

Differentialgeometrie II

Übungsblatt 6

Abgabetermin: Montag, 4. Dezember 2006, zur Übung

Aufgabe 14

(4 Punkte)

Sei G eine Liegruppe mit Liealgebra \mathfrak{g} . Beweisen Sie, daß für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp\left(t(X + Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + O(t^3)\right)$$

gilt.

Aufgabe 15

(5 Punkte)

Sei

$$\begin{aligned} Gl(n) &:= \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}, \\ Sl(n) &:= \{A \in Gl(n) \mid \det A = 1\}, \\ \mathfrak{gl}(n) &:= \mathbb{R}^{n \times n}, \\ \mathfrak{sl}(n) &:= \{X \in \mathfrak{gl}(n) \mid \operatorname{tr} X = 0\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß

- $Gl(n)$ eine Liegruppe mit Liealgebra $\mathfrak{gl}(n)$ ist;
- $Sl(n)$ eine Unterliegruppe der $Gl(n)$ ist;
- $\mathfrak{sl}(n)$ die Liealgebra von $Sl(n)$ ist.