Exkurs: Method of multiple scales (Mehrskalen Methode)

DR. KARIN MORA*

Im folgenden betrachten wir nichtlineare dynamische Systeme (NDS) mit sogenannten *kleinen* nichtlinearen Termen. Viele mathematische Probleme sind so formuliert, dass sie einen kleinen Parameter enthalten. Wenn dieser Parameter Null gesetzt wird erhalten wir ein ungestörtes System.

Oft sind die exakten Lösungen solcher Systeme nicht verfügbar. Daher betrachten wir Näherungslösungen, die sich zusammensetzen aus der Lösung des ungestörten (oft linearen) Systems und aus der Störung hergeleiteter Terme. Somit ist das Hauptziel dieser Methode das Erfassen von qualitativer Information über das asymptotische Verhalten des NDS.

Insbesondere, betrachten wir oszillierende Lösungen von NDS, deren Amplitude und Phase von mehreren Zeitskalen approximiert werden müssen. Mit anderen Worten beschäftigen wir uns mit Systemen, deren Dynamik von mehreren Zeitskalen abhängt.

1 LITERATUR

- J. Kevorkian und J. D. Cole: Multiple Scale and Singular Perturbation Methods, Springer-Verlag, New York, 1996.
- R. O'Malley: Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations, Applied Mathematical Sciences V. 89, Springer–Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991.
- P. Glendinning: Stability, Instability and Chaos - An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations, Cambridge University Press, 1994.

2 ASYMPTOTISCHE POTENZREIHENENTWICKLUNG (APR)

Ziel: Genauigkeit der Approximation.
Diese ist garantiert, wenn die Potenzreihenentwicklung (PR) asymptotisch ist, d.h. die Reihe muss nicht konvergent sein.

Definition 1. *Die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\varepsilon)$$

*Department of Mathematics, University of Paderborn, June 26, 2015

ist eine APR der Funktion f *an der Stelle* ε *genau dann (* $\iff$ *), wenn für alle* $n \geqslant 0$ *gilt*

$$\frac{f(\varepsilon) - \sum_k f_k(\varepsilon)}{f_n(\varepsilon)} \quad \textit{für} \quad \varepsilon \to 0,$$

d.h. der Rest ist kleiner als der letzte Term der PR.

Wenn $\sum_k f_k(\varepsilon)$ eine APR von $f(\varepsilon)$ ist, dann schreiben wir

$$f(\varepsilon) \sim \sum_k f_k(\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0)$$

ANWENDUNG: GEWÖHNLICHE DIFFERENTIAL GLEICHUNGEN Die Lösung einer Differentialgleichung hat die Form

$$x(t, \varepsilon) \sim \sum_k a_k(t)\delta_x(\varepsilon)$$

mit $\delta_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$. Solch eine PR ist asymptotisch für t in einem Bereich $\mathcal{D}$, wenn $\sum_k a_k(t)\delta_x(\varepsilon)$ eine APR für $\varepsilon \to 0$ für alle $t \in \mathcal{D}$.

NACHWEISKRITERIUM für eine APR ist, wenn gilt

$$\frac{a_{k+1}(t)\delta_{k+1}(\varepsilon)}{a_k(t)\delta_k(\varepsilon)} \to 0 \quad \text{für} \quad \varepsilon \to 0,$$

d.h. aufeinander folgende Terme sind *klein* im Vergleich zum vorherigen Term.

Beispiel 1 (Duffing Gleichung)**.** *Gegeben ist die Duffing Gleichung*

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{1}$$

Die nichtgestörte Gleichung, d.h. $\varepsilon = 0$*, ist die Gleichung des harmonischen Schwingers. Man nehme an, dass die Lösung* $x(t)$ *eine APR ist, d.h.*

$$x(t) \sim x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots. \tag{2}$$

Wir setzen diese Lösung (2) *in* (1) *ein und isolieren die Koeffizienten der Terme* ε^0 *und* ε^1,

$$O(\varepsilon^0): \qquad \ddot{x}_0 + x_0 = 0, \tag{3}$$
$$O(\varepsilon^1): \qquad \ddot{x}_1 + x_1 = -x_0^3. \tag{4}$$

um die Lösung erster Ordnung zu berechnen. Wir wählen die Anfangswerte so, dass die Lösung von (3) $x_0 = A\sin(t)$ *ist, mit* $A \in \mathbb{R}$*. Dann ändert sich* (4) *zu*

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -A^3\sin^3(t) = \frac{1}{4}A^3\left(\sin(3t) - 3\sin(t)\right).$$ [1]

Der resonante Erregerterm $(-3A\sin(t)/4)$ *ergibt einen Term in der Lösung in der Form* $t\sin(t)$*. Dieser Term wächst unbegrenzt für* $t \to \infty$ *und verstößt somit gegen die Annahme, dass die PR asymptotisch ist. Zur Vermeidung dieser Situation setzen wir* $A = 0$*.*

Folgt daraus, dass die einzige Lösung der triviale stationäre Zustand ist?

1 trigonometrische Identität

NEIN! *Dazu betrachten wir das erste Integral des Systems (1): wenn* $y = \dot{x}$ *dann folgt, dass der Ausdruck* $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\varepsilon x^4$ *konstant ist auf den Trajektorien. Somit sind die Niveaulinien auf denen dieser Ausdruck konstant ist, geschlossene Kurven, und stellen somit periodische Orbits im Phasenportrait dar.*

Was ist also schief gelaufen? Dazu betrachten wir die gesamte Lösung von (4)

$$x_1 = B\sin(t - t_1) - \frac{1}{32}A^3\sin(3t) + \frac{3}{8}A^3 t\cos(t)$$

in der B *und* t_1 *von den Anfangswerten bestimmt werden. Somit folgt, dass*

$$x(t) \sim A\sin(t) + \varepsilon\left(B\sin(t - t_1) - \frac{1}{32}A^3\sin(3t) + \frac{3}{8}A^3 t\cos(t)\right) + ...$$

wobei $\ldots$ *Terme der* $O(\varepsilon^2)$ *und höher andeuten. Diese ist keine APR der Ordnung* ε^{-1}*, außer für* $A = 0$*, denn für* $t = O(\varepsilon^{-1})$ *hat der Term* $\frac{3}{8}A^3 t\cos(t)$ *die Ordnung* $O(1)$*. Mit der Formel für* Sinusoid und Linearkombination mit gleicher Phase[2] *und Taylor-Reihen-Entwicklungen folgt*

$$A\sin(t) + \varepsilon\frac{3}{8}A^3 t\cos(t) = A\sin\left(t + \frac{3}{8}\varepsilon A^2\right) + \ldots .$$

Somit ergibt sich die Lösung

$$x(t) \sim A\sin\left(t + \frac{3}{8}\varepsilon A^2\right) + \varepsilon\left(B\sin(t - t_1) - \frac{1}{32}A^3\sin(3t)\right) + ... ,$$

die nun eine APR für ein beliebiges A *ist.*

Dieses Beispiel zeigt, dass genaue Überlegungen notwendig sind um eine APR aufzustellen und dass die Zeit t auch von ε abhängen kann.

3 DIE MEHRSKALEN METHODE (THE METHOD OF MULTIPLE SCALES)

Diese Methode wurde entwickelt von: Kryloff and Bogoliubov (1935), Kevorkian (1961), Cochran (1962), und Mahony (1962) und wurde vor allem gefördert und vorangebracht von Nayfeh (1973).

Die Mehrskalen Methode ist eine Methode zur systematischen Erfassung der Amplitude und Phase einer Lösung. Beispiel 1 hat gezeigt, dass die Lösung auf einer Zeitskala der Ordnung t oszilliert. Ihre Phase und Amplitude driften aber auf einer Zeitskala der Ordnung εt. Also nehmen wir an, dass zwei Zeitskalen vorhanden sind, eine **schnelle Zeitskala** $\tau = t$ (auf der die Lösung oszilliert) und eine **langsame Zeitskala** $T = \varepsilon t$ (auf der sich die Amplitude und Phase entwickeln). Allgemein stellen wir folgende APR auf

$$x(t) = x(\tau, T, \varepsilon) \sim x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T) + \ldots , \tag{5}$$

die asymptotisch ist für t der Ordnung $O(\varepsilon^{-1})$. Wir behandelt τ und T als unabhängige Variablen, d.h.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T}$$

2 $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(\alpha + \text{atan2}(b/a))$

und es folgt, dass

$$\begin{aligned} x &\sim x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T) + \dots \\ \dot{x} &\sim x_{0\tau} + \varepsilon\left(x_{1\tau} + x_{0T}\right) + \dots \\ \ddot{x} &\sim x_{0\tau\tau} + \varepsilon\left(x_{1\tau\tau} + 2x_{0T\tau}\right) + \dots \end{aligned}$$

wobei die Indizes τ, T für die jeweilige partielle Ableitung stehen.

Beispiel 2 (Van der Pol Oszillator). *Gegeben ist der der Van der Pol Oszillator,*

$$\ddot{x} + \varepsilon\dot{x}\left(x^2 - 1\right) + x = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{6}$$

mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$. Wir suchen nach einer Lösung der Form (5) (mit $\tau = t$, $T = \varepsilon t$), die für die Zeitskalen der Ordnung ε^{-1} gilt. Wenn wir (5) in das System (6) einsetzten können wir x_0 und x_1 bestimmen indem wir, wie im vorherigen Beispiel, die Koeffizienten der ε-Terme isolieren. Dann erhalten wir

$$O(\varepsilon^0): \qquad x_{0\tau\tau} + x_0 = 0, \tag{7}$$

$$O(\varepsilon^1): \qquad x_{1\tau\tau} + x_1 = -2x_{0\tau T} - x_{0\tau}\left(x_0^2 - 1\right). \tag{8}$$

Gleichung (8) hat die Lösung $x_0(\tau, T) = A(T)e^{i\tau} + A^*(T)e^{-i\tau}$, wobei A eine komplexe Funktion der reellen Variablen T und A^* die komplex Konjugierte ist. Dann sind

$$\begin{aligned} x_{0\tau} &= iAe^{i\tau} - iA^*e^{-i\tau} \\ x_{0\tau T} &= iA_T e^{i\tau} - iA_T^* e^{-i\tau}. \end{aligned}$$

Dann ändert sich die rechte Seite von (8) zu

$$-2\left(iA_T e^{i\tau} - iA_T^* e^{-i\tau}\right) - \left(iAe^{i\tau} - iA^*e^{-i\tau}\right)\left(\left(Ae^{i\tau} + A^*e^{-i\tau}\right)^2 - 1\right)$$

Jetzt lassen sich die resonanten Terme (in diesem Fall Koeffizienten von $e^{i\tau}$) leicht erkennen und isolieren, also $-2A_T - 2iA^2A^* + iA^*A^2 + iA$. Diese Terme führen zu Termen in der Lösung, die unbegrenzt wachsen für $t \to \infty$. Somit brechen diese resonanten Terme die Voraussetzung, dass die PR asymptotisch ist. Infolgedessen, um eine APR zu erhalten, setzen wir sie Null, d.h. nach einer Vereinfachung erhalten wir

$$2iA_T + iA^*A^2 - iA = 0 \quad \Rightarrow \quad 2A_T = A(A - |A|^2). \tag{9}$$

*Diese Bedingung heißt **nonresonance condition** oder **secularity condition**.*

Beachten Sie, dass man äquivalenter Weise auch die Terme von $e^{-i\tau}$ betrachten muss. Dadurch erhält man aber nur die komplex konjugierte secularity condition (9).

Es gibt zwei Möglichkeiten um A zu bestimmen. Man setzt $A = u + iv$ in (9), dann erhält man

$$u_T = \frac{1}{2}u\left(1 - \left(u^2 + v^2\right)\right), \quad v_T = \frac{1}{2}v\left(1 - \left(u^2 + v^2\right)\right)$$

Oder man setzt $A = re^{i\theta}$ in (9) und erhält

$$r_T = r(1 - r^2), \quad r\theta_T = 0. \tag{10}$$

Daraus folgt, dass $r \to 1$ *für* $T \to \infty$ *und* $\theta = \theta_0$*, wobei* θ_0 *durch Anfangswerte bestimmt wird. Somit ist*

$$x_0(\tau, T) \sim r(T)e^{\tau+\theta_0} + r(T)e^{-i(\tau+\theta_0)} = 2r(T)\cos(\tau\theta_0).$$

Da $r \to 1$ *für* $T \to \infty$ *ist die Lösung der ersten Ordnung*

$$x(t) \sim 2\cos(t + \theta_0) + O(\varepsilon).$$

Dieser stabile periodischer Orbit hat eine Periode von $2\pi + O(\varepsilon^2)$ *und eine Amplitude von* $2 + O(\varepsilon)$*. Die Stabilität kann aus Gleichung* (10) *bestimmt werden.*