Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 5

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 18. Mai 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 18 *(8 Punkte)*

Berechnen Sie das Riemannintegral $\int_0^b f$ mittels Ober- und Untersumme für die Funktionen

$$f(x) \;:=\; x^2 \qquad \text{sowie} \qquad f(x) \;:=\; \mathrm{e}^x$$

Aufgabe 19 *(5 Punkte)*

Zeigen Sie, daß das Produkt riemannintegrabler Funktionen wieder riemannintegrabel ist.

Aufgabe 20 *(7 Punkte)*

Sei F_a^b jeweils die Menge aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$.
1. Zeigen Sie, daß diese eine Integrandenmenge bilden.
2. Zeigen Sie, daß es auf $\{F_a^b\}$ genau ein Integral gibt.

Hinweis: In der Vorlesung wird gezeigt, wie das Integral auf Treppenfunktionen aussehen muß, so daß die Eindeutigkeit nicht noch einmal bewiesen werden muß. Zeigen Sie aber, daß das so definierte Integral alle Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 21 *(5 Punkte)*

Sei F_a^b jeweils die Menge aller riemannintegrierbaren Funktionen auf $[a, b]$.
Zeigen Sie, daß diese eine Integrandenmenge bilden.

Aufgabe 22 *(10 Punkte)*

1. Zeigen Sie, daß eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ genau dann riemannintegrabel ist, wenn folgendes gilt:

   Für alle Folgen $(\mathcal{Z}_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} l(\mathcal{Z}_n) = 0$ und alle Folgen (Ξ_n) von Zwischenpunkten zu $(\mathcal{Z}_n)$ konvergiert die Folge der Zwischensummen (Z_n) gegen denselben Wert.

   Dabei heißt $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ Menge von Zwischenpunkten zu $\mathcal{Z} = \{x_0, \ldots, x_k\}$ genau dann, wenn $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gilt. Die Feinheit $l(\mathcal{Z})$ einer Zerlegung ist definiert durch $l(\mathcal{Z}) := \max_i\{x_i - x_{i-1}\}$ und die Zwischensumme Z zu $\mathcal{Z}$ und Ξ gegeben durch

   $$Z \;:=\; \sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\,[x_i - x_{i-1}]\,.$$

2. Zeigen Sie, daß $Z_n \to \int_a^b f$ gilt, sofern f riemannintegrabel ist.