Christian Fleischhack Universität Hamburg

Differentialgeometrie II

Übungsblatt 5

Abgabetermin: Montag, 27. November 2006, zur Übung

Aufgabe 11 *(3 Punkte)*

Seien $Y_1, \ldots, Y_k$ Jacobifelder längs einer Geodätischen $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ mit $\|\dot\gamma\| > 0$ in einer pseudoriemannschen Mannigfaltigkeit M. Falls $g(\dot Y_i, Y_j) = g(Y_i, \dot Y_j)$ für alle i, j, so gilt für alle differenzierbaren $f_i : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(\dot V, \dot V) - g\bigl(R(V, \dot\gamma)\dot\gamma, V\bigr) \quad = \quad g(A, A) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, g(V, B) \tag{1}$$

mit

$$V := \textstyle\sum_i f_i Y_i, \quad A := \sum_i \dot f_i Y_i, \quad B := \sum_i f_i \dot Y_i. \tag{2}$$

Aufgabe 12 *(3 Punkte)*

Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$\begin{array}{rccc} \rho : & T_pM \setminus \{0\} & \longrightarrow & [0, \infty] \\ & v & \longmapsto & \sup\{t \in \mathbb{R} \mid \gamma_v \text{ minimal auf } [0,t]\} \end{array}$$

stetig ist. Hierbei ist γ_v die Geodätische $\gamma_v(s) := \exp_p(sv)$.

Aufgabe 13 *(3 Punkte)*

Bestimmen Sie den Schnittort eines allgemeinen zweidimensionalen Torus, und skizzieren Sie ihn. (Ein allgemeiner Torus entsteht aus Faktorisierung des $\mathbb{R}^2$ nach einem von zwei linear unabhängigen Vektoren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ erzeugten Gitter.)

Hinweis: Es mag ratsam sein, die Geodätischen des Torus als Projektionen von Geodätischen im $\mathbb{R}^2$ zu betrachten und sich hier den Raum U_m, wobei m ein Gitterpunkt ist, anzusehen.