Christian Fleischhack Universität Paderborn

Reelle Analysis

Übungsblatt 5

Die Lösungsblätter sind bis

Donnerstag, 18. November 2010, 9:15 Uhr

in das in Flur D1 befindliche grüne Schließfach Nr. 116 zu werfen.

Aufgabe 18 *(7 Punkte)*

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die alle Gleichgewichtspunkte von

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y$$

asymptotisch stabil sind. Gibt es Werte von a, für die stabile Gleichgewichtspunkte existieren, die nicht asymptotisch stabil sind? Wenn ja, bestimmen Sie diese Werte und die zugehörigen Gleichgewichtspunkte; wenn nicht, beweisen Sie die Nichtexistenz.

Aufgabe 19 *(12 Punkte)*

Bestimmen Sie für die Differentialgleichungen

$$\dot{y} - (y-1)(y-2)(y-3) = 0$$

bzw.

$$\ddot{y} + \dot{y} - (y-1)(y-2)(y-3) = 0$$

alle Gleichgewichtspunkte sowie deren Stabilität. Skizzieren Sie jeweils das Phasenportrait.

Hinweis: Formulieren Sie die zweite Differentialgleichung via $x := \dot{y}$ als zwei Differentialgleichungen erster Ordnung.

Aufgabe 20 *(12 Punkte)*

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

mit $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$. Beschreiben (klassifizieren) Sie die Trajektorien qualitativ in Abhängigkeit von x_0 and y_0; geben Sie insbesondere deren Grenzverhalten an und skizzieren Sie das Phasenportrait.

Hinweis: Transformieren Sie die Differentialgleichung mittels $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ auf Polarkoordinaten. Bestimmen Sie $\dot{r}$ mit Hilfe von $\frac{d}{dt}(r^2)$.