Von Daten zur Funktion: Skizzen eines technologiegestützten und anwendungsorientierten Analysisunterricht

Joachim Engel
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg

Paderborner Kolloquium für den Mathematikunterricht
30. Mai 2012

Analysisunterricht in der Diskussion

Seit über 100 Jahren etablierter Grundpfeiler des MU in Sek II.

Aber

- zu stark verfahrensorientiert, zu wenig vorstellungsorientiert
- Zu starke Kalkülorientierung, zu wenig inhaltliche Überlegungen, wenig Sinnbezug
- Mangelnde Vernetzung
  - Innermathematisch
  - Zu wenig Bezüge zu Anwendungen und Alltag
- Weitgehend orientiert an didaktischen Konzepten des frühen 20sten Jahrhunderts

Henn (2000), Führer (1981, 2010)

Überblick

1. Positionen, Einsichten und Ansichten zum anwendungsorientierten Analysisunterricht
2. Elemente einer Neuorientierung: Technologie – Daten - Vernetzungen
3. Einige Beispiele
4. Einblick in ein paar Schülerschwierigkeiten
5. Schlussfolgerungen

Schwerpunkt:

Anwendungen und Vernetzungen von Analysis.

Nicht**:** Aufbau von konzeptionellen Grundvorstellungen wie z.B. Grenzwertbegriff, Ableitung, Integral etc.

Positionen, Ansichten und Einsichten

- Einsatz von Technologie (Software, Internet, Applets etc.)
  - als Werkzeug zum Problemlösen
  - zur Illustrierung von Konzepten und Zusammenhängen
  - Zur Beschaffung von Information und Mittel der Kommunikation

Positionen, Ansichten und Einsichten

- Einsatz von Technologie (Software, Internet, Applets etc.)
  - als Werkzeug zum Problemlösen
  - zur Illustrierung von Konzepten und Zusammenhängen
  - Zur Beschaffung von Information und Mittel der Kommunikation
- Reale Daten als Grundlage für authentische und glaubwürdige Modellierungen (an Schule wie Hochschule), bisher jedoch in kaum einem Lehrbuch realisiert.

Positionen, Ansichten und Einsichten

Warum Daten?

Daten sind besser als Argumente, die basieren auf

- Anekdoten
- Traditionellen Ansichten
- Vorurteilen
- Wunschdenken
- Ideologien

In God we trust, all others bring data.

William Edwards Deming (1900-1993)

Daten als Repräsentanten authentischer Informationen

Positionen, Ansichten und Einsichten

- Einsatz von Technologie (Software, Internet, Applets etc.)
  - als Werkzeug zum Problemlösen
  - zur Illustrierung von Konzepten und Zusammenhängen
  - Zur Beschaffung von Information und Mittel der Kommunikation
- Reale Daten als Grundlage für authentische und glaubwürdige Modellierungen (an Schule wie Hochschule), bisher jedoch in kaum einem Lehrbuch realisiert.
- Vernetzung von mathematischen Inhalten:

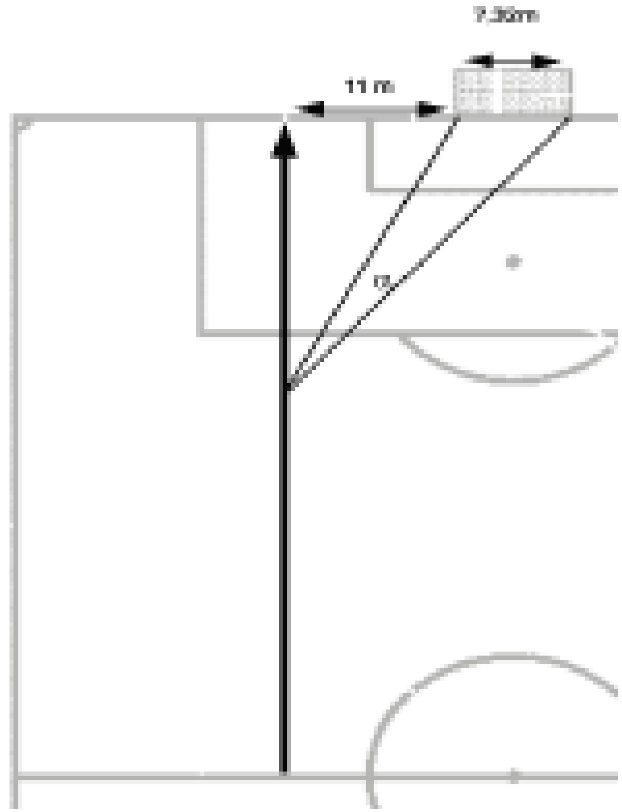
  elementare Funktionenlehre, Analysis, Stochastik, Geometrie, Lineare Algebra, Numerik. …

Beispiel: Schriftgröße und Textlänge

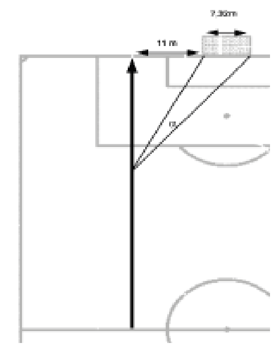
- Wie hängt die Länge eines Textes von der gewählten Schriftgröße ab?

Beispiel: Der optimale Winkel zum Tor

Ein Fußballspieler läuft parallel zur Außenlinie entlang einer Geraden von der Mittellinie auf das gegnerische Tor (Breite 7,32 m) zu. Der Abstand zum nächstgelegenen Torpfosten an der Torauslinie betrage 11 m. Wie hängt der Winkel α zum Tor (der Winkel zu den beiden Torpfosten) von der Entfernung des Spielers von der Torauslinie ab?

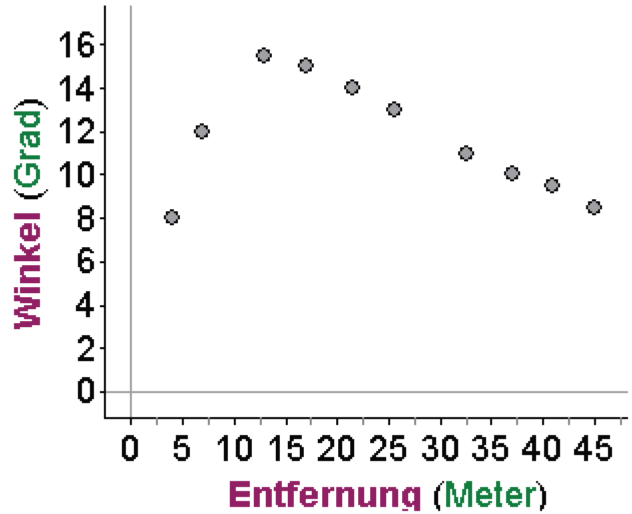


Beispiel: Der optimale Winkel zum Tor



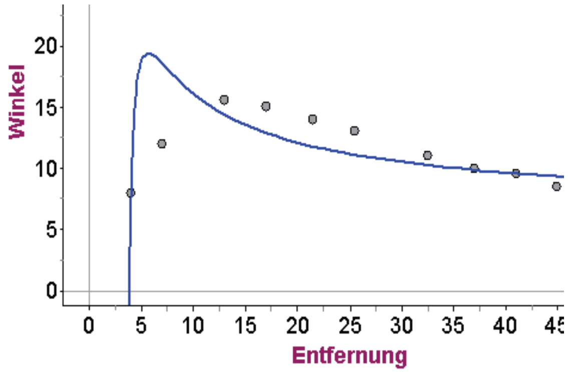
- Schritt 1: Empirische Lösungsansätze auf Basis von 10 Messungen

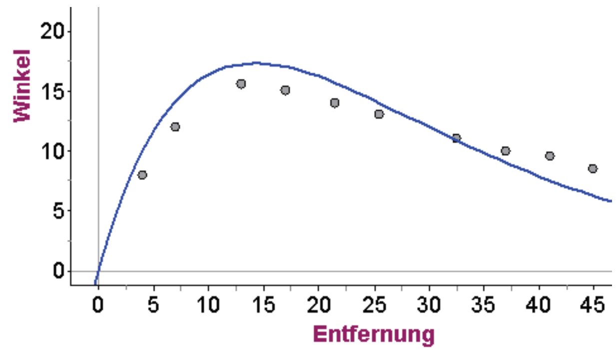
- Schritt 2: Theoriegeleitete Lösung



Beispiel: Der optimale Winkel zum Tor

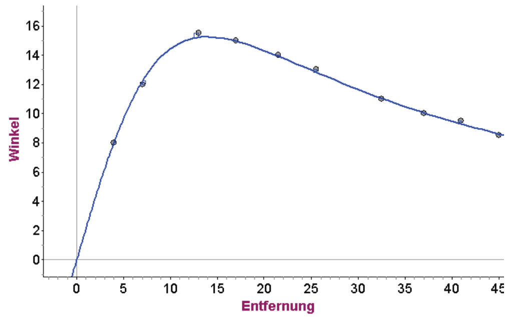
- Einige Lösungsvorschläge (Stud für Lehramt RS, 3. Sem.):

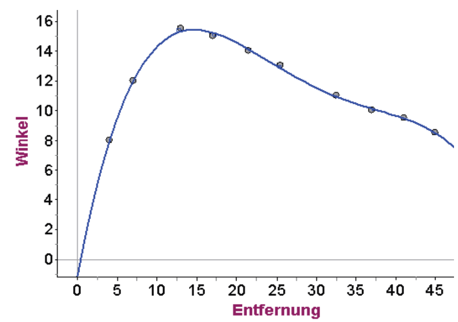




- $$Winkel = a\frac{\ln(x-b)}{x-b} + c$$

$$Winkel = axe^{-bx}$$





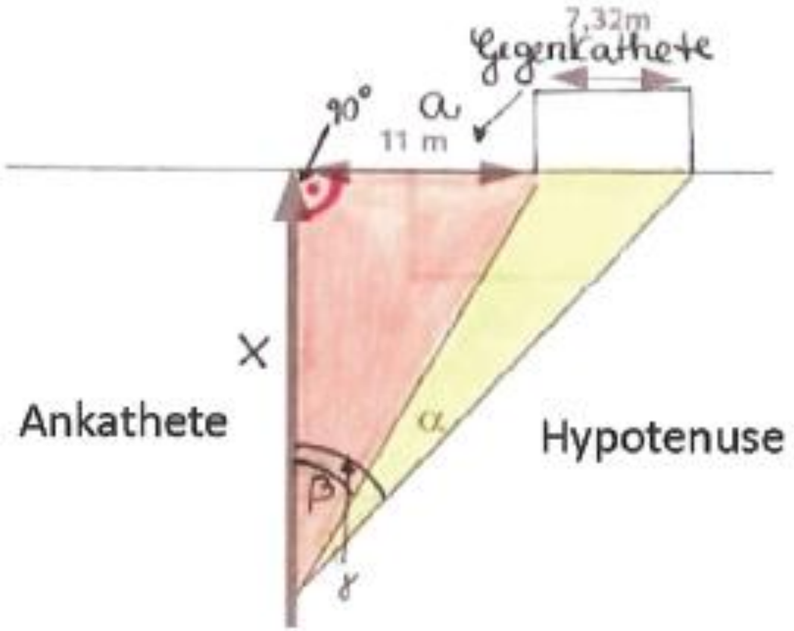
- $$Winkel = a\frac{x}{x^2+b}$$

$$Winkel = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

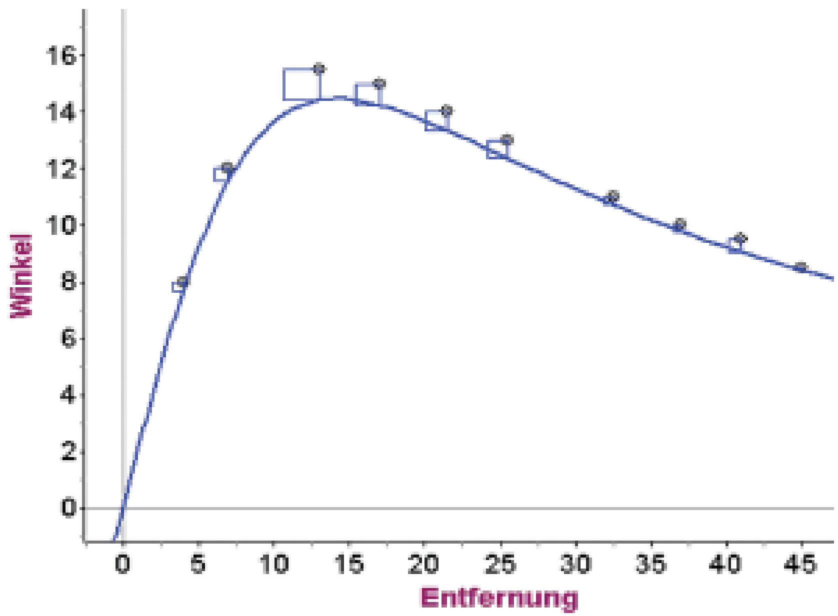
Beispiel: Der optimale Winkel zum Tor

- Theoriegeleitete Lösung

$$\alpha = \gamma - \beta = \arctan\left(\frac{11+7{,}32}{x}\right) - \arctan\left(\frac{11}{x}\right)$$



Beispiel: Der optimale Winkel zum Tor



$$\text{Winkel} = \left[\arctan\left(\frac{18{,}32}{\text{Entfernung}}\right) - \arctan\left(\frac{11}{\text{Entfernung}}\right)\right] \cdot \frac{180}{\pi}$$

Beispiel: Wasser in der Mikrowelle

Um wie viel Grad erhitzt sich eine Schale Wasser, wenn sie für 30 Sekunden in die Mikrowelle gestellt wird?

Ansatz 1: Curve- Fitting per Schieberegler

Ansatz 2: Linearisierung, Transformation- Rücktransformation

Beispiel: Wasser in der Mikrowelle

Um wie viel Grad erhitzt sich eine Schale Wasser , wenn es für 30 Sekunden in die Mikrowelle gestellt wird?

Ansatz 3: Minimierung eines kleinste-Quadrate-Kriteriums

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \frac{a}{x_i^{\,b}} \right)^2$$

⇒ Nullstellen von Ableitungen

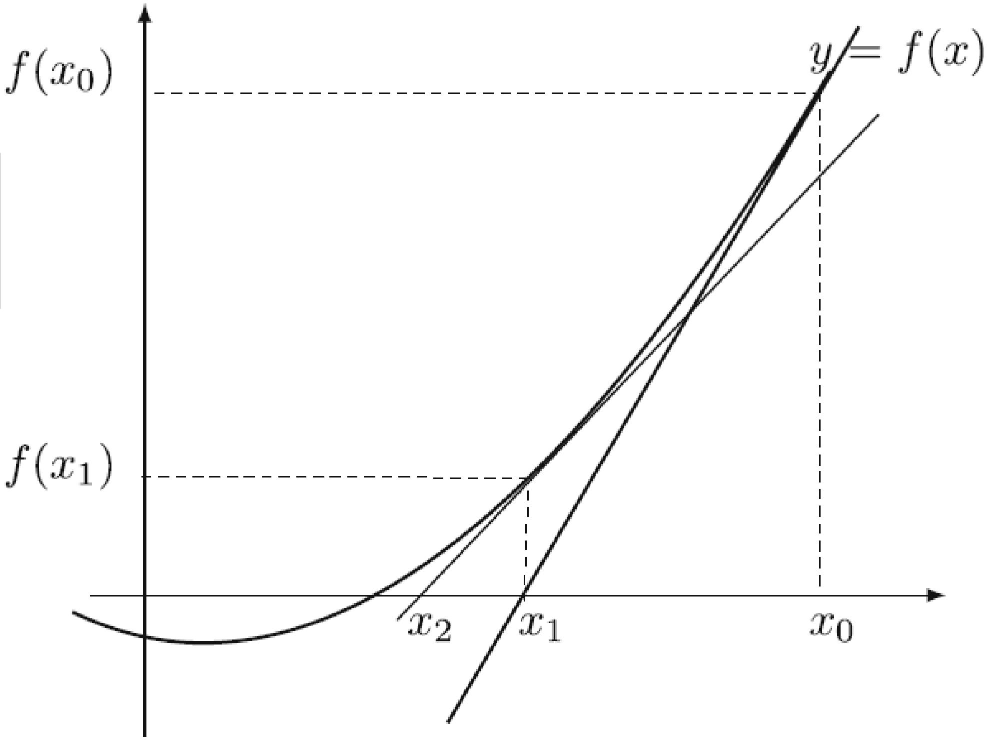
⇒ Im 1-dimensionalen Fall: Newton-Verfahren

- Iterationsalgorithmen (verallgemeinertes Newtonverfahren)
- Basiert auf „gutem“ Anfangsschätzer

Beispiel: Wasser in der Mikrowelle

- **Newton-Verfahren** zur Berechnung von Nullstellen einer differenzierbaren Funktion f

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Beispiel: Wasser in der Mikrowelle

Um wie viel Grad erhitzt sich eine Schale Wasser , wenn es für 30 Sekunden in die Mikrowelle gestellt wird?

Ansatz 3: Minimierung eines kleinste-Quadrate-Kriteriums

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \frac{a}{x_i^{\,b}} \right)^2$$

$\Rightarrow$ Nullstellen von Ableitungen

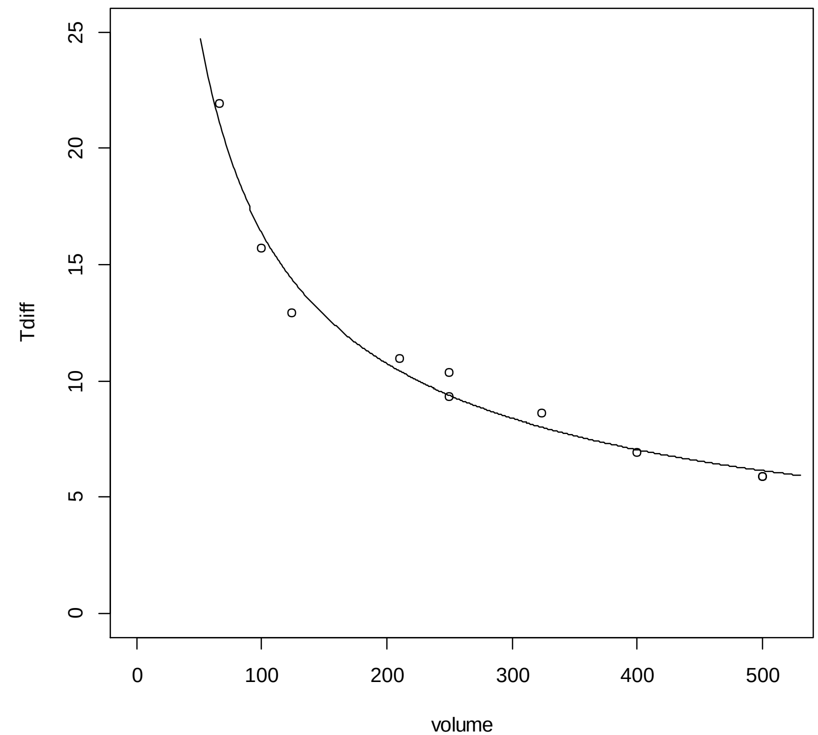
$\Rightarrow$ Im 1-dimensionalen Fall: Newton-Verfahren

$\Rightarrow$ Bei k-dimensionalen Parameter: Gauß-Newton-Verfahen

- Iterationsalgorithmen (verallgemeinertes Newtonverfahren)
- Basiert auf „gutem“ Anfangsschätzer
- Numerisch sehr anspruchsvoll
- verlangt i.a. professionelle Software wie R

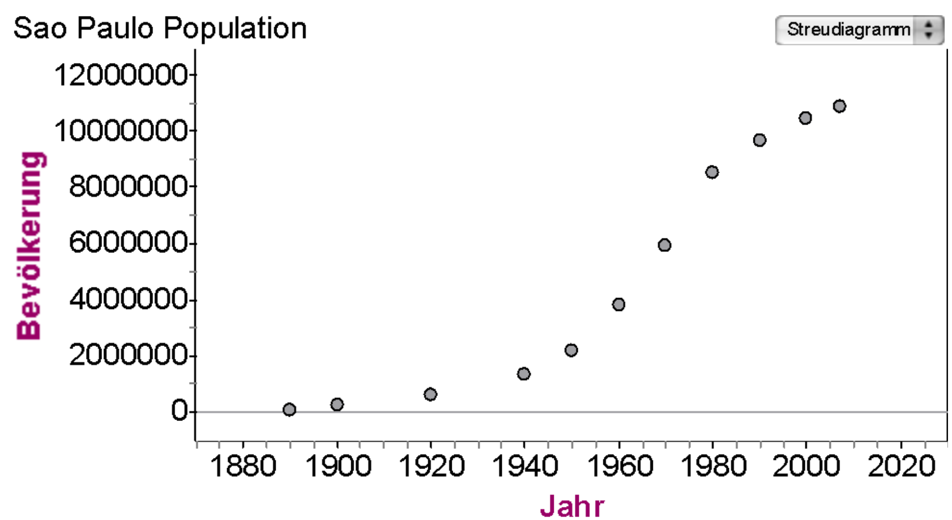
Beispiel: Wasser in der Mikrowelle

microwave.nls(250,0.6)
6.734675 : 250.0   0.6
4.922294 : 270.4370242   0.6091839
4.91368 : 270.8861105   0.6090141
4.91368 : 270.8826921   0.6090118



Beispiel : Bevölkerung von Sao Paulo

Modellierung der Bevölkerungsentwicklung von Sao Paulo zwischen 1890 und 2007



Beispiel : Bevölkerung von Sao Paulo

Logistisches Wachstumsmodell

$$y(t) = \frac{S \cdot y_0}{y_0 + (S - y_0)\exp(-kSt)}$$

Gesucht: Werte für k, S und y_0

Ansatz 1: Linearisierung durch Transformation:

$$\ln\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{S}\right) = \ln\left(\frac{S - y_0}{y_0 S}\right) - kSt$$

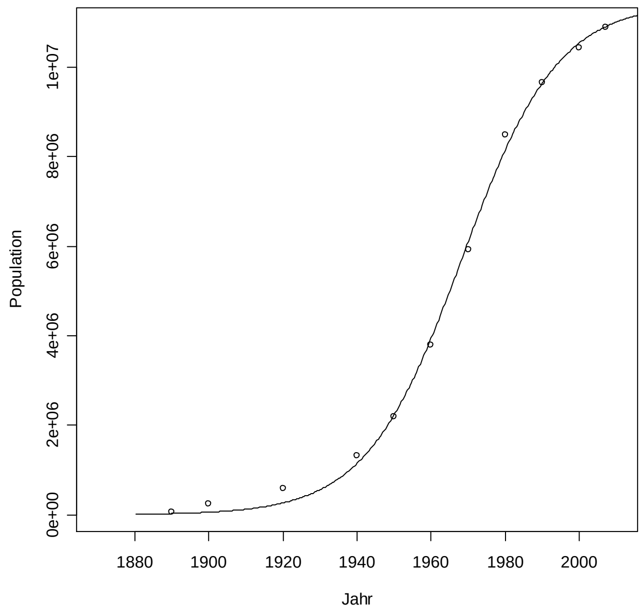
- Daher Datentransformation $$y_i^* = \ln\left(\frac{1}{y_i} - \frac{1}{S}\right)$$
- y_i* versus t_i sollte lineare Struktur haben (falls logistisches Modell gilt)
- Geradenanpassung, bestimme y_0 und k aus Steigung und Achsenabschnitt
- Kennen wir S???

Beispiel : Bevölkerung von Sao Paulo

Ansatz 2: Direkte Minimierung des Kleinste-Quadrate-Kriteriums

$$y(t) = \frac{S \cdot y_0}{y_0 + (S - y_0)\exp(-kSt)}$$

- Nichtlineare Regression, d.h. minimiere $g(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(t_i, \theta)\right)^2$




```
> SaoPaulopopulation.nls(30000,12000000,.06)
1.575222e+13 :  3.0e+04 1.2e+07 6.0e-02
9.528477e+12 :  1.230672e+04 1.012569e+07 7.454556e-02
367246675219 :  1.212242e+04 1.140981e+07 7.790174e-02
350481486960 :  1.230007e+04 1.144860e+07 7.738872e-02
350445551452 :  1.220802e+04 1.144383e+07 7.748964e-02
350445433118 :  1.220277e+04 1.144380e+07 7.749444e-02
350445432043 :  1.220212e+04 1.144378e+07 7.749506e-02
> 
```

Beispiel : Wachstum: frei, begrenzt, logistisch oder??

Wie lässt sich die Anzahl der Personen in einer Stadt modellieren, die über bestimmte technische Geräte verfügen,

- Mobiltelefone
- Digitalfernsehen
- Internetanschluss

Freies Wachstum

$$y' = qy \qquad \Rightarrow \quad y(t) = y_0 \exp(qt)$$

Begrenztes Wachstum

$$y' = q(S - y) \qquad \Rightarrow \quad y(t) = S - (S - y_0)\exp(-qt)$$

Logistisches Wachstum

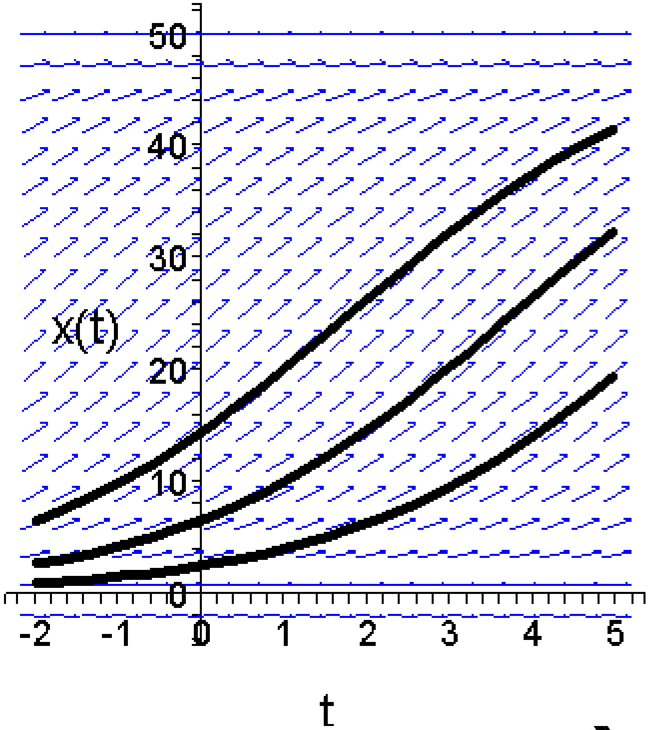
Oder ... $y' = qy(S-y) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \dfrac{y_0 S}{y_0 - (S - y_0)\exp(-qSt)}$

$$y' = q\sqrt{y}(S - y) \cdot t$$

Beispiel : Wachstum: frei, begrenzt, logistisch oder??

- **Richtungsfelder, z.B. mit Maple**

- **> DEplot([diff(x(t),t)=0.01*x(t)*(50-x(t))],[x(t)],t=-2..5,x= 2..50,pts);**



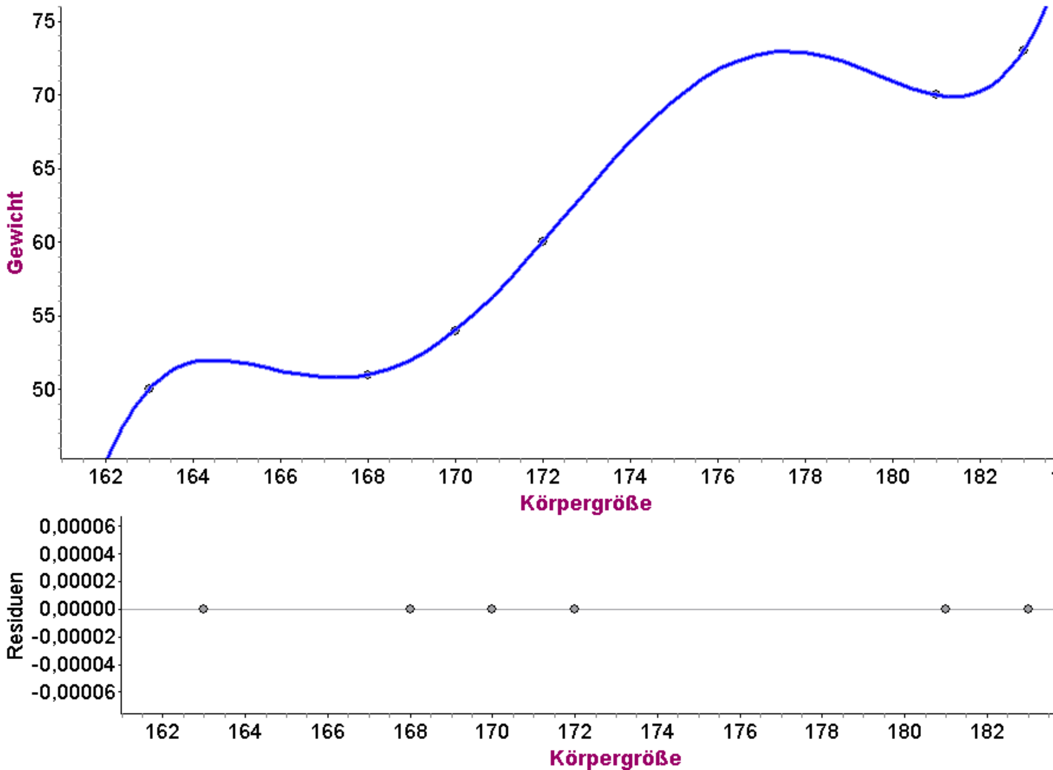
Schwierigkeiten

Von sechs Abiturienten wurden Körpergröße (in cm) und Gewicht(in kg) gemessen. Aus den Daten wurde als Modell für den Zusammenhang zwischen diesen Größen ein Polynom fünften Grades vorgeschlagen :

$$\text{Gewicht} = \frac{83}{225225}x^5 - \frac{573371}{1801800}x^4 + \frac{14138299}{128700}x^3 - \frac{34146531901}{1801800}x^2 + \frac{44602234787}{27300}x - \frac{40260316977}{715}$$

(x steht für die Körpergröße in cm) Folgende Abbildung zeigt die Daten in einem Streudiagramm mitsamt eingepasster Kurve sowie im unteren Teil ein Residuendiagramm.

Kommentieren Sie die Angemessenheit dieses Modells für den Zusammenhang zwischen Körpergröße und Gewicht von Abiturienten. Beziehen Sie sich dabei auf den Sinn und Zweck mathematischer Modellbildung



a) Kommentieren Sie die Angemessenheit dieses Modells für den Zusammenhang zwischen Körpergröße und Gewicht von Abiturienten

Das Modell zeigt eine außerordentlich gute Anpassung an die erhobenen Daten. Die Residuen weichen nicht ab. Das bedeutet die Anpassung des Modells ist sehr gut geglückt. Es muss nicht weiter überlegt werden ob es ein Modell mit einer besseren Anpassung gibt.

a) Kommentieren Sie die Angemessenheit dieses Modells für den Zusammenhang zwischen Körpergröße und Gewicht von Abiturienten

Auf den ersten Blick scheint die Modellierung perfekt.
→ keine abweichenden Messwerte/Punkt im Residuendiagramm
Dennoch zweifle ich die Genauigkeit bzw. sogar die Gültigkeit des Modells an.

1. zu wenig Messwerte → können nicht repräsentativ verwendet werden
2. Die Messwerte geben keinen Verweis darauf, wie die Kurve zwischen zwei Messwerten aussieht.
Betrachten wir den Abschnitt zwischen x = 172 und x = 181.
Woher sollte man denn (anhand der gegebenen Messwerten) erkennen können, dass bei x = 177 ein Hochpunkt sein muss.
Genausogut hätte man eine Funktion anpassen können, die zwischen den beiden Messwerten einen Tiefpunkt hat, aber trotzdem durch die Messwerte geht.

a) Kommentieren Sie die Angemessenheit dieses Modells für den Zusammenhang zwischen Körpergröße und Gewicht von Abiturienten

Das Polynom fünften Grades das hierfür angepasst wurde, passt gut ist aber für die Realität kein geeignetes Modell. Mit dem Polynom können zwar alle 6 Daten gut erfasst werden, die Realität wird dadurch jedoch nicht gut beschrieben und das Modell könnte man nicht gut anwenden um daraus wichtige Daten herauszunehmen. →

Viel besser wäre eine Gerade geeignet. Mit der Gerade würde auch besser ersichtlich werden, dass es sich eher um einen linearen Zusammenhang zwischen Gewicht und Körpergröße handelt.

Klar ~~sind~~ sind so im Residuendiagramm kaum Abweichungen drin, aber das ist nicht das Ziel von dem Modellbilden. !

a) Kommentieren Sie die Angemessenheit dieses Modells für den Zusammenhang zwischen Körpergröße und Gewicht von Abiturienten

Ein Polygon kann immer so gewählt werden, dass alle Punkte genau erfasst werden. Jedoch hat das Modell keinen Bezug zur Realität.
Die Aussage, dass ein Student mit Körpergröße ca 178cm etwa 73 Kg wiegt und das ebenfalls ein Student mit 182cm das selbe wiegt, kann zwar sein, ist aber eher eine Ausnahme, welche in Modellen nicht berücksichtigt werden können

Schlussfolgerungen

- Qualitatives Verstehen vom Verlauf von Funktionen an Stelle ritualisierter Verfahren zur Kurvendiskussion
- Bedeutung der Parameter verstehen
- DGL verstehen: wie kommt man drauf? Was bedeuten sie? Interpretation des Richtungsfelds
- Vernetzung von Inhalten
- Modellannahmen thematisieren
- Technologieeinsatz , z.B. Software wie Maple, Fathom, R; Internet
- Reale Daten, authentische Problemstellungen

Literatur

- J. Engel (2010): Parameterschätzen in logistischen Regressionsmodellen. *Stochastik in der Schule*, 30(1), 13-18 http://stochastik-in-der-schule.de
- J. Engel (2011): Datenanalyse und Geometrie. Zum Zusammenspiel theoriegeleiteter und datenbezogener Modellierungen. *Mathematica Didactica*, http://mathdid.ph-freiburg.de/index.php/beitraege/2011
- J. Engel, M. Vogel (2012): Vom Geradebiegen krummer Beziehungen: Zum Modellieren nichtlinearer Zusammenhänge. *Praxis der Mathematik*, 44. 29-34
- J. Engel (2009): *Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion. Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtsstudierende.* Springer: Heidelberg

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

Joachim Engel, Pädagogische Hochschule Ludwigsburg
www.joachimengel.eu
engel@ph-ludwigsburg.de