Christian Fleischhack Universität Hamburg

Funktionalanalysis II

Übungsblatt 6

Abgabetermin: Mittwoch, 20. Mai 2009, zur Übung

Aufgabe 26 *(4 Punkte)*

Seien H_1 und H_2 Unterhilberträume eines Hilbertraums H mit $H_1 \cap H_2^\perp = \{0\}$.
Zeigen Sie $\dim_{\mathrm{HR}} H_1 \leq \dim_{\mathrm{HR}} H_2$.

Aufgabe 27 *(4 Punkte)*

Kann man am Spektrum eines (dicht definierten) abgeschlossenen symmetrischen Operators erkennen, ob er selbstadjungiert ist?

Aufgabe 28 *(5 Punkte)*

Sei $T\psi := -\mathrm{i}\psi'$ der Ableitungsoperator mit $D(T) := \{\psi \mid \psi \in AC[0,\infty), \psi(0) = 0\}$.
Bestimmen Sie die Cayleytransformierte von T.

Hinweis: $\psi \in AC[0,\infty)$ *gilt genau dann, wenn* $\psi|_I \in AC(I)$ *für alle kompakten Intervalle* $I \subseteq [0,\infty)$ *und* $\psi' \in L^2[0,\infty)$ *gilt.*

Aufgabe 29 *(7 Punkte)*

Sei $T\psi := -\psi''$ mit

$$D(T) \;:=\; \{\psi \in L^2[0,1] \mid \psi, \psi' \in AC[0,1], \psi(0) = 0 = \psi(1), \psi'(0) = 0 = \psi'(1)\}.$$

Bestimmen Sie T^* sowie Defekträume und -zahlen von T.
Geben Sie zudem zwei verschiedene „Typen"[1] selbstadjungierter Erweiterungen von T an.

[1] Da der Begriff des „Typs" nicht definiert wurde, eine kleine Bemerkung zur Erklärung: Es geht hier darum, zwei Erweiterungen zu finden, die sich nicht nur in einem einzelnen Parameter voneinander unterschieden. In dieser Hinsicht würden also die Erweiterungen vermöge $\psi(0) = -\psi(1)$ bzw. $\psi(0) = \psi(1)$ im entsprechenden Falle 1. Ordnung vom gleichen Typ sein, da beides Spezialfälle von Erweiterungen mittels $\psi(0) = \vartheta\psi(1)$ für $|\vartheta| = 1$ sind.