschließungslemma)

(1) $x\mapsto\cos x$ ist auf $[0,2]\subseteq\mathbb{R}$ streng mon. fallend mit

$$1-\frac{x^2}{2}\le\cos x\le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24} \qquad (*)$$

(2) $x\in[0,2] \Rightarrow 0\le x-\frac{x^3}{6}\le\sin x\le x$

Beweis: (1) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\underbrace{\frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{=:a_k\ge 0}$ alternierend

$a_{k+1} = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)}\cdot a_k \Rightarrow (a_k)$ mon. fallend ab $k=1$ und $\lim a_k = 0$.

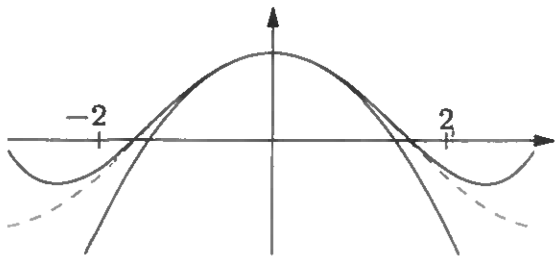
Leibniz-Kriterium $\Rightarrow (*)$

Für $\sin x$ analog

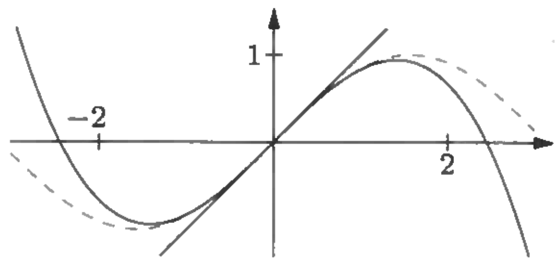
Zur Monotonie von cos: sei $0\le x<y\le 2 \Rightarrow$

$$\cos y-\cos x \underset{(5)}{=} -2\sin\Big(\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\in(0,2]}\Big)\cdot\sin\Big(\underbrace{\frac{y-x}{2}}_{\in(0,2]}\Big) < 0$$

denn: $\xi\in(0,2] \Rightarrow \sin\xi \underset{(2)}{\ge} \xi\Big(1-\frac{\xi^2}{6}\Big) > 0$ ∎

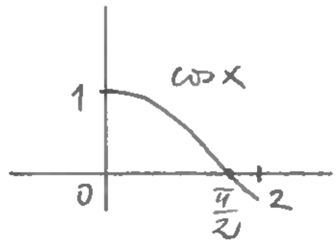


Einschließung des Cosinus



Einschließung des Sinus

$\cos 0 = 1$; $\cos 2 \underset{(*)}{\leq} 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} < 0$



ZWS + strenge Monotonie von cos liefern:

<u>Satz 3 (+ Def.)</u> $\cos x$ hat auf $[0, 2]$ genau 1 Nullstelle
Diese wird mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet.

π: <u>Kreiszahl</u> ; $\pi \approx 3{,}1415$

π ist transzendent (Lindemann, 1882) (wie auch e)

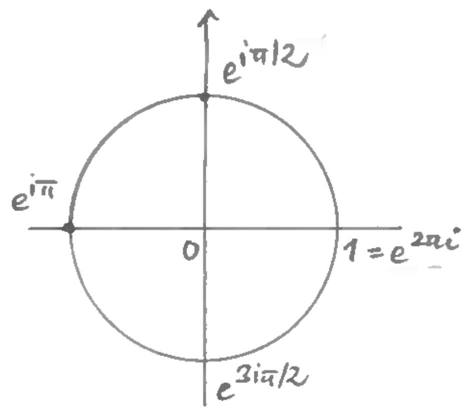
$\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 1$ (da $\sin\frac{\pi}{2} > 0$ nach Einschl. lemma)

$\Rightarrow e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = i$

FG für exp $\Rightarrow$ $e^{i\pi} = i^2 = -1$, etc.

Wertetabelle:

x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
e^{ix}	i	-1	$-i$	1
$\cos x$	0	-1	0	1
$\sin x$	1	0	-1	0



$e^{2\pi i} = 1 \underset{FG}{\Longrightarrow} \forall z \in \mathbb{C}: \quad e^{z + 2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z.$

<u>Korollar 1</u> (<u>Periodizität von exp</u>) $z \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$\boxed{e^{z+2\pi i} = e^z}$; $e^{z + i\pi} = -e^z$; $e^{z \pm i\pi/2} = \pm i e^z$

<u>Bez:</u> Sei $X = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. $f: X \to \mathbb{C}$ heißt <u>p-periodisch</u> $(p \in X \setminus \{0\})$
$:\Longleftrightarrow f(x+p) = f(x) \quad \forall x \in X$.

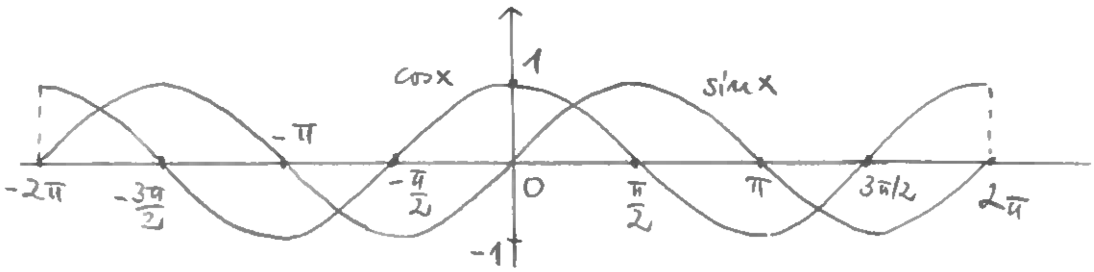
[e^z ist $2\pi i$-period.

<u>Kor. 2</u> $z \in \mathbb{C} \Rightarrow \cos(z+2\pi) = \cos z$; $\sin(z+2\pi) = \sin z$
d.h. cos, sin sind 2π-periodisch

Ferner: $\cos(z+\pi) = -\cos z$; $\sin(z+\pi) = -\sin z$
$\cos(z+\frac{\pi}{2}) = -\sin z$; $\sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos z$

<u>Beweis:</u> $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$ + Kor. 1; analog für sin. ∎

<u>Satz 4</u> (1) $\cos x$ hat auf $\mathbb{R}$ genau die NS $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
(2) $\sin x$ " " " " " " $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.



<u>Beweis:</u> (1) $\cos(-x) = \cos x \Rightarrow \cos$ hat in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ nur $\frac{\pi}{2}$ als NS
$\cos(x+\pi) = -\cos x \Rightarrow$ in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ hat cos genau die
NS $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. 2π-Periodizität $\Rightarrow$ Beh.
(2) mit $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ aus (1) ∎

<u>Korollar 3:</u> $\cos x > 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\sin x > 0 \quad \forall x \in (0, \pi)$

<u>Satz 5</u> (1) Für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$
(2) 2π ist die kleinste positive Periode von sin, cos.

<u>Beweis:</u> (1) $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{2k\pi i} = (e^{2\pi i})^k = 1^k = 1$
Umgekehrt: Sei $e^z = 1$, $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow$
$1 = |e^z| = |e^{x+iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow 1 = e^z = e^{iy} = \cos y + i \sin y \Rightarrow \cos y = 1 \wedge \sin y = 0$

$\Rightarrow y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ k$ gerade.

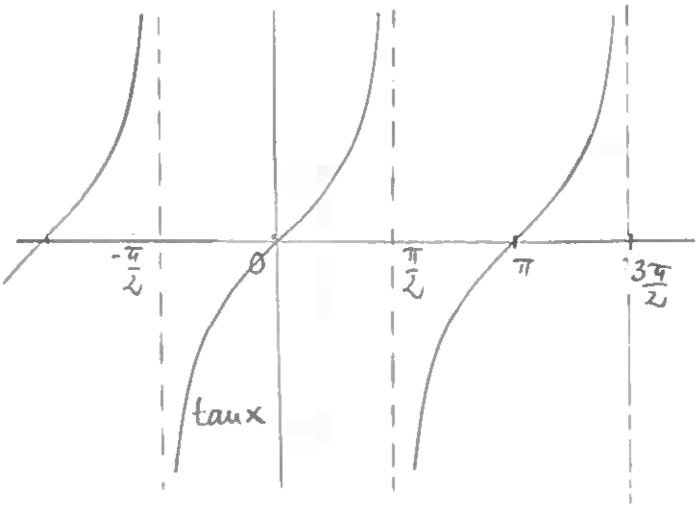
(2) Angen. cos (und damit auch sin) hat Periode p, $0 < p < 2\pi$

$\Rightarrow e^{ip} = \cos p + i \sin p = \cos 0 + i \sin 0 = 1$ ↯ zu Satz 5 ∎

<u>Def</u> (<u>Tangens, Cotangens</u>)

$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$



tan x und cot x sind stetig auf ihrem jeweiligen Def. bereich, ungerade und π-periodisch.

$\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

$\tan 0 = 0$;

$\tan \frac{\pi}{4} = 1$, denn: $\sin\frac{\pi}{4} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4} \neq 0$

$\lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \tan x = \lim_{x \uparrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \to 1}{\cos x \to 0} = +\infty$, da $\cos x > 0$ auf $(0, \frac{\pi}{2})$

Später: tan s.m.w., + Umkehrfkt

// 8.1.15

3. Polarkoordinaten

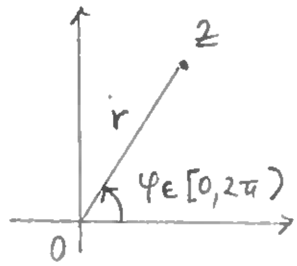
Satz 6 Jedes $z \in \mathbb{C}$ ist darstellbar als

$$\boxed{z = re^{i\varphi}} \quad \text{und} \quad r = |z| \geq 0, \ \varphi \in \mathbb{R}$$

Für $z \neq 0$ ist φ eindeutig bis auf Addition von $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(r,φ): Polarkoordinaten von z

φ : Argument von z



übliche Wahl: $\varphi \in [0,2\pi)$ oder $\varphi \in (-\pi,\pi]$

Beweis: $z = 0 \Rightarrow r = 0$, φ beliebig.

Sei $z \neq 0$, $r := |z|$, $w = \frac{z}{r} \Rightarrow |w| = 1$.

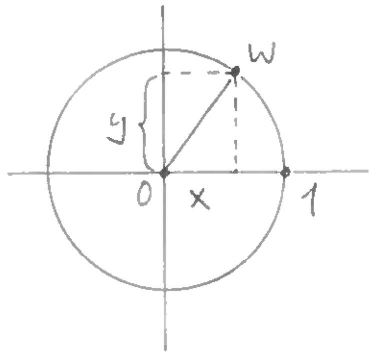
Sei $w = x + iy$, $x,y \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2+y^2 = 1$. Insbes $x \in [-1,1]$

$\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1 \underset{\cos \text{ stetig + ZWS}}{\Longrightarrow} \exists \varphi \in [0,\pi]: x = \cos\varphi$

1\. Fall: $y \geq 0 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\varphi} =$

$= \sin\varphi$, da $\sin\varphi \geq 0$

$\Rightarrow w = e^{i\varphi}$



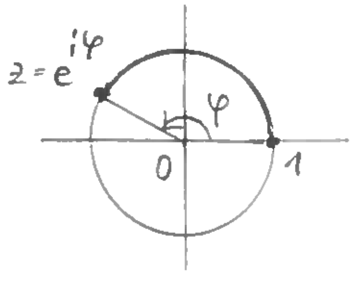
2\. Fall: $y < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{1-x^2} = -\sin\varphi$

$= \sin(-\varphi)$

$\Rightarrow w = e^{-i\varphi}$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $z = re^{i\varphi} = re^{i\psi}$, $r > 0 \Rightarrow e^{i(\varphi-\psi)} = 1$

$\underset{\text{Satz 5}}{\Longleftrightarrow} \varphi - \psi \in 2k\pi$ ■



Bem: $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0,2\pi) \Rightarrow$

$\varphi =$ Länge des Kreisbogens von 1 bis z

(„Winkel" zwischen 1 und z)

→ Übungen!

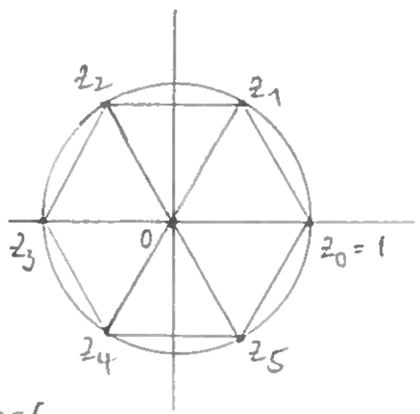
Polarkoord. sind praktisch bei Multiplikation.

$z = re^{i\varphi}$, $w = se^{i\psi}$ $\Rightarrow$ $zw = rse^{i(\varphi+\psi)}$

Multipliziere Beträge, addiere Argumente (ggf. mod 2π)

<u>Satz 7</u> Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau die Lösungen

$$z_k = e^{2k\pi i/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$ <u>n-te Einheitswurzeln</u>



$n=6$

<u>Beweis:</u> $z_k^n = e^{2k\pi i} = 1$, und es gibt höchstens n Lsg, da $z^n - 1$ Polynom n-ten Grades ☒

Die z_k bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks!

§11 Differentialrechnung

1. Die Ableitung

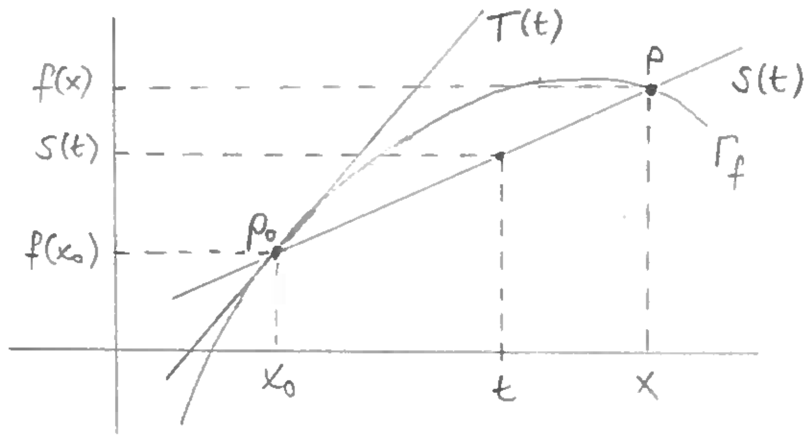
Def. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall (mit mehr als 1 Pkt), $f: I \to \mathbb{C}$ geg.
f heißt differenzierbar in $x_0 \in I$, falls

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{Differenzenquotient in } x_0} \in \mathbb{C} \quad \text{existiert} \qquad (D = I \setminus \{x_0\})$$

$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$: Ableitung von f in x_0

f differenzierbar auf I $:\Leftrightarrow$ f diffbar in jedem $x_0 \in I$.

Geometrische Deutung (f $\mathbb{R}$-wertig):



Gleichung der Geraden (Sekante) durch p_0 und p:

$$S(t) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{Steigung}} \cdot (t - x_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Falls $f'(x_0)$ exist., so geht mit $x \to x_0$ die Sekante in die folgende Gerade über:

$$T(t) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (t - x_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

„Tangente" an Γ_f in p_0

Bsp 1. (1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = c$ (konst.) mit $c \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f$ diffbar auf $\mathbb{R}$, $f' \equiv 0$ (identisch 0)

(2) $f(x) = x^n$ $(x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

$$x_0 \in \mathbb{R},\ x \neq x_0 \Rightarrow \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-2} x + x_0^{n-1} \xrightarrow[x \to x_0]{} n x_0^{n-1}$$

$\Rightarrow f$ diffbar auf $\mathbb{R}$, $f'(x) = n x^{n-1}$

(3) $f(x) = e^{ax}$ mit $a \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ f diffbar auf $\mathbb{R}$ mit

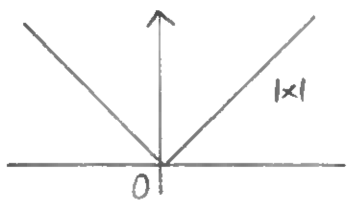
$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^{ax}) = a e^{ax}} \qquad \text{Insbes.: } \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Denn: o.E. $a \neq 0$.
$$\frac{e^{ax} - e^{ax_0}}{x - x_0} \underset{x - x_0 =: h}{=} \frac{e^{a(x_0+h)} - e^{ax_0}}{h} = e^{ax_0} \cdot a \cdot \underbrace{\frac{e^{ah} - 1}{ah}}_{\to 1 \text{ für } h \to 0} \to a e^{ax_0}, \quad x \to x_0$$

(4) $x \mapsto \ln x$ ist diffbar auf $(0, \infty)$ mit $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$

Denn: $x > 0,\ h \neq 0 \Rightarrow$
$$\frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}}_{\to 1 \text{ (Satz 1, § 10)}} \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{1}{x}$$

(5) $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$. f diffbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit



$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

f nicht diffbar in 0:
$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{|x| - 0}{x} = +1, \quad \lim_{x \uparrow 0} \frac{|x| - 0}{x} = -1$$

Betrachte $f: I \to \mathbb{C}$, $x_0 \in I$

$$x \neq x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + q(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{mit } q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad (*)$$

<u>Satz 1.</u> f diffbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

<u>Beweis:</u> $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim\limits_{x\to x_0} \underbrace{q(x)}_{\to f'(x_0)}\cdot\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0} = f(x_0)$ ∎

<u>Beachte:</u> f diffbar in $x_0 \Leftrightarrow q$ stetig fortsetzbar in x_0
In diesem Fall ist $q(x_0) = f'(x_0)$

Also:

<u>Satz 2</u> (<u>Umformulierung d. Diffbarkeit</u>)
f diffbar in $x_0 \Leftrightarrow$ es gibt eine in x_0 stetige Fkt $q: I \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = f(x_0) + q(x)\cdot(x-x_0)$$

In diesem Fall ist $f'(x_0) = q(x_0)$

<u>Bem:</u> Es gibt Fkt, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber nirgends diffbar sind!
Erstes Bsp: Weierstraß 1861 (siehe z.B. Königsberger, 9.11.)

<u>Def.</u> (<u>Einseitige Ableitungen</u>)
Geg. $f: I \to \mathbb{C}$, $x_0 \in I$. Existiert nur

$$\lim_{x\uparrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0-) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\downarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0+)$$

so heißt dieser Grenzwert die <u>linksseitige bzw. rechtsseitige Ableitung</u> von f in x_0.

<u>Bsp:</u> $f(x) = |x| \Rightarrow f'(0+) = +1,\ f'(0-) = -1$

2. Ableitungsregeln

Satz 3. $f, g : I \to \mathbb{C}$ diffbar in $x \in I \Rightarrow f+g,\ f \cdot g$ sind diffbar in x, und im Fall $g(x) \neq 0$ auch $\frac{f}{g}$.

Dabei gelten:

(1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$c \in \mathbb{C} \Rightarrow (cf)'(x) = c \cdot f'(x)$

(2) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ <u>Produktregel</u>

(3) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ <u>Quotientenregel</u>

<u>Beweis</u>: (2) $\dfrac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)} \cdot f(x)$$

(1) ähnlich

(3) $$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x) g(x+h)}$$

$$= -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(x) \underset{\text{Prod. Regel}}{=} \frac{f'}{g} + f \cdot \left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad \blacksquare$$

<u>Bsp 2.</u> (1) $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ Polynom $(a_i \in \mathbb{C}) \xRightarrow[\text{+ Regeln}]{\text{Bsp 1.(2)}}$ p diffbar auf ganz $\mathbb{R}$, $p'(x) = n a_n x^{n-1} + \ldots + a_1$

(2) $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ rational $\Rightarrow R$ diffbar auf $\{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$

<u>Bsp:</u> $R(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}) \Rightarrow R$ diffbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$R'(x) \underset{\text{Quot.R.}}{=} -\frac{n x^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

(3) $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$; $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ $\Rightarrow$ Bsp 1(3)

$\cos x$, $\sin x$ diffbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$\boxed{\cos'(x) = -\sin x \;;\quad \sin'(x) = \cos x}$$

<u>Satz 4</u> <u>Kettenregel</u>: Seien $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{C}$ Fkt,
$I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle.
f sei diffbar in $x_0 \in I$, g sei diffbar in $f(x_0)$ $\Rightarrow$
$g \circ f$ ist diffbar in x_0 mit

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

„Nachdifferenzieren von f"

<u>Beweis</u>: I. Versuch:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)}$$

problematisch,
da $f(x) - f(x_0) = 0$ in Umgeb. von 0 möglich!

II. Mit Umformulierung d. Diffbarkeit (Satz 2):
$\exists\, q : I \to \mathbb{C}$, stetig in x_0 mit

$$f(x) - f(x_0) = q(x) \cdot (x - x_0), \quad q(x_0) = f'(x_0)$$

$\exists\, r : J \to \mathbb{C}$, stetig in $f(x_0) =: y_0$ mit

$$g(y) - g(y_0) = r(y) \cdot (y - y_0), \quad r(y_0) = g'(y_0)$$

$$\Rightarrow g(f(x)) - g(f(x_0)) = \underbrace{r(f(x)) \cdot q(x)}_{\text{stetig in } x_0} \cdot (x - x_0) \underset{\text{Satz 2}}{\Rightarrow}$$

$$g \circ f \text{ diffbar in } x_0, \quad (g \circ f)'(x_0) = \underbrace{r(f(x_0))}_{g'(f(x_0))} \cdot \underbrace{q(x_0)}_{f'(x_0)} \qquad \blacksquare$$

Bsp 4 1. $p_s(x) = x^s \quad (x > 0)$ mit $s \in \mathbb{R}$.

$p_s(x) = e^{s \ln x}$. Kettenregel mit $f(x) = \ln x$, $g(y) = e^{sy} \Rightarrow$

$p_s'(x) = s e^{s \ln x} \cdot \frac{1}{x} = s x^{s-1}$

2. f diffbar in $x \Rightarrow (e^{f(x)})' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

falls $f > 0$: $(\ln f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ Logarithmische Ableitung von f

Höhere Ableitungen

Betrachte $f : I \to \mathbb{C}$, $x_0 \in I$. f sei diffbar in einer Umgebung $I \cap U_\varepsilon(x_0)$ von x_0. Ist f' diffbar in x_0, so heißt f 2-mal diffbar in x_0.

Bez: $f''(x_0) := \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) := (f')'(x_0)$ 2. Ableitung von f in x_0

Für $n \in \mathbb{N}_0$: n-te Ableitung von f in x_0: $f^{(0)} := f$;

$f^{(n)}(x_0) := (f^{(n-1)})'(x_0)$ sofern existent

f heißt dann n-mal diffbar in x_0

Bez: f n-mal stetig diffbar auf I $:\Leftrightarrow$

$f' = f^{(1)}, f'' = f^{(2)}, \ldots, f^{(n)} : I \to \mathbb{C}$

existieren und sind stetig auf I

$C^n(I) := \{ f : I \to \mathbb{C} \text{ } n\text{-mal stetig diffbar} \}$ ($\mathbb{C}$-VR)

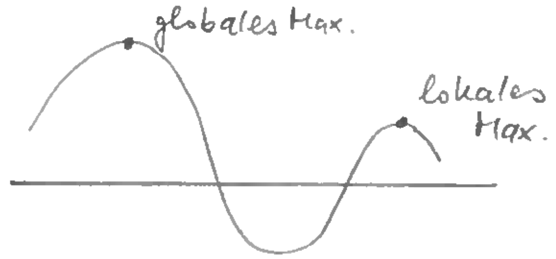
$C^0(I) = C(I) := \{ f : I \to \mathbb{C} \text{ stetig} \}$

3. Extrema und Mittelwertsatz

Def. (Extrema) Sei $f: D \to \mathbb{R}$ Fkt, $D \subseteq \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

f hat in $x_0 \in D$ ein

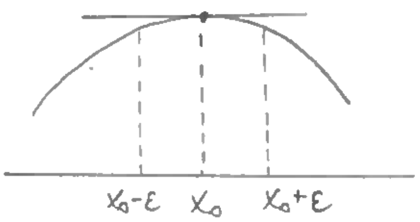
- globales Maximum $:\Leftrightarrow f(x) \le f(x_0) \quad \forall x \in D$
- lokales Maximum $:\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(x) \le f(x_0)$
  $\forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$



Dieses heißt isoliert, falls zusätzlich
$f(x) < f(x_0)$ für $|x - x_0| < \varepsilon,\ x \ne x_0$

Analog: globales / lokales Minimum

Satz 5 (Notwendiges Kriterium für lokale Extrema)
Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar in $x_0 \in (a,b)$.
f habe in x_0 lokales Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$



Beweis: f habe in x_0 lok. Max.
$\varepsilon > 0$ klein genug $\Rightarrow$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \le 0 & \text{für } x \in (x_0, x_0+\varepsilon) \\ \ge 0 & \text{"} \quad x \in (x_0-\varepsilon, x_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(x_0) = 0$ ◼

Das Krit. ist nicht hinreichend! Bsp: $f(x) = x^3$
$f'(0) = 0$, aber 0 ist keine Extremalstelle.

Vorgehen bei Suche nach Extrema:
Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Satz v. Max. u. Minimum $\Rightarrow$ f nimmt globales Max. und globales Min. an.

Kandidaten:

1. Punkte $x_0 \in (a,b)$, in denen f diffbar mit $f'(x_0) = 0$
2. Pkte, in denen f nicht diffbar

3. Randpunkte.

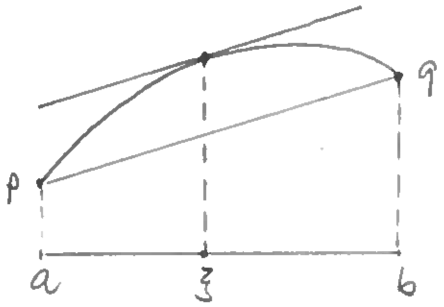
Falls $f: I \to \mathbb{R}$, I bel. (evtl. unbeschr.) Intervall.

Untersuche f am Rand von I, z.B. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$

Satz 6 Mittelwertsatz der Differentialrechnung (MWS)

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig auf $[a,b]$ und diffbar auf (a,b)

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$:



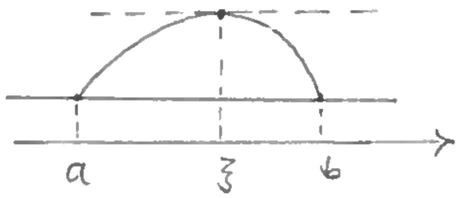
$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)}$$

↑

Steigung der Sekante durch p, q

Spezialfall: Satz v. Rolle: Ist zusätzlich $f(a) = f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$: $f'(\xi) = 0$.



Beweis: (I) für Rolle: f stetig auf $[a,b] \Rightarrow$ (Satz v. Max/Min)

f nimmt auf $[a,b]$ ein globales Max. und globales Min. an.

Falls beide am Rand $\underset{f(a)=f(b)}{\Rightarrow}$ $f = \text{konst.} \Rightarrow f' \equiv 0$ auf (a,b), fertig.

Andernfalls nimmt f ein Extremum in einem $\xi \in (a,b)$ an

Notwend. Krit. (Satz 5) $\Rightarrow f'(\xi) = 0$.

(II) Reduktion des MWS auf Satz v. Rolle: Betrachte

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

$g(a) = f(a) = g(b) \Rightarrow g$ erfüllt Vorauss. von Rolle $\Rightarrow$

$\exists\, \xi \in (a,b)$: $0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow$ MWS ∎

Anwendung des MWS:

Satz 7 Monotonieverhalten diffbarer Fkt

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar, $-\infty \le a < b \le \infty$

(1) $f' > 0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ f streng monoton wachsend auf (a,b)

(2) $f' < 0$ " " $\Rightarrow$ f " " fallend " "

(3) $f' \geq 0$ " " $\Leftrightarrow$ f monoton wachsend auf (a,b)

(4) $f' \le 0$ " " $\Leftrightarrow$ f " fallend " "

(5) $f' \equiv 0$ " " $\Leftrightarrow$ f = konst. auf (a,b)

Falls f stetig auf ganz $[a,b]$, so gelten die Aussagen rechts auf ganz $[a,b]$.

(5) gilt auch, falls f $\mathbb{C}$-wertig (mit $f = \overbrace{\operatorname{Re} f}^{=\frac{1}{2}(f+\bar{f})} + i \overbrace{\operatorname{Im} f}^{=\frac{1}{2i}(f-\bar{f})}$)

Beweis: Sei $a < x < y < b$ (bzw. $a \le x < y \le b$, falls f stetig auf $[a,b]$)

MWS $\Rightarrow$ $\exists\, \xi \in (x,y)$: $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(\xi)$

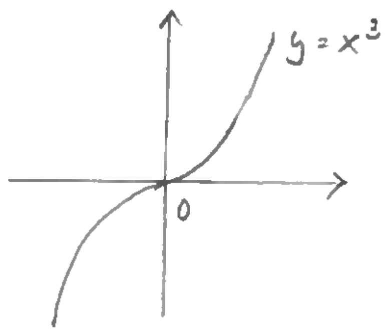
(1) $f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$, also f s.m.w. auf (a,b)

(2) und „$\Rightarrow$" in (3), (4) analog

Zu „$\Leftarrow$" in (3): Sei $x \in (a,b) \Rightarrow$ $f'(x) = \lim\limits_{y \downarrow x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$

(4) analog; (5) aus (3) + (4) ■

Beachte: In (1), (2) gilt „$\Leftarrow$" nicht!



Bsp: $f(x) = x^3$ ist auf $\mathbb{R}$ s.m.w.,
aber $f'(0) = 0$

Korollar: Sei $I = (-s, s)$, $s > 0$. $f: I \to \mathbb{C}$ sei diffbar mit
$f' = af$ auf I mit $a \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow f(x) = c \cdot e^{ax}$ mit $c = f(0)$

Beweis: (Trick!) $g(x) := e^{-ax} f(x)$. Produktregel $\Rightarrow$

$$g'(x) = -a e^{-ax} f(x) + e^{-ax} f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$$\underset{\text{Satz 7(5)}}{\Longrightarrow} \quad g(x) = \text{konst} = g(0) = c \quad \text{auf } I \quad \blacksquare$$

<u>Bem</u>: Die Gleichung $f' = af$ auf I ist eine sog. (lineare) Differentialgleichung 1. Ordnung

<u>Satz 8</u> <u>Kriterium für lokale Extrema</u>

Sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ diffbar und in $x_0 \in (a,b)$ 2-mal diffbar

Sei $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ $[f''(x_0) < 0]$ $\Rightarrow$

f hat in x_0 ein <u>isoliertes lokales Minimum</u> [Maximum].

Vorsicht: „$\Leftarrow$" gilt nicht! Bsp: $f(x) = x^4$; $f'(0) = f''(0) = 0$

hat in 0 isol. lok. Min.

<u>Beweis</u> (für Min): $f''(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$:

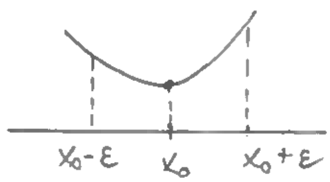
$$\forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),\ x \neq x_0: \quad \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Da $f'(x_0) = 0$, folgt:

$f'(x) > 0$ auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, d.h. f dort s.m.w.

$f'(x) < 0$ auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$, " " " s.m.f.

$\Rightarrow$ Beh $\blacksquare$



<u>Satz 9</u> <u>Verallgemeinerter MWS</u>

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und diffbar auf (a,b) mit $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ $g(a) \neq g(b)$, und $\exists \xi \in (a,b)$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

<u>Beweis</u>: 1. Angen. $g(a) = g(b) \underset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists x \in (a,b): g'(x) = 0$ ↯

2. Betrachte $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,(g(x)-g(a)) \Rightarrow$

$F(a) = f(a) = F(b) \underset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \exists\, \xi \in (a,b):\ 0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi)$ ■

Anwendung: Berechnung von Limiten d. Form

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{wo } f(x), g(x) \to 0 \text{ oder } \pm\infty \text{ (Beide)}$$

<u>Satz 10:</u> <u>Regel von L'Hospital</u>

$f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ seien diffbar mit $g'(x) \neq 0\ \forall x \in (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Es gelte:

(i) $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \to a$ oder

(ii) $f(x) \to \pm\infty$ und $g(x) \to \pm\infty$ für $x \to a$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$ sofern der Limes rechts in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert

Entsprechend für $x \to b$.

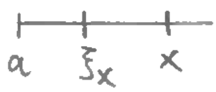
<u>Beweis:</u> 1. $x \to a$, $a \in \mathbb{R}$ (analog $x \to b;\ b \in \mathbb{R}$):

$$L := \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

<u>Fall (i):</u> f, g stetig fortsetzbar in a mit $f(a) = g(a) = 0$

Sei $x \in (a,b)$. Verallg. MWS auf $[a,x] \Rightarrow g(x) \neq 0$ und

$$\exists\, \xi_x \in (a,x):\ \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \xrightarrow[x\to a]{} L$$
$(\Rightarrow \xi_x \to a)$



<u>Fall (ii):</u> $a < x < y < b \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \cdot \underbrace{\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{f(x)}}}_{\to \frac{1-0}{1-0} = 1 \text{ für } x\to a}$ (*)

($g(x) \neq g(y)$ nach verallg. MWS)

Verallg. MWS $\Rightarrow \dfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ mit $\xi \in (x,y)$ $\quad (**)$

Betrachte Fall $L < \infty$.

Sei $\lambda > L \Rightarrow \exists \delta > 0 : \dfrac{f'(t)}{g'(t)} < \lambda \quad \forall t \in (a, a+\delta)$

$a < x < y < a+\delta \underset{(**)}{\Rightarrow} \dfrac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < \lambda$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \lambda \quad \forall x \in (a, a+\delta')$, sofern $\delta' < \delta$ klein genug

Analog: Falls $L > -\infty$, $\mu < L \Rightarrow$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} > \mu \quad \forall x \in (a, a+\delta'')$, δ'' klein genug

Insgesamt folgt: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

2. $x \to +\infty$ (analog $x \to -\infty$):

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(\frac{1}{x})}{g(\frac{1}{x})} \underset{\substack{\text{L'Hosp.} \\ \text{Teil 1.}}}{=} \lim_{x \downarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2} f'(\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2} g'(\frac{1}{x})} = \lim_{\xi \to \infty} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \blacksquare$$

<u>Bsp:</u> 1. $\lim\limits_{x \downarrow 0} x \ln x = \lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{1/x}{-1/x^2} = 0$

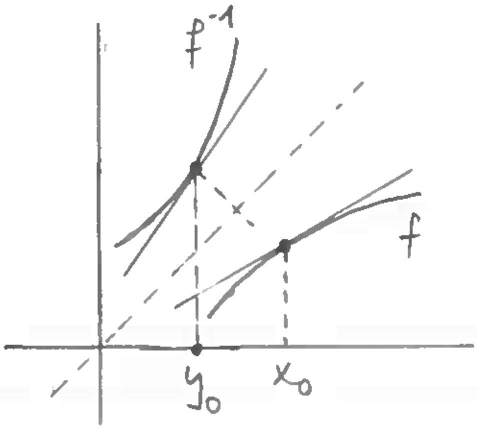
2. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x \cdot \sin x} \underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x \cos x + \sin x}$

$\underset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\sin x}{-x \sin x + 2 \cos x} = 0$

Existenz des GW „von hinten nach vorne" gesichert.

4. Ableitung der Umkehrfkt, Arcus-Funktionen

<u>Satz 11</u> Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton und diffbar in $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow$



$\Rightarrow f^{-1}$ ist diffbar in $y_0 = f(x_0)$ mit

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}}$$

<u>Beweis</u>: Satz über Stetigk. der Umkehrfkt $\Rightarrow f: I \to f(I)$ bij. und f^{-1} stetig.

Betrachte $y_0, y \in f(I)$, $y \neq y_0$. $y \to y_0 \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0) =: x_0$

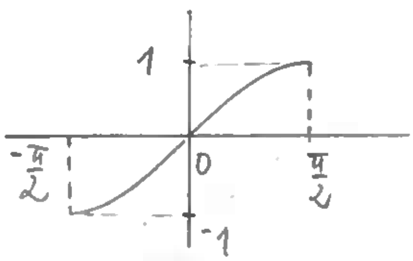
$$\Rightarrow \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \blacksquare$$

<u>Bsp</u>: $\ln y$ ist die Umkehrfkt von $e^x \underset{(e^x)' \text{ NS-frei}}{\Longrightarrow}$ $\forall y \in (0, \infty)$ gilt

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp'(\ln y)} = \frac{1}{\exp(\ln y)} = \frac{1}{y} \quad \text{(wie gehabt)}$$

<u>Die Arcus-Funktionen</u>

(1) $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist diffbar, streng mon. wachsend, bijektiv. Denn:



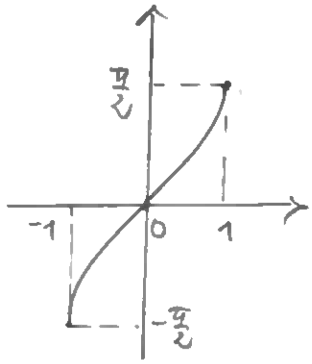
$\sin' x = \cos x > 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \underset{\text{Satz 7}}{\Longrightarrow}$

$\sin x$ s.m.w. auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\sin(\pm \frac{\pi}{2}) = \pm 1$ + ZWS $\Rightarrow$ bijektiv.

Umkehrfkt: $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

Arcus-Sinus



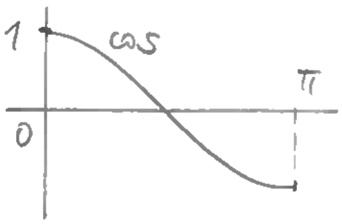
$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x}$ in $y = \sin x$ sofern $\cos x \neq 0$

$\cos \geq 0$ auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-y^2}$; $\cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}} \quad \forall y \in (-1,1)$

(nicht diffbar in $y = \pm 1$; Graph hat dort vertikale Tangente)

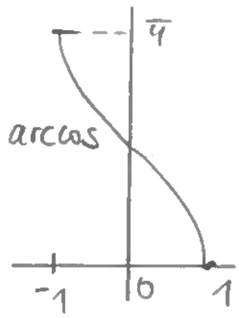
(2) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ diffbar, s.m.f., bijektiv (analog)



Umkehrfkt:

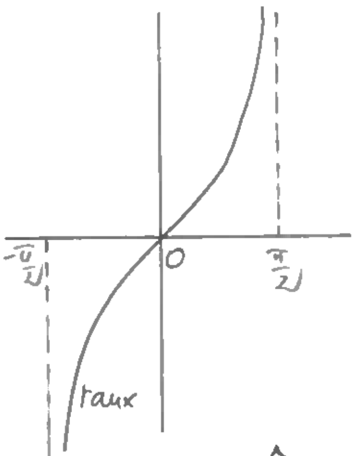
$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$

Arcus-Cosinus



$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}$ diffbar, s.m.w., bij. (Übung)

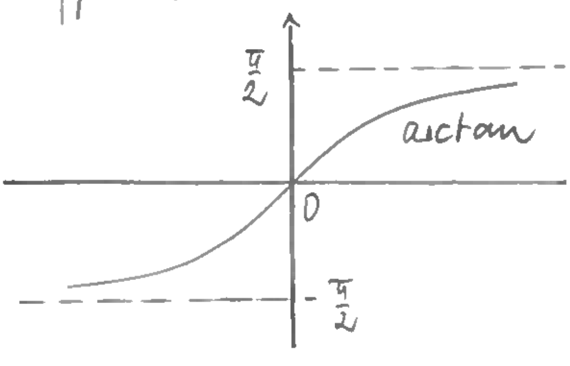


Umkehrfkt:

$\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Arcus-Tangens

ebenfalls diffbar, s.m.w., bij.



$\lim_{x \to \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$.

Ableitung: Übung

5. Konvexität

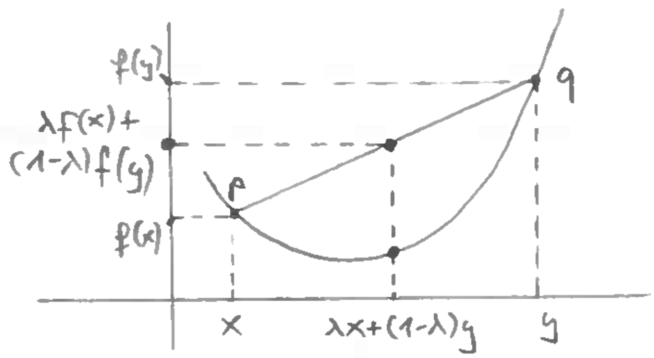
<u>Def.</u> Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ <u>konvex</u> $:\Longleftrightarrow$

$$\forall x, y \in I \ \forall \lambda \in [0,1]: \ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

f <u>streng konvex</u>, falls dabei für $x < y$ stets „$<$" gilt

f (streng) <u>konkav</u> $:\Longleftrightarrow$ $-f$ (streng) konvex

<u>Geom. Deutung:</u>

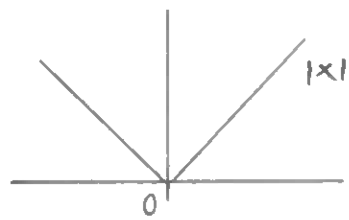


$x < y \Rightarrow$ jedes $z \in [x,y]$ hat eind. Darst.

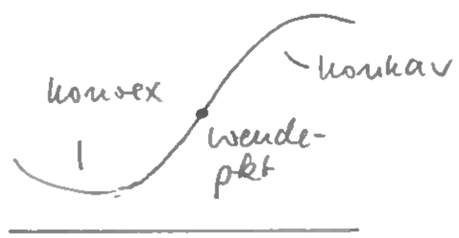
$z = \lambda x + (1-\lambda) y$, $\lambda \in [0,1]$ $\left(\lambda = \frac{y-z}{y-x}\right)$

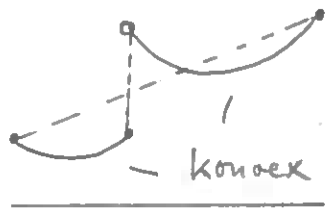
f konvex $\Leftrightarrow$ die Sekante durch p, q liegt im Bereich $[x,y]$ oberhalb des Graphen von f

Bsp: 1. $f(x) = |x|$ konvex auf $\mathbb{R}$



2.

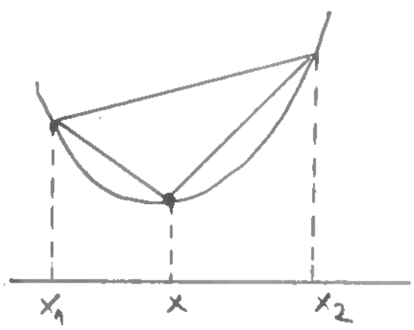




insgesamt nicht konvex

<u>Lemma:</u> $f: I \to \mathbb{R}$ konvex $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x, x_2 \in I$ mit $x_1 < x < x_2$ gilt:

$$(*) \quad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$



<u>Beweis:</u> $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ mit

$$\lambda = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \in (0,1), \quad 1 - \lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Also: f konvex $\Longleftrightarrow$ $\forall\, x \in (x_1, x_2)$ gilt

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

$\Longleftrightarrow$ $(*)$ ■

<u>Satz 12</u> (<u>Konvexitätskriterium</u>) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ 2-mal diffbar. Dann sind äquiv:

(1) f konvex auf I

(2) f' monoton wachsend auf I

(3) $f'' \geq 0$ auf I

<u>Beweis:</u> (1) $\Rightarrow$ (2): Seien $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. $x_1 < x < y < x_2$

$$\underset{\text{Lemma}}{\Rightarrow} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}}_{\to f'(x_1) \text{ für } x \downarrow x_1} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \underbrace{\frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}}_{\to f'(x_2) \text{ für } y \uparrow x_2} \Rightarrow f'(x_1) \leq f'(x_2)$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Wir zeigen $(*)$ aus dem Lemma:

$$x_1 < x < x_2 \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \underset{\text{MWS}}{=} f'(\xi) \text{ mit } \xi \in (x_1, x)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(\eta) \text{ mit } \eta \in (x, x_2)$$

$\xi < \eta \Rightarrow f'(\xi) \leq f'(\eta) \Rightarrow (*)$.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) aus Satz 7 ■

<u>Bem:</u> Für (1) $\Leftrightarrow$ (2) genügt, dass $f : I \to \mathbb{R}$ diffbar.

§12 Gleichmäßige Konvergenz

1. Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Sei D eine Menge und $f_n : D \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von Fkt mit gemeinsamem Def.bereich D

Def. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f : D \to \mathbb{C}$

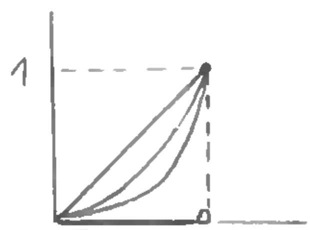
$$:\Longleftrightarrow \forall x \in D : \ f_n(x) \to f(x)$$

Dh. $\forall x \in D \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(x) = N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq N(x)$

Welche Eigenschaften der f_n vererben sich auf f?

Bsp: $f_n(x) = x^n$ auf $D = [0,1]$

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow f_n \to f$ punktweise

Alle f_n sind stetig auf $[0,1]$, aber f ist unstetig in $x = 1$!

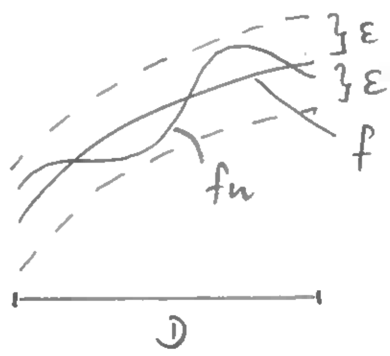
Stärkerer Konvergenzbegriff:

Def. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf D gegen $f : D \to \mathbb{C}$

$$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall n \geq N \ \underline{\text{und}} \ \forall x \in D$$

Beachte: $N = N(\varepsilon)$ ist dabei unabhängig von $x \in D$ wählbar!

Anschaulich: die f_n, $n \geq N$ bleiben im Schlauch mit Radius ε um f.



Klar: $f_n \to f$ glm. $\Rightarrow f_n \to f$ pktweise

Ferner: $f_n \to f$ glm. $\iff \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ für $n \to \infty$

Bez: Für $f: D \to \mathbb{C}$ setze

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\infty, D} := \sup_{x\in D} |f(x)|$$ Supremumsnorm von f

Es gilt: $\|f\|_\infty < \infty \iff f$ beschränkt

$\|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \quad \forall x \in D \iff f = 0$

$\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$

$\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, da $\sup\limits_{x\in D} |f(x)+g(x)| \le \sup\limits_{x\in D} |f(x)| + \sup\limits_{x\in D} |g(x)|$

Setze $B(D) := \{ f: D \to \mathbb{C}$ beschränkt $\}$, $\mathbb{C}$-VR

$\Rightarrow \|.\|_\infty$ ist Norm auf $B(D)$ im Sinne der

Def. Sei V $\mathbb{K}$-VR ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Eine Norm auf V ist eine Abb.

$\|.\| : V \to [0, \infty)$ mit

(i) $\|v\| = 0 \iff v = 0$ (Definitheit)

(ii) $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ (Homogenität)

(iii) $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$ (Dreiecks-Ungl.)

Weitere Bsp von Normen: 1. $V = \mathbb{K}$, $\|x\| = |x|$

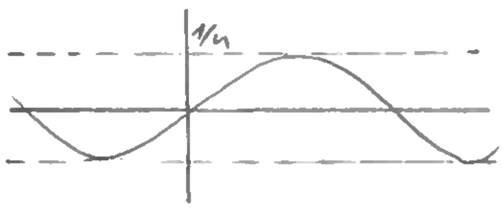
2. $V = \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

euklidische Norm ($\to$ LA, Ana II)

Für $f_n: D \to \mathbb{C}$ gilt also:

$f_n \to f$ glm. auf $D \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$

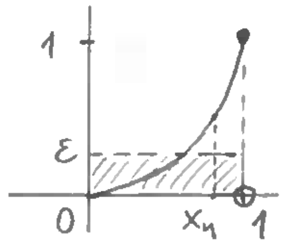
Bsp: 1. $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$ auf $D = \mathbb{R}$



$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \Rightarrow$

$f_n \to 0$ glm. auf $\mathbb{R}$

2.



$f_n(x) = x^n$ auf $[0,1]$

$f_n \to f$ (wie oben) punktweise, aber nicht glm., denn: $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n < 1 : f_n(x_n) > \varepsilon$, aber $f(x_n) = 0$.

<u>Ab jetzt</u>: $D \subseteq \mathbb{C}$ (schließt $D \subseteq \mathbb{R}$ ein)

<u>Satz 1</u> Sei $f_n : D \to \mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Folge stetiger Fkt, die gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$ konvergiert $\Rightarrow$ f ist stetig auf D.

<u>Beweis</u>: Sei $x_0 \in D$, zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$

Dazu: $f_n \to f$ glm. $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : \|f_N - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$

f_N stetig in $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Für diese x folgt:

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$ ∎

Unter geeigneten Vorauss. an f_n überträgt sich auch Diffbarkeit $\to$ später

<u>Satz 2</u> (<u>Cauchy-Kriterium</u>)

(f_n) konvergiert gleichmäßig auf D (gegen ein $f : D \to \mathbb{C}$)

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \ge N$

<u>Beweis</u>: „$\Rightarrow$“ $f_n \to f$ glm. $\Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \ge N \Rightarrow$

$\forall n, m \ge N : \|f_n - f_m\|_\infty \le \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ // 22.1.

„$\Leftarrow$“ Sei $x \in D \Rightarrow (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, also konvergent. $f(x) := \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ definiert Fkt $f : D \to \mathbb{C}$

Sei $\varepsilon > 0$, dazu N gemäß Vorauss. Sei $x \in D$.

$$|f_n(x) - f(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Trick!}}}{=} \lim_{m\to\infty} \underbrace{|f_n(x) - f_m(x)|}_{<\varepsilon} \leq \varepsilon \ \forall n \geq N \Rightarrow f_n \to f \text{ glm} \ \blacksquare$$

2. Gleichmäßig konvergente Funktionenreihen

Gegeben: $f_n : D \to \mathbb{C} \quad (n \in \mathbb{N})$

Definiere $\sum_{n=1}^{\infty} f_n : D \to \mathbb{C} \ ; \ (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$,

sofern die Reihe $\forall x \in D$ konvergiert

Bsp: $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ auf $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = e^x$

<u>Def.</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ heißt gleichmäßig konvergent auf D, falls die Folge der Partialsummen $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_k : D \to \mathbb{C}$ glm. konv.

<u>Satz 1 zeigt</u>: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ glm. konv. auf D und alle f_n stetig auf D $\Rightarrow$ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ist stetig auf D

<u>Satz 3</u> <u>Cauchy-Kriterium</u>. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konv. glm. auf D $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \| \sum_{k=m}^{n} f_k \|_\infty < \varepsilon \quad \forall n \geq m \geq N$

Dies folgt aus Cauchykrit. Satz 2 für die Partialsummenfolge.

<u>Satz 4</u> (<u>Majoranten-Kriterium</u>)

Seien $f_n : D \to \mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < \infty \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf D

(„absolut konvergent" auf D heißt: $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < \infty \ \forall x \in D$)

<u>Bsp</u>: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} =: f(x)$ konv. absolut + glm. auf $\mathbb{R}$, ist also stetig auf $\mathbb{R}$

Denn: $\sum_{1}^{\infty} \|f_n\|_\infty = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

Beweis: Absolute Konv. mit früherem Maj. Krit.

Ferner: $\sum_1^\infty \|f_n\|_\infty < \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \sum_{n=N}^\infty \|f_n\|_\infty < \varepsilon$

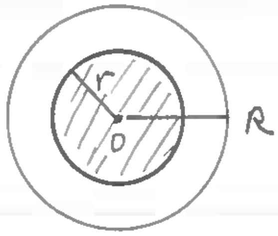
$\Rightarrow \forall n \geq m \geq N: \|\sum_{k=m}^n f_k\|_\infty \leq \sum_{k=m}^n \|f_k\|_\infty < \varepsilon \underset{\text{Cauchy-Krit.}}{\Longrightarrow}$ glm. Konv. $\blacksquare$

Satz 5: Kriterium für Potenzreihen

Sei $P(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ eine PR mit Konvergenzradius $R > 0 \Rightarrow$

(i) Für jedes $0 < r < R$ konvergiert die Reihe absolut + glm. auf $\overline{B_r(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$

(ii) $z \mapsto P(z)$ ist stetig auf $B_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$



Beweis: (i) $f_n(z) = a_n z^n$.

Auf $D := \overline{B_r(0)}$ gilt: $\|f_n\|_\infty = |a_n| r^n$

$\sum \|f_n\|_{\infty, D} = \sum |a_n| r^n < \infty$ nach Lemma 1, § 8

Majorantenkrit. $\Rightarrow$ (i)

(ii) f_n stetig auf $\mathbb{C} \underset{\text{(i)+Satz 1}}{\Longrightarrow} P = \sum_{n=0}^\infty f_n$ ist stetig auf $\overline{B_r(0)}$ $\forall r < R$

Sei $z_0 \in B_R(0)$ bel. Wähle $r < R$ mit $|z_0| < r \Rightarrow P$ stetig in z_0 $\blacksquare$

Bsp: Binomialreihe $B_s(z) = \sum_{n=0}^\infty \binom{s}{n} z^n$, $s \in \mathbb{C}$ ($\rightarrow$ Kap 8)

Bekannt (VO + ÜB.): $s \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow B_s(z) = (1+z)^s$,

B_s hat KR ∞

$s \notin \mathbb{N}_0 \Rightarrow B_s$ hat KR $R = 1$

Satz 6 1. $s \in \mathbb{C} \Rightarrow B_s$ ist stetig auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

2. Für $x \in (-1, 1)$ und alle $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{(1+x)^s = B_s(x) = \sum_{n=0}^\infty \binom{s}{n} x^n}$$

Beweis: 1. aus Satz 5.

2. Fixiere $x \in (-1,1)$. Bekannt (§ 8, Satz 9 + Üb.)

$$B_s(x) \cdot B_t(x) = B_{s+t}(x) \qquad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $f(s) = B_s(x)$ erfüllt die Funktionalgleichung

$$f(s) \cdot f(t) = f(s+t) \quad \forall s,t \in \mathbb{R}; \quad f(0) = 1$$

Beh (*): f stetig auf $\mathbb{R}$

Sobald das gezeigt ist, folgt mit Aufg H4, Blatt 11:

$$f(s) = e^{as} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

$$a = \ln f(1) = \ln(1+x) \Rightarrow f(s) = (1+x)^s.$$

Zu (*): $s \in \mathbb{R} \Rightarrow f(s+h) - f(s) = f(s) \cdot (f(h) - \underbrace{f(0)}_{=1})$

Also zu zeigen: f stetig in $s = 0$.

Wir zeigen: f stetig auf $[-1,1]$. Dazu:

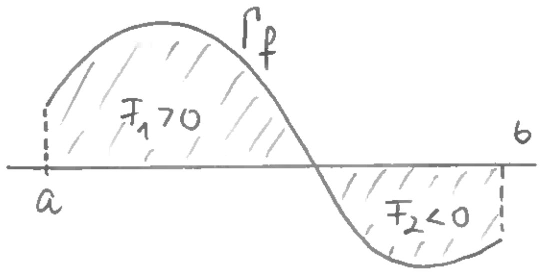
$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(s), \quad f_n(s) = \binom{s}{n} x^n = \frac{s(s-1)\cdot\ldots\cdot(s-n+1)}{n!} x^n$$

f_n stetig auf $\mathbb{R}$ (x fest)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\infty,[-1,1]} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{n!} |x|^n = \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n \underset{|x|<1}{<} \infty$$

Majorantenkrit. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konv. glm. auf $[-1,1]$ $\Rightarrow$ Beh. ■

§ 13 Integration



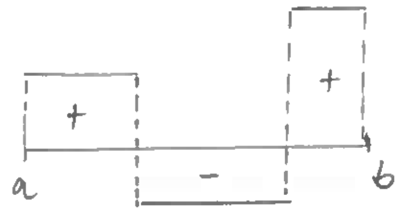
Idee: $\int_a^b f(x)\,dx =$

Fläche zwischen Γ_f und x-Achse

Im Bsp: $F_1 + F_2$

Falls f stückweise konstant:

jeweils Grundlinie $\cdot$ $\underbrace{\text{Höhe}}_{\text{mit Vorzeichen}}$

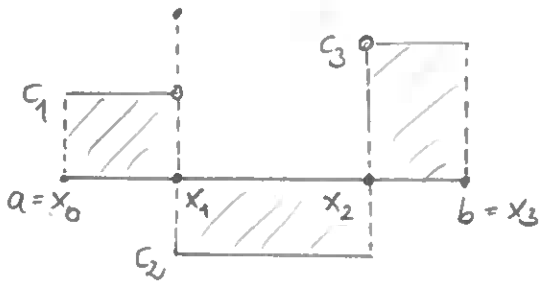


1. Integral von Treppenfunktionen

Def. $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Treppenfkt. $:\Longleftrightarrow \exists$ Unterteilung

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, so dass

$f|_{(x_{k-1}, x_k)} = \text{konst.} = c_k \quad \forall\, k = 1, \dots, n$



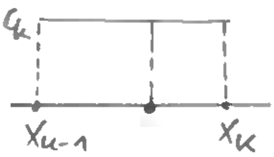
Setze

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1})$$

Integral von f über $[a,b]$

$T[a,b] := \{ f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ Treppenfkt} \}$

Beachte: 1. $\int_a^b f(x)\,dx$ ist unabhängig von den Werten von f an den Teilpunkten und ändert sich nicht bei Einfügen zusätzlicher Teilpunkte:



2. $T[a,b]$ ist $\mathbb{C}$-Vektorraum

Denn: $f, g \in T[a,b]$, $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda f \in T[a,b]$ (klar);

$f+g \in T[a,b]$, denn: f T.F. zu Unterteilung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$,
g zu $\tilde{Z} = \{\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_m\}$ $\Rightarrow$ $f+g$ T.F. zu $Z \cup \tilde{Z}$ (gemeinsame Verfeinerung von $Z, \tilde{Z}$)

3. $f \in T[a,b] \Rightarrow |f|, \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in T[a,b]$ (klar)

Lemma 1. Eigenschaften des Integrals von Treppenfkt

(1) $f, g \in T[a,b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\, dx = \lambda \cdot \int_a^b f\, dx + \mu \cdot \int_a^b g\, dx$$

D.h. die Abb. $I: T[a,b] \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_a^b f\, dx$ ist linear

(2) f, g $\mathbb{R}$-wertig mit $f \leq g$ auf $[a,b]$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b f\, dx \leq \int_a^b g\, dx \qquad \text{Monotonie}$$

(3) $$\left| \int_a^b f\, dx \right| \leq \int_a^b |f|\, dx \leq \|f\|_\infty \cdot (b-a) \qquad \text{Beschränktheit}$$

Beweis: (1) Wähle gemeinsame Unterteilung $\{x_0, \dots, x_n\}$ für f, g

$f|_{(x_{k-1}, x_k)} = c_k$; $g|_{(x_{k-1}, x_k)} = d_k$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)\, dx = \sum_{k=1}^n (\lambda c_k + \mu d_k)(x_k - x_{k-1}) = \lambda \int_a^b f\, dx + \mu \int_a^b g\, dx$$

(2) analog

(3): $$\left| \int_a^b f\, dx \right| = \left| \sum c_k (x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum |c_k| (x_k - x_{k-1}) = \int |f|\, dx$$
$$\leq \underbrace{\max |c_k|}_{= \|f\|_\infty} \cdot (b-a) \qquad \blacksquare$$

2. Integration von Regelfunktionen

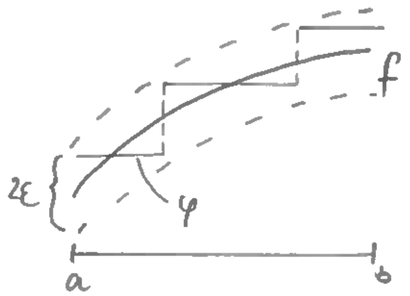
Def. $f: [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Regelfunktion $:\Leftrightarrow$
$\exists$ Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfkt auf $[a,b]$ mit

$$\lim_{n \to \infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0$$

Dabei $\|f\|_\infty = \|f\|_{\infty, [a,b]}$

//

D.h. f Regelfkt auf $[a,b]$ $\iff$
f gleichmäßig auf $[a,b]$ durch
T.F. approximierbar.



$R[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ Regelfkt}\}$

Jede RF auf $[a,b]$ ist beschränkt!

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \varphi \in T[a,b]:$
$\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$

<u>Def.</u> Sei $f \in R[a,b]$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T[a,b]$ mit
$\lim\limits_{n\to\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty = 0$. Setze

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\,dx$$

<u>Integral</u> von f über $[a,b]$
(„Cauchy-Integral")

$\int_a^b f(x)\,dx$ ist <u>wohldefiniert</u>, denn:

1. Der Limes rechts existiert, da $(\int_a^b \varphi_n\,dx)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, also konvergent. Dazu: Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow$

$$\left|\int_a^b \varphi_n\,dx - \int_a^b \varphi_m\,dx\right| \underset{\text{Lemma 1 (3)}}{\leq} \|\varphi_n - \varphi_m\|_\infty \cdot (b-a) \leq$$

$$\underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} (b-a)\cdot(\|\varphi_n - f\|_\infty + \|f - \varphi_m\|_\infty) < \varepsilon \quad \forall n,m \geq N(\varepsilon)$$

2. Der Limes ist unabhängig von der Wahl der approx. Folge (φ_n)

Denn: Sei $(\psi_n) \subseteq T[a,b]$ weitere Folge mit $\|\psi_n - f\|_\infty \to 0$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b \psi_n\,dx - \int_a^b \varphi_n\,dx\right| \underset{\text{L.1.}}{\leq} \int_a^b |\psi_n - \varphi_n|\,dx \leq \underbrace{\|\psi_n - \varphi_n\|_\infty}_{\to 0}(b-a)$$

$$\Rightarrow \lim \int_a^b \psi_n\,dx = \lim \int_a^b \varphi_n\,dx$$

<u>Beachte</u>: 1. f $\mathbb{R}$-wertig $\Rightarrow \int_a^b f\,dx \in \mathbb{R}$

Denn: f ist durch $\mathbb{R}$-wertige T.F. approximierbar:
Falls φ_n $\mathbb{C}$-wertige T.F. mit $\|f - \varphi_n\|_\infty \to 0 \Rightarrow$

$$\|f - \underbrace{\operatorname{Re}\varphi_n}_{\mathbb{R}\text{-wertige T.F.}}\|_\infty \leq \|f - \varphi_n\|_\infty \Rightarrow \int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (\operatorname{Re}\varphi_n)\,dx \in \mathbb{R}.$$

<u>Satz 1</u> (1) $R[a,b]$ ist $\mathbb{C}$-VR, und $I: R[a,b] \to \mathbb{C}$,
$f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist <u>linear</u>.

(2) $f, g \in R[a,b]$ $\mathbb{R}$-wertig mit $f \le g \Rightarrow$
$\int_a^b f dx \le \int_a^b g dx$ <u>Monotonie</u>

(3) $f \in R[a,b] \Rightarrow |f|, \bar{f} \in R[a,b]$, und
$|\int_a^b f dx| \le \int_a^b |f| dx \le (b-a) \cdot \|f\|_\infty$ <u>Beschränktheit</u>
$\int_a^b \bar{f} dx = (\int_a^b f dx)^-$

<u>Beweis</u>: seien $f, g \in R[a,b]$, $\varphi_n, \psi_n \in T[a,b]$ mit $\|f-\varphi_n\|_\infty \to 0$,
$\|g - \psi_n\|_\infty \to 0 \Rightarrow$

(1) $\|(\lambda f + \mu g) - (\lambda \varphi_n + \mu \psi_n)\|_\infty \le |\lambda| \cdot \|f - \varphi_n\|_\infty + |\mu| \cdot \|g - \psi_n\|_\infty \to 0$
$\Rightarrow \lambda f + \mu g \in R[a,b]$, und
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\lambda \varphi_n + \mu \psi_n) dx =_{\text{Lemma 1}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} (\lambda \int_a^b \varphi_n dx + \mu \int_a^b \psi_n dx) = \lambda \int_a^b f dx + \mu \int_a^b g dx$$

(2) Wähle reelle T.F. φ_n, ψ_n mit $\|f - \varphi_n\|_\infty < \frac{1}{n}$, $\|g - \psi_n\|_\infty < \frac{1}{n}$
$\varphi_n \le \varphi_n - f + g - \psi_n + \psi_n \Rightarrow \varphi_n(x) \le \frac{2}{n} + \psi_n(x) \quad \forall x$
$$\Rightarrow \int_a^b f dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n dx \le \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}(b-a) + \int_a^b \psi_n dx\right) = \int_a^b g dx$$

(3) $\|f - \varphi_n\|_\infty \to 0 \Rightarrow \| |f| - |\varphi_n| \|_\infty \to 0$, da $||f| - \underbrace{|\varphi_n|}_{\in T[a,b]}| \le |f - \varphi_n|$
$\Rightarrow |f| \in R[a,b]$, und
$$\underbrace{\int_a^b |f| dx}_{\le_{(2)} (b-a)\|f\|_\infty} = \lim \int |\varphi_n| dx \ge \lim |\int \varphi_n dx| = |\int f dx|$$

Rest analog ∎

Lemma 2 (Intervalladitivität)

Seien $a<b<c$ und $f\in R[a,c] \Rightarrow f$ eingeschränkt auf $[a,b]$ und $[b,c]$ ist Regelfkt, und

$$\int_a^c f\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx$$

Beweis: klar, falls f T.F. (füge c als Teilpkt ein)

$f\in R[a,c]$, $\varphi_n\in T[a,c]$ mit $\|f-\varphi_n\|_{\infty,[a,c]}\to 0 \Rightarrow$

$\varphi_n\to f$ glm. auf $[a,b]$ und $[b,c]$, und

$$\int_a^c f\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^c \varphi_n\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b \varphi_n\,dx + \int_b^c \varphi_n\,dx\right) = \int_a^b f\,dx + \int_b^c f\,dx \quad ■$$

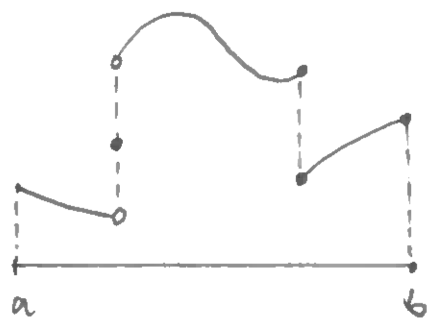
Konvention: Sei $a<b$, $f\in R[a,b]$

$$\int_b^a f\,dx := -\int_a^b f\,dx\,, \quad \int_a^a f\,dx := 0$$

Satz 2 Charakterisierung von Regelfkt

Für $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ gilt:

f Regelfkt $\Longleftrightarrow$ f besitzt in jedem $x_0\in[a,b]$ einseitige Grenzwerte (in $\mathbb{C}$)



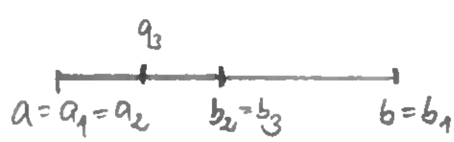
Beweis: Hier nur „$\Leftarrow$" (wichtiger Teil)

Für „$\Rightarrow$" siehe z.B. Königsberger, Analysis 1, oder Pöschel.

Annahme: f ist keine R.F., dh. $\exists\,\varepsilon>0$, so dass keine T.F. φ auf $[a,b]$ exist. mit $\|f-\varphi\|_\infty<\varepsilon$

$\Rightarrow$ auf mindestens einer der Hälften von $[a,b] =: [a_1,b_1]$ ist f nicht durch T.F. ε-approx.bar

Sei $[a_2,b_2]$ solche Hälfte.



Iteration liefert Folge geschachtelter

Intervalle $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ mit:

$(*)$ $\nexists\, \varphi \in T[a_n, b_n] : \|f - \varphi_n\|_{\infty, [a_n, b_n]} < \varepsilon$

(a_n) mon. wachsend, (b_n) mon. fallend, $|a_n - b_n| \to 0$

$\Rightarrow x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \in [a,b]$ exist.

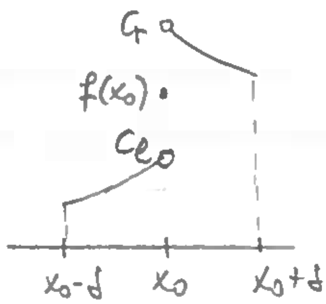
<u>1. Fall:</u> $x_0 \in (a,b)$

setze $c_\ell := \lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x)$, $c_r := \lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x)$ (exist. nach Vorauss.)

sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow |f(x) - c_\ell| < \varepsilon \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$|f(x) - c_r| < \varepsilon \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

sofern δ klein genug.



Sei n so groß, dass $[a_n, b_n] \subseteq (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$\varphi(x) := \begin{cases} c_\ell, & x \in [a_n, x_0) \\ f(x_0), & x = x_0 \\ c_r, & x \in (x_0, b_n] \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi \in T[a_n, b_n]$ und $\|f - \varphi\|_{\infty, [a_n, b_n]} < \varepsilon$ $\lightning$ zu $(*)$

2. Fall: $x_0 = a$ oder $x_0 = b$: analog (einseitig) $\blacksquare$

Satz 2 liefert wichtige Klassen von Regelfkt:

<u>Korollar 1</u> (1) Jede stetige Fkt auf $[a,b]$ ist Regelfkt

(2) Jede monotone Fkt auf $[a,b]$ ist Regelfkt

(nach Satz 13, §9)

<u>Kor. 2</u> Seien $f, g \in R[a,b] \Rightarrow$ (mit Regeln für Grenzwerte)

(i) $fg \in R[a,b]$

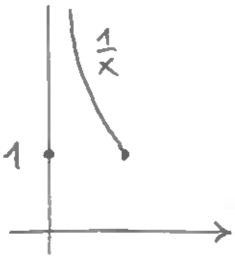
(ii) g nullstellenfrei $\Rightarrow \frac{f}{g} \in R[a,b]$

Gegenbeispiele: 1. Dirichletsche Sprungfkt

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist auf keinem $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Regelfkt
(Bed. von Satz 2 nicht erfüllt)

2. Auf $[0,1]$: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$



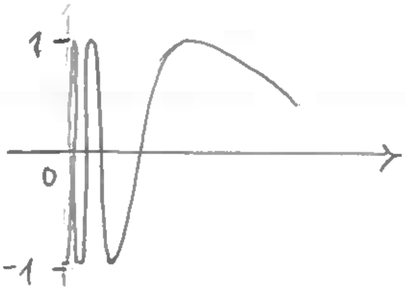
$\lim\limits_{x \downarrow 0} f(x) = +\infty \quad (\notin \mathbb{C})$

→ Übung

3. Auf $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

keine Regelfkt

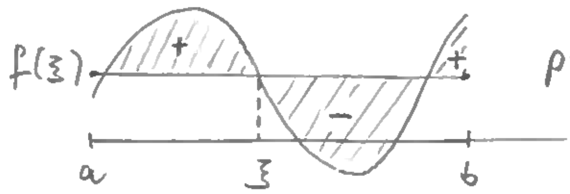


Satz 3 Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\rho: [a,b] \to \mathbb{R}$ Regelfkt, $\rho \geq 0$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx = f(\xi) \cdot \int_a^b \rho(x)\,dx}$$



$\rho \equiv 1$

Beweis: $m := \min\limits_{[a,b]} f$, $M := \max\limits_{[a,b]} f$ (exist., da f stetig)

$\underset{\rho \geq 0}{\Rightarrow}$ $m\rho \leq f\rho \leq M\rho \Rightarrow m \int_a^b \rho\,dx \leq \int_a^b f\rho\,dx \leq M \int_a^b \rho\,dx$

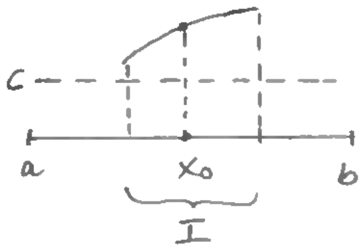
$\Rightarrow \int_a^b f\rho\,dx = c \cdot \int_a^b \rho\,dx$ mit gewissem $c \in [m,M]$

ZWS $\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]: f(\xi) = c$ ∎

Satz 4. Sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$ und $\int_a^b f\,dx = 0$

$\Rightarrow f \equiv 0$

Beweis: Ang. $\exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) > 0$. f stetig $\Rightarrow$ $\exists$ offenes Intervall $I \subseteq [a,b]$ mit $x_0 \in I$ so dass $f(x) \geq \frac{1}{2} f(x_0) =: c > 0$ auf I



$$\Rightarrow \int_a^b f\,dx \geq \int_I f\,dx \geq c \cdot |I| > 0 \quad \lightning \qquad \blacksquare$$

3. Integration und Differentiation

Def. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ Fkt
$F : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt Stammfunktion von f, falls F diffbar auf $[a,b]$ mit $F' = f$

Lemma 3 F, G Stammfkt von f $\Rightarrow$ $F - G = \text{konst.}$ auf $[a,b]$

Beweis: $(F-G)' \equiv 0 \underset{\text{Satz 7, §11}}{\Longrightarrow} F - G = \text{konst.}$ $\blacksquare$

Satz 5. Hauptsatz d. Differential- und Integralrechnung (HDI)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, $x_0 \in [a,b]$

$$\boxed{F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} \quad (x \in [a,b]) \quad \Rightarrow$$

(1) F ist Stammfkt von f
(2) Ist $G : [a,b] \to \mathbb{C}$ beliebige Stammfkt von f $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) =: G\Big|_a^b}$$

Beweis: o.E. f $\mathbb{R}$-wertig. Sei $x \in [a,b]$, $x + h \in [a,b]$ $\Rightarrow$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x+h} f\,dt - \int_{x_0}^{x} f\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f\,dt \underset{\text{Int. Rechn.}}{\overset{\text{MWS der}}{=}}$$

$$= \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi) \quad \text{mit } \xi \in [x, x+h]$$

$h \to 0 \Rightarrow \xi \to x \underset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} f(\xi) \to f(x)$

$\Rightarrow F$ diffbar in x mit $F'(x) = f(x)$.

(2) $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \underset{(1)}{\Rightarrow} F, G$ Stammfkt von $f \underset{\text{Lemma 3}}{\Rightarrow}$

$F - G = \text{konst.} \Rightarrow \int_a^b f\,dt = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ ∎

<u>Bez:</u> Sei $f \in R[a,b]$. Für die Aussage „F ist Stammfkt von f" schreibt man:

$$\underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{„Unbestimmtes Integral" von } f} = F(x)$$

„<u>Unbestimmtes Integral</u>" von f

(eindeutig nur bis auf additive Konstante!)

<u>Bsp:</u> 1. $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow \int_a^b x^s\,dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1} \Big|_a^b$

Dabei $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ falls $s \in \mathbb{Z}$, $0 \notin [a,b]$ falls $s \in \mathbb{Z}, s < 0$

(über die Def. lücke darf nicht hinwegintegriert werden)

$[a,b] \subseteq (0,\infty)$, falls $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\qquad (x^s = e^{s \ln x})$

Kurz: $\int x^s\,dx = \frac{1}{s+1} x^{s+1}$

2. $$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \begin{cases} \ln x \Big|_a^b & \text{falls } a,b > 0 \\ \ln(-x) \Big|_a^b & \text{" } a,b < 0 \end{cases}$$

Kurz: $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$ auf $(0,\infty)$ oder $(-\infty,0)$

3. $\int e^{cx}\,dx = \frac{1}{c} e^{cx}$ auf $\mathbb{R}$; $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

4. $\int \cos x\,dx = \sin x$; $\int \sin x\,dx = -\cos x$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$ auf $(-1,1)$

6. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$ auf $\mathbb{R}$

4. Integrationstechniken

Satz 6: Partielle Integration. $f, g \in C^1[a,b] \Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g' \, dx = (fg)\Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g \, dx} \quad \text{bzw.} \int f g' dx = fg - \int f' g \, dx$$

Beweis: $(fg)\Big|_a^b \underset{\text{HDI}}{=} \int_a^b (fg)' dx = \int_a^b (f'g + fg') dx \Rightarrow$ ∎

Bsp: 1. $\int \underset{f}{x} \underset{g'}{e^x} dx = xe^x - \underbrace{\int e^x dx}_{e^x} = (x-1)e^x$

2. $\int \ln x \, dx = \int \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{\ln x} \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1)$

Satz 7: Substitutionsregel Sei $f \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ abg. Intervall, und $\varphi \in C^1[a,b]$ mit $\varphi([a,b]) \subseteq I \Rightarrow$

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx}$$

Merkregel: $x = \varphi(t) \Rightarrow dx = \varphi'(t) \, dt$, und Grenzen substituieren.

In Praxis oft: φ streng monoton ($\Rightarrow$ bijektiv). Dann:

$$\int_c^d f(x) \, dx \underset{\text{Subst. } x = \varphi(t)}{=} \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt$$

Beweis: F Stammfkt von $f \Rightarrow$

$$(F \circ \varphi)'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \quad \text{(Kettenregel)}$$

$$\underset{\text{HDI}}{\Rightarrow} \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt = (F \circ \varphi)\Big|_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \underset{\text{HDI}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$ ∎

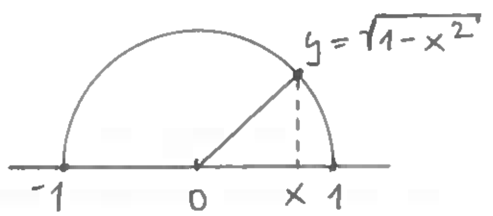
Bsp: 1. $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \int_a^b f(ct) \, dt \underset{\substack{x = ct \\ dx = c\,dt}}{=} \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} f(x) \, dx.$

2. $\int_a^b f(t+c)\,dt \underset{x=t+c,\ dx=dt}{=} \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx$

3. $\varphi \in C^1[a,b]$ und nullstellenfrei $\Rightarrow$

$$\int_a^b \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt \underset{f(x)=\frac{1}{x}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{x}\,dx = \ln\left|\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\right|$$

4. Fläche des Einheitskreises (Radius 1)



$$F = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = ?$$

Subst. $x = \cos t$, $dx = -\sin t\,dt$, $t\in[0,\pi]$

streng mon. auf $[0,\pi]$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = -\int_{\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^2 t}\,\sin t\,dt = \int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt$$

$$\int \sin^2 t\,dt = \int \sin t\cdot\sin t\,dt \underset{\text{part. Int.}}{=} -\sin t\cos t + \int \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}\,dt$$

$$\Rightarrow \int \sin^2 t\,dt = \frac{1}{2}(t-\sin t\cos t)$$

$$\Rightarrow F = 2\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt = (t-\sin t\cos t)\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{\pi}}$$

Bem: $\int x^n \sin x\,dx$, $\int x^n e^x\,dx$ etc:

Sukzessive Verkleinern des Exponenten durch part. Int.

Bsp: $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\,dx = \ldots$

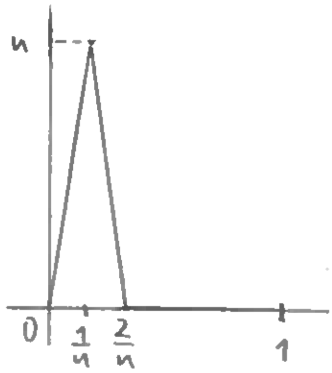
Vorsicht: Oft gibt es selbst zu einfachen Integranden keine geschlossen angebbare Stammfkt!

Bsp: $\int e^{-x^2}dx$, $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$

$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ (Gaußsche Fehlerfkt

$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ Integralsinus

5. Integration und Limesbildung



Betrachte Fkt-Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C[0,1]$ gemäß Skizze

$f_n \to f \equiv 0$ punktweise

Aber: $\int_0^1 f_n\,dx = 1 \not\to \int_0^1 f\,dx = 0$

Bei glm. Konvergenz darf man Integral und Limes vertauschen:

Satz 8 Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R[a,b]$ gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergent gegen $f:[a,b]\to\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f\in R[a,b]$, und

$$(*) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$$

Beweis: Sei $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}: \|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$.

Wähle $\varphi_n \in T[a,b]: \|f_n - \varphi_n\|_\infty < \varepsilon$

$\Rightarrow \|f-\varphi_n\|_\infty \le \|f-f_n\|_\infty + \|f_n - \varphi_n\|_\infty < 2\varepsilon \Rightarrow f$ ist Regelfkt

$|\int_a^b f\,dx - \int_a^b f_n\,dx| \le \|f-f_n\|_\infty (b-a) < \varepsilon(b-a) \Rightarrow (*)$ ∎

6. Differentiation und Limesbildung

Bsp: $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $x\in\mathbb{R}$. $f_n \to 0$ glm. auf $\mathbb{R}$

$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx) \Rightarrow (f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert für jedes $x\in\mathbb{R}$!

Denn: ang. $\sqrt{n}\cos(nx)\to a\in\mathbb{R} \Rightarrow \cos(nx)\to 0 \ (n\to\infty) \Rightarrow$ $\cos(2nx)\to 0$. Andererseits: $\cos(2nx) = 2\cos^2(nx)-1 \to -1$ ↯

Satz 9 Sei $I\subseteq\mathbb{R}$ Intervall und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^1(I)$ mit

(i) (f_n) konv. punktweise gegen $f: I\to\mathbb{C}$

(ii) (f_n') " <u>gleichmäßig</u> auf I

$\Rightarrow f\in C^1(I)$ und: $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \forall x\in I$

Beweis: $g := \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$. (ii) $\Rightarrow$ g stetig auf I (§12, Satz 1)

Fixiere $x_0 \in I$. $x \in I \Rightarrow$ (mit HDI)

$$\begin{array}{cccccl} f_n(x) & = & f_n(x_0) & + & \underbrace{\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt} & \\ {\scriptstyle n\to\infty}\downarrow & & \downarrow & & & \\ f(x) & & f(x_0) & & \to \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt & \text{nach Satz 8} \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt$$

HDI $\Rightarrow$ f diffbar auf I mit $f'(x) = g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

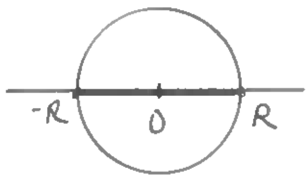
Ferner: $f' = g$ stetig auf I $\Rightarrow f \in C^1(I)$ ∎

Satz 8 und Satz 9 gelten insbesondere auch für Funktionenreihen.

Speziell für Potenzreihen hat man:

Satz 10 Sei $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ Potenzreihe mit KR $R > 0$ $\Rightarrow$

(1) Die gliedweise differenzierte PR $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ hat ebenfalls KR R



(2) f ist stetig diffbar auf dem offenen Intervall $(-R,R) \subseteq \mathbb{R}$ mit

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Beweis: (1) Sei $\tilde{R}$ der KR von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Wurzelkrit. $\Rightarrow$

$$\tilde{R} = \left(\limsup \sqrt[n]{n|a_n|}\right)^{-1} \underset{\uparrow \lim \sqrt[n]{n} = 1}{=} \left(\limsup \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1} = R$$

(2) Betrachte die Partialsummen

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Sei $0 < r < R$. Satz 5, §14 $\Rightarrow$ $f_n \to f$ glm. auf $[-r,r]$, und (f_n') konv. ebenfalls glm. auf $[-r,r]$ $\underset{+\text{Satz } 9}{\overset{r<R \text{ bel.}}{\Longrightarrow}}$ Beh ■

Iteration zeigt: f ist beliebig oft diffbar auf $(-R,R)$ und darf jeweils gliedweise differenziert werden.

Bsp: Die Logarithmus-Reihe

$$L(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad \text{Konv. Radius } R = 1 \quad (Q\text{-Krit.})$$

Satz 10 $\Rightarrow$ L stetig diffbar auf $(-1,1)$ mit

$$\left.\begin{array}{l} L'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{1+x} \\ \text{Andererseits: } \frac{1}{1+x} = \frac{d}{dx} \ln(1+x) \end{array}\right\} \underset{\text{Satz 7, § 11}}{\Longrightarrow}$$

$$L(x) = \ln(1+x) + c \quad \text{auf } (-1,1),\ c \in \mathbb{R}$$

$$L(0) = 0 = \ln(1+0) \Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n} \qquad \forall x \in (-1,1)$$

Die Log-Reihe konv. (nach Leibniz-Kriterium) auch für $x = 1$:

$$L(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

alternierende harm. Reihe

Vermutung: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2}$

Beweis: $L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ konv. glm. auf ganz $[0,1]$,

denn: Leibniz-Krit. $\Rightarrow$ $\forall x \in [0,1]$ gilt: $L(x)$ konv.,

und $\left| L(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \le \frac{|x^{n+1}|}{n+1} \le \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow$ L stetig auf $[0,1]$. Ebenso $x \mapsto \ln(1+x)$ stetig auf $[0,1]$

$\Rightarrow L(1) = \lim_{x \uparrow 1} L(x) = \lim_{x \uparrow 1} \ln(1+x) = \ln 2$ ■

7. Integration rationaler Fkt

Technik: Partialbruchzerlegung

Dazu: Betrachtung in $\mathbb{C}$

Sei $R = \frac{P}{Q}$ rational, $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$

Erinnerung: $\alpha \in \mathbb{C}$ n-faches Pol von R ($n \in \mathbb{N}$) $\Leftrightarrow$

$$(*) \quad R(z) = \frac{p(z)}{(z-\alpha)^n q(z)}, \quad p, q \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}} \text{ mit } p(\alpha) \neq 0, q(\alpha) \neq 0$$

Lemma 4 (Abspaltung eines Hauptteils)
Sei α n-faches Pol von R $\Rightarrow$ $\exists$ (eindeutige) Zerlegung

$$R = H + R_0$$

wobei
- $H(z) = \frac{c_n}{(z-\alpha)^n} + \dots + \frac{c_1}{z-\alpha}, \quad c_n \neq 0$
- R rational ohne Pol in α

H: Hauptteil von R in α

Beweis: Schreibe $(*)$ um:

$$\underbrace{p(z) - \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} q(z)}_{\text{hat NS } \alpha} = (z-\alpha) h(z), \qquad h \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$$

$$\Rightarrow R(z) = \frac{c_n}{(z-\alpha)^n} + \overbrace{\frac{h(z)}{(z-\alpha)^{n-1} q(z)}}^{=: \tilde{R}(z)}, \quad c_n = \frac{p(\alpha)}{q(\alpha)} \neq 0$$

Beweis der Beh. mit Ind. nach n:

$n = 1$: $R(z) = \frac{c_1}{z-\alpha} + \tilde{R}(z)$, $\tilde{R}$ ohne Pol in α ✓

$n-1 \to n$: $\tilde{R}$ rat. mit höchstens $(n-1)$ fachem Pol in α

$\xrightarrow[\text{Ind.Vor.}]{}$ $\tilde{R}$ hat end. Darst.

$\tilde{R} = \tilde{H} + \tilde{R}_0$, $\tilde{H}$: Hauptteil d. ordnung $\leq n-1$ (evtl. 0)

$\tilde{R}_0$ ohne Pol in α

Satz 11: Partialbruchzerlegung (PBZ)

Sei R rational mit Polen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ der Ordnungen $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\boxed{R = s + \sum_{i=1}^{k} H_i} \qquad \text{wo } s \text{ Polynom}$$

(leere Σ, falls $k=0$) $\qquad H_i$: Hauptteil von R in α_i

__Beweis:__ H_i: Hauptteil von R in α_i. $s := R - \sum_{i=1}^{k} H_i \Rightarrow$
s ist rational ohne Pole in $\mathbb{C}$, also Polynom. ∎

__Zur Herstellung der PBZ:__

1. Polynom-Anteil s von $R = \frac{P}{Q} \overset{s+\Sigma H_i}{=}$ durch Division mit Rest:
$r := (\Sigma H_i) Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}} \Rightarrow \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} Q$, und $P = RQ = sQ + r$
Abspalten von s $\Rightarrow$ Reduktion auf
2. $R = \frac{P}{Q}$, $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q$, o.E. vollständig gekürzt
Faktorisiere $Q \Rightarrow$ Pole α_i, Ordnungen n_i
Ansatz für Hauptteil zum Pol α (Ordnung n)
$$H(z) = \frac{c_n}{(z-\alpha)^n} + \dots + \frac{c_1}{z-\alpha}$$
$$\Rightarrow c_n = (z-\alpha)^n \cdot H(z)\Big|_{z=\alpha}$$
$$H_1(z) := H(z) - \frac{c_n}{(z-\alpha)^n},$$ Iteration liefert alle α_i.

Bsp: $$R(z) = \frac{z+1}{z(z-1)^2} = \underbrace{\frac{a}{z}}_{H_0(z)} + \underbrace{\frac{b}{(z-1)^2} + \frac{c}{z-1}}_{H_1(z)}.$$ Pole: 0, 1-fach; 1, 2-fach

$$a = z \cdot R(z)\Big|_{z=0} = 1$$
$$b = (z-1)^2 R(z)\Big|_{z=1} = 2$$
$$c = \left(R(z) - \frac{2}{(z-1)^2}\right)(z-1)\Big|_{z=1} = -\frac{1}{z}\Big|_{z=1} = -1.$$

Nun: $\int R(x)\,dx$, $R = \frac{P}{Q}$, $P, Q \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ mit reellen Koeff.

Dann: $Q(\alpha) = 0$ $(\alpha \in \mathbb{C}) \Rightarrow Q(\bar{\alpha}) = 0$.

$\Rightarrow$ die nicht-reellen NS von Q treten in konjugiert-komplexen Paaren auf.

PBZ $\Rightarrow$ R(x) ist Summe von Fkt d. Form

- $S(x)$, S reelles Polynom ($\Rightarrow$ Stammfkt ebenso)
- $\frac{A}{(x-\alpha)^k}$, $A, \alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$
- $\frac{A}{(x-\alpha)^k} + \frac{\bar{A}}{(x-\bar{\alpha})^k}$, $A \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$k \neq 1$, $\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k} = \frac{1}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-\alpha)^{k-1}}$

$k = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\int \frac{dx}{x-\alpha} = \ln|x-\alpha|$

$k = 1$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$: $\frac{A}{x-\alpha} + \frac{\bar{A}}{x-\bar{\alpha}} = \frac{ax+b}{\underbrace{x^2+cx+d}_{>0 \text{ auf } \mathbb{R}}}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Integration mit ln, arctan (ggf. nach Subst.)

FINIS !