

# Vertiefung im Bereich Algebra

M. Sc. Mathematik

Akademisches Jahr 2020/21

Dozent: PD Dr. Olaf Schnürer

Vorlesungen (jeweils 4+2 SWS):

- WS 2020/21: Algebraische Topologie: Singuläre Homologie und Kohomologie
- SS 2021: Garbentheorie

## WS 2020/21: Algebraische Topologie: Singuläre Homologie und Kohomologie

**Vorkenntnisse** Außer einer gewissen „mathematischen Reife“ werden nur wenige Vorkenntnisse benötigt:

- Grundlagen der mengentheoretischen Topologie (Stetigkeit, Kompaktheit, Zusammenhang, Homotopie von Abbildungen)
- grundlegende algebraische Begriffe (Gruppe, Ring, Modul, Homomorphismen dieser Strukturen)
- Wünschenswert sind (werden aber bei Bedarf gerne erklärt): grundlegende kategorielle Begriffe (Kategorie, Funktor)

Wenn Sie meine Vorlesung „Algebraische Topologie: Fundamentalgruppen und Überlagerungen“ im Sommersemester 2019 gehört haben, sind sie bestens für die geplante Vorlesung vorbereitet und herzlich eingeladen, daran teilzunehmen - die Kenntnis von Fundamentalgruppen und Überlagerungen ist aber keine notwendige Voraussetzung für die Veranstaltung im Wintersemester 2020/21.

**Inhalt** Die Hauptidee der algebraischen Topologie besteht darin, topologischen Räumen (und stetigen Abbildungen) algebraische Strukturen so zuzuweisen, dass letztere einerseits unter „Verformungen“ von Räumen (und Abbildungen) invariant sind und andererseits berechenbar bleiben. Dadurch soll ein besseres Verständnis topologischer Räume gewonnen werden.

Das mathematische Konzept der Homologie und Kohomologie kommt in sehr vielen Bereichen der Mathematik zum Einsatz und gehört zum Grundwissen jedes ernsthaften Mathematikers.

Ich hoffe, eine große Zahl der unten angegebenen Themen zu behandeln und mit vielen Beispielen zu illustrieren.

- singuläre Homologie (Funktorialität, Homotopie-Invarianz, Hurewicz-Isomorphismus, relative Homologie, lange exakte Homologiesequenz, Ausschneidung, Satz von Mayer-Vietoris, Jordanscher Kurvensatz bzw. Jordan-Brouwer-Zerlegungssatz, Invarianz von Gebieten, Anklebesequenz, Eulercharakteristik, universelles Koeffiziententheorem der Homologie, Künneth-Formel)
- singuläre Kohomologie (Kohomologiering, Cup- und Cap-Produkt, Poincaré-Dualität, Kohomologie mit kompaktem Träger)

## SS 2021: Garbentheorie

**Vorkenntnisse** Diese Vorlesung über Garben baut einerseits auf der soeben beschriebenen Vorlesung auf und andererseits auf der Vorlesung *Homologische Algebra* von Prof. Dr. Igor Burban im Wintersemester 2020/21.

**Inhalt** Garbentheorie ist ein Teilgebiet der algebraischen Topologie mit vielfältigen Anwendungen, etwa in der geometrischen Darstellungstheorie oder in der algebraischen Geometrie (derivierte Kategorien kohärenter Garben auf Varietäten). Sie ist stark motiviert durch Ergebnisse der algebraischen Topologie, wie wir sie in der vorausgehenden Veranstaltung kennenlernen werden. Beispielsweise stimmt auf vernünftigen topologischen Räumen die singuläre Kohomologie mit den derivierten globalen Schnitten der konstanten Garbe, der sogenannten Garbenkohomologie, überein. Die Ringstruktur erhält man, indem man die Garbenkohomologie als graduierte Endomorphismen der konstanten Garbe in der derivierten Kategorie interpretiert.

Da die Feinplanung noch nicht erfolgt ist, kann ich zur Zeit nur grob einige Themen auflisten, die behandelt werden sollen:

- Erste Čech-Kohomologie und Überlagerungen (bzw. Torsoren)
- Garben (von Mengen) und ihre étalen Räume, Garbifizierung
- Garben von abelschen Gruppen (abelsche Kategorie, Exaktheit auf Halmen)
- Funktorialität (adjungierte Funktoren, Vorschub und Zurückholen von Garben, Hom- und Tensor)
- derivierte Kategorie von Garben
- derivierte Funktoren, Berechnung durch geeignete Auflösungen
- Garbenkohomologie
- Homotopie-Invarianz der Garbenkohomologie
- Vergleich mit singulärer Kohomologie
- De-Rham-Kohomologie als Garbenkohomologie
- Garbenkohomologie mit kompaktem Träger
- lange exakte Sequenzen, Mayer-Vietoris-Sequenz
- ...
- Fernziel: Sechs-Funktor-Formalismus

## Sonstiges

- Vorlesungen zu den angegebenen Themen (Algebraische Topologie: Singuläre Homologie und Kohomologie; Garbentheorie) finden in Paderborn unregelmäßig und im Fall der Garbentheorie eher selten statt.
- Derivierte Kategorien von Garben bilden einen wichtigen Forschungsschwerpunkt der Arbeitsgruppe *Algebra* von Prof. Dr. Igor Burban.
- Wer in diesem oder einem verwandten Bereich seine Masterarbeit schreiben möchte, möge Prof. Dr. Igor Burban oder mich bitte frühzeitig persönlich kontaktieren.
- Bei Fragen können Sie mich gerne kontaktieren.