



UNIVERSITÄT
PADERBORN

Institut für Mathematik, Universität Paderborn

FUNNEL-REGELUNG FÜR UNENDLICH-DIMENSIONALE SYSTEME

Thomas Berger

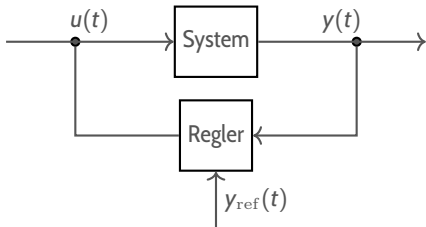
Elgersburg, 19. Februar 2020



Überblick

- 1) Regelung unter lediglich “strukturellen” Annahmen
→ Motivation anhand von ODEs
- 2) Konzept der Funnel-Regelung
- 3) System-Klasse von abstrakten Differentialgleichungen
→ enthält “einfache” ∞ -dimensionale Systeme
- 4) “schwere” Klasse ∞ -dimensionaler Systeme

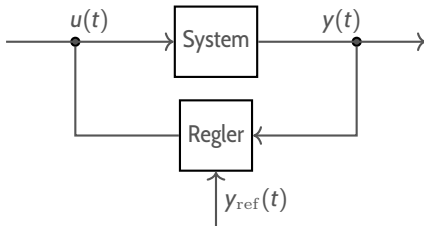
Regelung



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), & x(t) &\in X \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

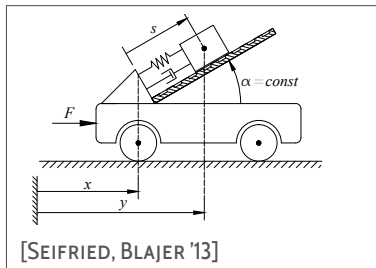
- keine Kenntnis der Systemparameter, nur “strukturelle” Annahmen an das Modell
- **Ziel:** einfacher Regler, so dass “ $y(t)$ verfolgt $y_{\text{ref}}(t)$ ”

Regelung



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), & x(t) &\in X \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

- keine Kenntnis der Systemparameter, nur “strukturelle” Annahmen an das Modell → **ODEs und PDEs in der selben Klasse!**
- **Ziel:** einfacher Regler, so dass “ $y(t)$ verfolgt $y_{\text{ref}}(t)$ ”

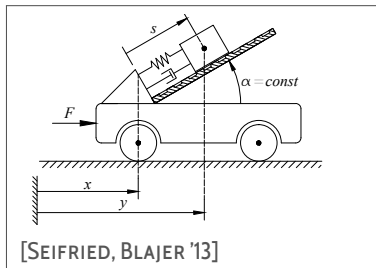


Winkel: $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Feder, Dämpfer mit nichtlinearer
Kennlinie: $K(s)$, $D(\dot{s})$

$$u(t) = F$$

$$y(t) = x(t) + s(t) \cos \alpha$$



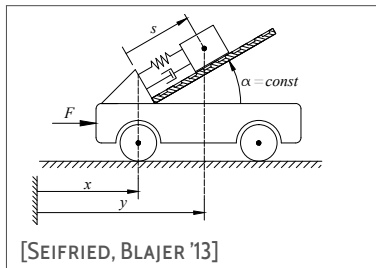
Winkel: $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Feder, Dämpfer mit nichtlinearer
Kennlinie: $K(s)$, $D(\dot{s})$

$$u(t) = F$$

$$y(t) = x(t) + s(t) \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \cos \alpha \\ m_2 \cos \alpha & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -K(s) - D(\dot{s}) + m_2 g \sin \alpha \end{pmatrix}$$



Winkel: $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

Feder, Dämpfer mit nichtlinearer
Kennlinie: $K(s)$, $D(\dot{s})$

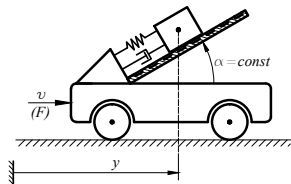
$$u(t) = F$$

$$y(t) = x(t) + s(t) \cos \alpha$$

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 \cos \alpha \\ m_2 \cos \alpha & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -K(s) - D(\dot{s}) + m_2 g \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\dot{y} = \dot{x} + \dot{s} \cos \alpha$$

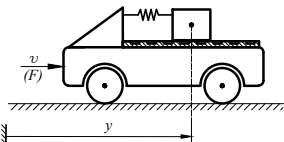
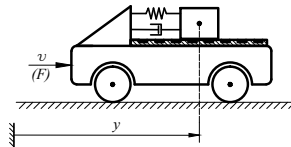
$$\ddot{y} = -c_1(K(s) + D(\dot{s}) - m_2 g \sin \alpha) + \frac{\sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} u$$

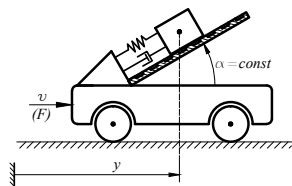


$$0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

$$\ddot{y} = f_1(s, \dot{s}) + \frac{\sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} u$$

Relativgrad = 2

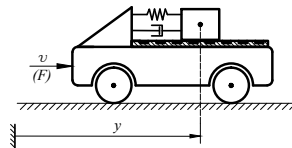




$$0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

$$\ddot{y} = f_1(s, \dot{s}) + \frac{\sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} u$$

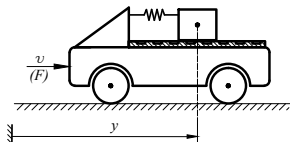
Relativgrad = 2

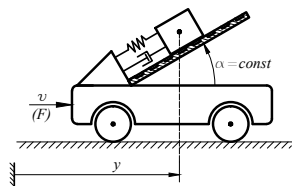


$$\alpha = 0^\circ, \quad D'(\dot{s}) \neq 0$$

$$y^{(3)} = f_2(s, \dot{s}) + \frac{D'(\dot{s})}{m_1 m_2} u$$

Relativgrad = 3

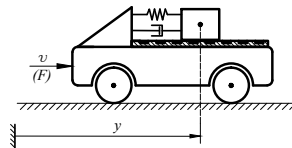




$$0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

$$\ddot{y} = f_1(s, \dot{s}) + \frac{\sin^2 \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} u$$

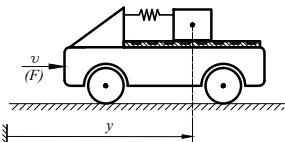
Relativgrad = 2



$$\alpha = 0^\circ, \quad D'(\dot{s}) \neq 0$$

$$y^{(3)} = f_2(s, \dot{s}) + \frac{D'(\dot{s})}{m_1 m_2} u$$

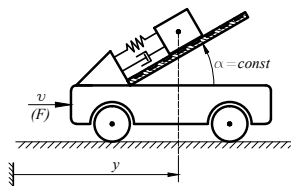
Relativgrad = 3



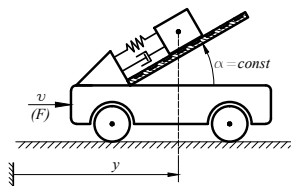
$$\alpha = 0^\circ, \quad D'(\dot{s}) = 0, \quad K'(s) \neq 0$$

$$y^{(4)} = f_3(s, \dot{s}) + \frac{K'(s)}{m_1 m_2} u$$

Relativgrad = 4

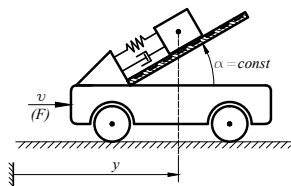


Interne Dynamik: verbleibende Dy-
namik bei fixiertem Ausgang



Interne Dynamik: verbleibende Dy-
namik bei fixiertem Ausgang

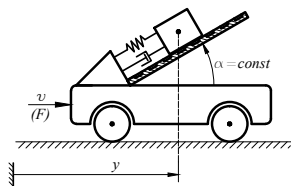
$$\ddot{\eta} = -c_3 K \left(\frac{\eta - y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) - c_3 D \left(\frac{\dot{\eta} - \dot{y} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + c_4 g \sin \alpha$$



Interne Dynamik: verbleibende Dynamik bei fixiertem Ausgang

$$\ddot{\eta} = -c_3 K \left(\frac{\eta - y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) - c_3 D \left(\frac{\dot{\eta} - \dot{y} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + c_4 g \sin \alpha$$

$$\alpha = 90^\circ, m_2 = 1: \quad \ddot{s} = -K(s) - D(\dot{s}) + g$$

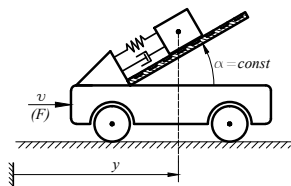


Interne Dynamik: verbleibende Dynamik bei fixiertem Ausgang

$$\ddot{\eta} = -c_3 K \left(\frac{\eta - y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) - c_3 D \left(\frac{\dot{\eta} - \dot{y} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + c_4 g \sin \alpha$$

$$\alpha = 90^\circ, m_2 = 1: \quad \ddot{s} = -K(s) - D(\dot{s}) + g$$

- Lyapunov-Funktion: kinetische + potentielle Energie
- Dissipativität: $D(\dot{s}) \dot{s} \geq 0$



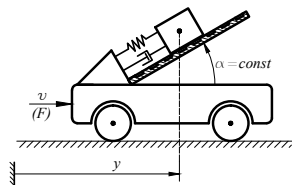
Interne Dynamik: verbleibende Dynamik bei fixiertem Ausgang

$$\ddot{\eta} = -c_3 K \left(\frac{\eta - y \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) - c_3 D \left(\frac{\dot{\eta} - \dot{y} \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) + c_4 g \sin \alpha$$

$$\alpha = 90^\circ, m_2 = 1: \quad \ddot{s} = -K(s) - D(\dot{s}) + g$$

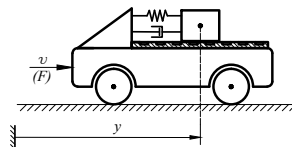
- Lyapunov-Funktion: kinetische + potentielle Energie
- Dissipativität: $D(\dot{s}) \dot{s} \geq 0$

$$\Rightarrow s, \dot{s} \in L^\infty \quad (\text{stabile interne Dynamik})$$



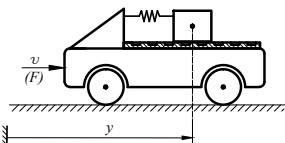
$$0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$$

stabile interne Dynamik



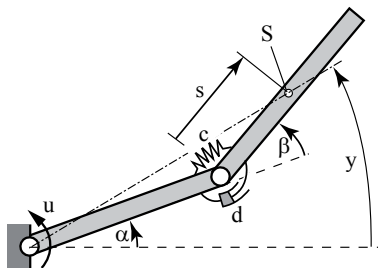
$$\alpha = 0^\circ, \quad D'(\dot{s}) \neq 0$$

stabile interne Dynamik



$$\alpha = 0^\circ, \quad D'(\dot{s}) = 0, \quad K'(s) \neq 0$$

keine interne Dynamik



[SEIFRIED, BLAJER '13]

Rotatorischer Arm

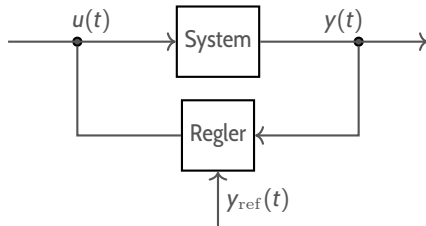
Eingang: Winkelgeschwindigkeit des angetriebenen Arms

Ausgang: Lage von S beschrieben durch Winkel y

Relativgrad = 1

instabile interne Dynamik

Erinnerung



$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), & x(t) &\in X \\ y(t) &= h(x(t)) \end{aligned}$$

- keine Kenntnis der Systemparameter, nur: **Kenntnis des Relativgrads** und Annahme von **stabiler interner Dynamik**
- **Ziel:** einfacher Regler, so dass “ $y(t)$ verfolgt $y_{\text{ref}}(t)$ ”

Hochverstärkungsbasierte adaptive Regelung

Annahme: Relativgrad = 1, stabile interne Dynamik

klassischer (nicht-adaptiver) Hochverstärkungsregler

$$u(t) = -ky(t), \quad k > 0 \text{ hinr. groß} \implies y(t) \rightarrow 0$$

Nachteile: k evtl. unnötig groß; auf lineare Systeme beschränkt

Hochverstärkungsbasierte adaptive Regelung

Annahme: Relativgrad = 1, stabile interne Dynamik

klassischer (nicht-adaptiver) Hochverstärkungsregler

$$u(t) = -ky(t), \quad k > 0 \text{ hinr. groß} \implies y(t) \rightarrow 0$$

Nachteile: k evtl. unnötig groß; auf lineare Systeme beschränkt

adaptiver Hochverstärkungsregler (ab ca. 1983)

$$u(t) = -k(t)y(t), \quad \dot{k}(t) = \|y(t)\|^2$$

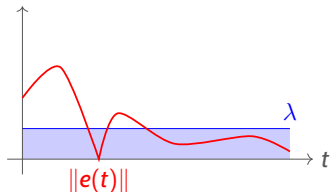
[BYRNES, ILCHMANN, LOGEMANN, MAREELS, MÅRTENSSON, MORSE, NUSSBAUM, OWENS, PRÄTZEL-WOLTERS, WILLEMS, ...]

Nachteile: $k(t)$ mon. wachsend; auf lineare Systeme beschränkt

adaptiver λ -tracker (ab ca. 1994)

$$u(t) = -k(t) \underbrace{(y(t) - y_{\text{ref}}(t))}_{=: e(t)},$$

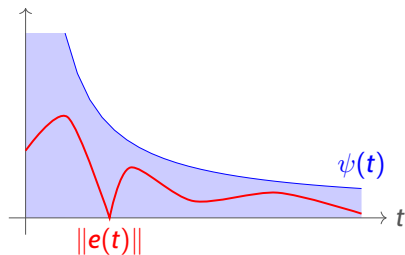
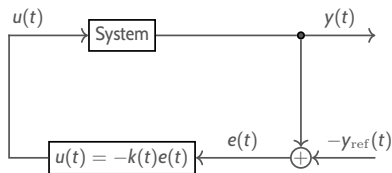
$$\dot{k}(t) = \begin{cases} \frac{\max\{\|e(t)\| - \lambda, 0\}}{\|e(t)\|}, & e(t) \neq 0, \\ 0, & e(t) = 0 \end{cases}$$



[ALLGÖWER, ASHMAN, BULLINGER, ILCHMANN, LOGEMANN, RYAN, SANGWIN, ...]

Nachteile: $k(t)$ mon. wachsend; kein transientes Verhalten

Funnel-Regelung



[ILCHMANN, RYAN, SANGWIN '02]:
Funktioniert, wenn

- Relativgrad = 1
- stabile interne Dynamik

$$k(t) = \frac{1}{\psi(t) - \|e(t)\|}$$

Problem: höherer Relativgrad

Relativgrad 1:

$$\dot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{as. stabil für } k \gg 0$$

Problem: höherer Relativgrad

Relativgrad 1:

$$\dot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{as. stabil für } k \gg 0$$

Relativgrad 2:

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{nicht as. stabil}$$

Problem: höherer Relativgrad

Relativgrad 1:

$$\dot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{as. stabil für } k \gg 0$$

Relativgrad 2:

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -ky(t) \implies \text{nicht as. stabil}$$

$$\ddot{y}(t) + cy(t) = u(t) \stackrel{!}{=} -k_1y(t) - k_2\dot{y}(t) \implies \text{as. stabil für } k_1, k_2 \gg 0$$

Funnel-Regler für Systeme mit höherem Relativgrad

Funnel-Regelung via Backstepping: [ILCHMANN, RYAN, TOWNSEND '06 & '07]

Nachteile: beschleunigte Steigerung der Regler-Komplexität für Relativgrad ≥ 2 , daher häufig schlechte Regelgüte

Relativgrad = 2: [HACKL, HOPFE, ILCHMANN, MÜLLER, TRENN '13]

Nachteile: keine Verallgemeinerung auf beliebigen Relativgrad

Bang-Bang Funnel-Regler: [LIBERZON & TRENN '13]

Nachteile: auf SISO-Systeme beschränkt, starke Kompatibilitätsbedingungen

“Prescribed-Performance Control”: [BECHLIOULIS & ROVITHAKIS '14]

Nachteile: auf Systeme mit trivialer interner Dynamik beschränkt

Funnel-Regler für Systeme mit beliebigem Relativgrad [B., LÊ, REIS '18]

$$\begin{aligned}e_0(t) &= e(t) &= y(t) - y_{\text{ref}}(t), \\e_1(t) &= \dot{e}_0(t) &+ k_0(t)e_0(t), \\e_2(t) &= \dot{e}_1(t) &+ k_1(t)e_1(t), \\&\vdots \\e_{r-1}(t) &= \dot{e}_{r-2}(t) &+ k_{r-2}(t)e_{r-2}(t), \\u(t) &= -k_{r-1}(t)e_{r-1}(t) \\k_i(t) &= 1/(\psi_i(t) - \|e_i(t)\|), \quad i = 0, \dots, r-1\end{aligned}$$

System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$\Gamma > 0$, $T : C \rightarrow L_{loc}^{\infty}$ kausal, lokal Lipschitz, BIBO

System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$\Gamma > 0$, $T : C \rightarrow L_{loc}^{\infty}$ kausal, lokal Lipschitz, BIBO

Linearer Prototyp:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$ mit

(A1) $\text{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} \lambda I - A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + m$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\text{Re } \lambda \geq 0$;

(A2) $CB = CAB = \dots = CA^{r-2}B = 0$ und $CA^{r-1}B > 0$

System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$\Gamma > 0$, $T : \mathcal{C} \rightarrow L_{loc}^{\infty}$ kausal, lokal Lipschitz, BIBO

Linearer Prototyp:

Ist äquivalent zu $\dot{z}(t) = \hat{A}z(t) + \hat{B}u(t)$, $y(t) = \hat{C}z(t)$ mit

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & I_m & 0 \\ R_1 & R_2 & \dots & R_r & S \\ P & 0 & \dots & 0 & Q \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ CA^{r-1}B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [I_m \ 0 \ \dots \ 0 \ 0], \quad \sigma(Q) \subseteq \mathbb{C}_-$$

$$\begin{aligned} \implies y^{(r)}(t) &= R_1 y(t) + \dots + R_r y^{(r-1)}(t) + Se^{Qt} \eta(0) \\ &\quad + \int_0^t Se^{Q(t-\tau)} P y(\tau) d\tau + CA^{r-1} B u(t) \end{aligned}$$

System-Klasse

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$\Gamma > 0$, $T : C \rightarrow L_{loc}^{\infty}$ kausal, lokal Lipschitz, BIBO

Linearer Prototyp:

$$\implies y^{(r)}(t) = T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t) + \Gamma u(t)$$

mit $\Gamma = CA^{r-1}B$ und

$$\begin{aligned} & T(y, \dots, y^{(r-1)})(t) \\ &= R_1 y(t) + \dots + R_r y^{(r-1)}(t) + Se^{Qt} \eta(0) + \int_0^t Se^{Q(t-\tau)} P y(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Funnel-Regler für Systeme mit bekanntem Relativgrad $r \in \mathbb{N}$

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$$\begin{aligned} e_0(t) &= e(t) &= y(t) - y_{\text{ref}}(t), \\ e_1(t) &= \dot{e}_0(t) &+ k_0(t)e_0(t), \\ e_2(t) &= \dot{e}_1(t) &+ k_1(t)e_1(t), \\ &\vdots \\ e_{r-1}(t) &= \dot{e}_{r-2}(t) &+ k_{r-2}(t)e_{r-2}(t), \\ u(t) &= -k_{r-1}(t)e_{r-1}(t) \\ k_i(t) &= 1/(\psi_i(t) - \|e_i(t)\|), \quad i = 0, \dots, r-1 \end{aligned}$$

Theorem [B., Lê, REIS '18]

$$y_{\text{ref}} \in W^{r, \infty} \implies u, k_i, y^{(i)} \in L^\infty \text{ und } \|e_i(t)\| \leq \psi_i(t) - \varepsilon_i$$

Klasse von Operatoren für die Funnel-Regelung

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

erlaubt “einfache” Klasse von ∞ -dimensionalen Systemen

→ interne Dynamik durch PDE modelliert

Klasse von Operatoren für die Funnel-Regelung

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

erlaubt “einfache” Klasse von ∞ -dimensionalen Systemen

→ interne Dynamik durch PDE modelliert

$r = 1$: [ILCHMANN, RYAN, SANGWIN '02, etc.]

$$(Ty)(t) = A_1 y(t) + A_2 \int_0^t \mathcal{T}(t-s) A_3 y(s) ds$$

- $(\mathcal{T}(t))_{t \geq 0}$ exp. stabile C^0 -Halbgruppe auf reellem Hilbert-Raum X mit Generator $A_4 : \mathcal{D}(A_4) \subseteq X \rightarrow X$ (endlich-dimensional: $\mathcal{T}(t) = e^{A_4 t}$)
- (A_4, A_3, A_2) “regular well-posed”, $A_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$

Klasse von Operatoren für die Funnel-Regelung

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$r \in \mathbb{N}$: [ILCHMANN, SELIG, TRUNK '16]

Byrnes-Isidori-Form für lineare ∞ -dimensionale Systeme

$$\dot{\eta}(t) = A_4\eta(t) + A_3y(t),$$

$$y^{(r)}(t) = R_1y(t) + \dots R_r y^{(r-1)}(t) + A_2\eta(t) + \gamma u(t)$$

Klasse von Operatoren für die Funnel-Regelung

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

$r \in \mathbb{N}$: [ILCHMANN, SELIG, TRUNK '16]

Byrnes-Isidori-Form für lineare ∞ -dimensionale Systeme

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t) &= A_4\eta(t) + A_3y(t), \\ y^{(r)}(t) &= R_1y(t) + \dots R_r y^{(r-1)}(t) + A_2\eta(t) + \gamma u(t) \\ &= T(y, \dots, y^{(r-1)})(t) + \gamma u(t)\end{aligned}$$

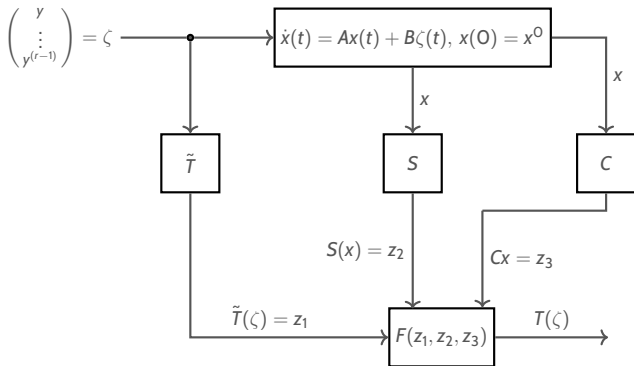
mit $T(y, \dots, y^{(r-1)})(t)$

$$= R_1y(t) + \dots R_r y^{(r-1)}(t) + A_2 \int_0^t \mathcal{T}(t-s)A_3y(s) ds$$

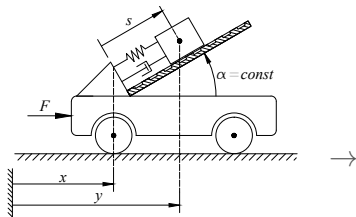
Klasse von Operatoren für die Funnel-Regelung

$$y^{(r)}(t) = f(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t)) + \Gamma(d(t), T(y, \dot{y}, \dots, y^{(r-1)})(t))u(t)$$

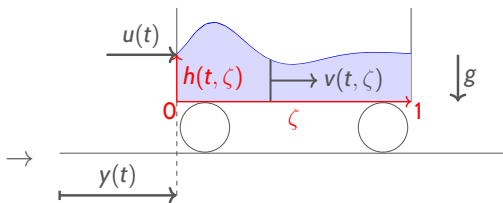
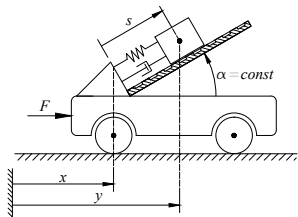
$r \in \mathbb{N}$: [B., PUCHE, SCHWENNINGER '19]



- (A, B, C) regular well-posed
- $f \mapsto \mathcal{L}^{-1}(G) * f$ beschränkt
- S nichtlinear, $\mathcal{D}(S) = X$, (A, B, S) BIBO-stabil

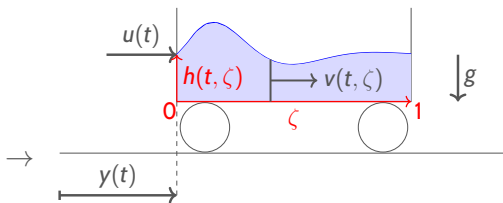
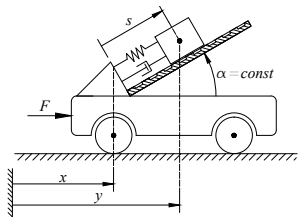


$$\ddot{y}(t) = T(y, \dot{y})(t) + \gamma u(t)$$



$$\ddot{y}(t) = T(y, \dot{y})(t) + \gamma u(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \hat{T}(y, \dot{y})(t) + \hat{\gamma} u(t)$$



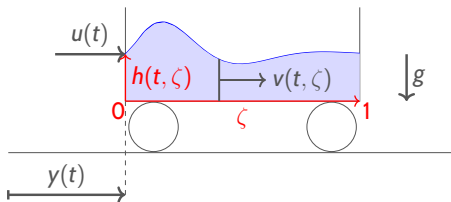
$$\ddot{y}(t) = T(y, \dot{y})(t) + \gamma u(t)$$

$$\ddot{y}(t) = \hat{T}(y, \dot{y})(t) + \hat{\gamma} u(t)$$

Endlich-/unendlich-dimensionale Systeme in der selben Klasse!

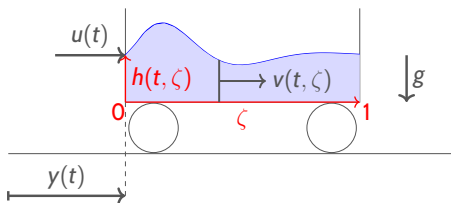
Rollender Wassertank – [B., PUCHE, SCHWENNINGER '19]

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_\zeta(hv) &= 0, \\ \partial_t v + \partial_\zeta \left(\frac{v^2}{2} + gh \right) &= -\ddot{y} \\ +hS \left(\frac{v}{h} \right) &= -\ddot{y} \end{aligned}$$



Rollender Wassertank – [B., PUCHE, SCHWENNINGER '19]

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_\zeta(hv) &= 0, \\ \partial_t v + \partial_\zeta \left(\frac{v^2}{2} + gh \right) & \\ + hS \left(\frac{v}{h} \right) &= -\ddot{y} \end{aligned}$$



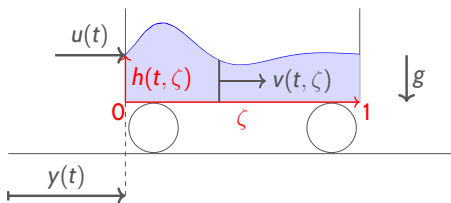
Linearisiertes Modell:

$$\partial_t z_1 = -h_0 \partial_\zeta z_2, \quad \partial_t z_2 = -g \partial_\zeta z_1 - \mu z_2 - \ddot{y}, \quad z_2(t, 0) = z_2(t, 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) &= \frac{g}{2m_T} (z_1(t, 1) - z_1(t, 0)) (2h_0 + z_1(t, 1) + z_1(t, 0)) \\ &+ \frac{\mu h_0}{m_T} \int_0^1 z_2(t, \zeta) d\zeta + \frac{\mu}{m_T} \int_0^1 z_1(t, \zeta) z_2(t, \zeta) d\zeta + \frac{u(t)}{m_T} \end{aligned}$$

Rollender Wassertank – [B., PUCHE, SCHWENNINGER '19]

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_\zeta(hv) &= 0, \\ \partial_t v + \partial_\zeta \left(\frac{v^2}{2} + gh \right) & \\ + hS \left(\frac{v}{h} \right) &= -\ddot{y} \end{aligned}$$



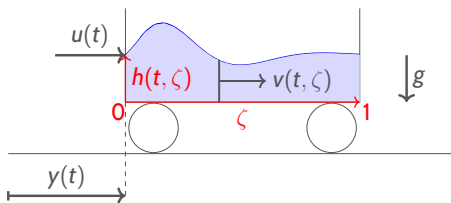
Linearisiertes Modell:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Ab\dot{y}(t), \quad Az = - \begin{pmatrix} h_0 \partial_\zeta z_2 \\ g \partial_\zeta z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} z_1(t, 1) - z_1(t, 0) &= Cz(t) = C\mathcal{T}(t)z(0) + C \int_0^t \mathcal{T}(t-s)Ab\dot{y}(s) ds \\ &= c(t) + ((h_{L1} + h_\delta) * \dot{y})(t) \end{aligned}$$

Rollender Wassertank – [B., PUCHE, SCHWENNINGER '19]

$$\begin{aligned} \partial_t h + \partial_\zeta(hv) &= 0, \\ \partial_t v + \partial_\zeta \left(\frac{v^2}{2} + gh \right) & \\ + hS \left(\frac{v}{h} \right) &= -\ddot{y} \end{aligned}$$

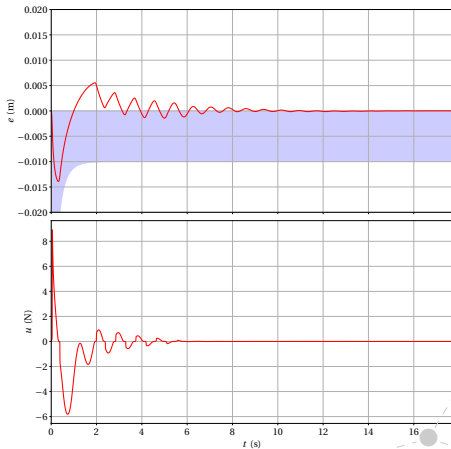
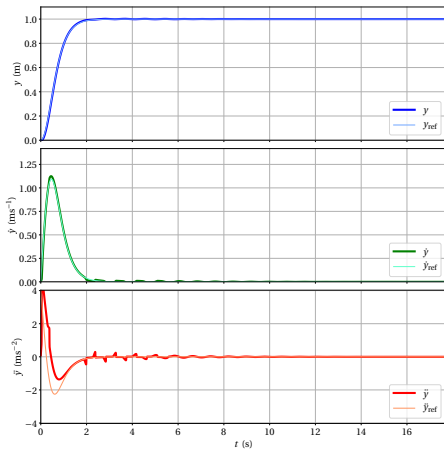


Linearisiertes Modell:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Ab\dot{y}(t), \quad Az = - \begin{pmatrix} h_0 \partial_\zeta z_2 \\ g \partial_\zeta z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{y}(t) = T(\dot{y})(t) + \frac{u(t)}{m_T}$$

Simulation



“Schwere” ∞ -dimensionale Systeme

→ es gibt kein Konzept eines Relativgrads!

- Randgesteuerte Wärmeleitungsgleichung [REIS, SELIG '15]

$$\partial_t x(t) = \Delta x(t), \quad u(t) = (\nu^\top \cdot \nabla x(t))|_{\partial\Omega},$$

$$y(t) = \int_{\partial\Omega} (x(t))(\zeta) d\zeta$$

- allgemeine Klasse von Randsteuerungsproblemen basierend auf m-dissipativen Operatoren [PUCHE, REIS, SCHWENNINGER '18, PUCHE '19]

$$\dot{x}(t) = \mathfrak{A}x(t), \quad x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(\mathfrak{A}) \subseteq X,$$

$$u(t) = \mathfrak{B}x(t), \quad y(t) = \mathfrak{C}x(t)$$

z.B. “lossy transmission line”, Wellengleichung, Diffusionsgleichung

Monodomain-Gleichung [B., BREITEN, PUCHE, REIS '19]

- (einfaches) Modell der elektrischen Aktivität des menschlichen Herzens zur Beschreibung von Defibrillations-Prozessen
- auftretende “reentry waves” entsprechen Fibrillations-Prozessen und sollen durch Regelung unterdrückt werden

$$\partial_t \mathbf{v} = \operatorname{div}(D \nabla \mathbf{v}) + I_{ion}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + I_{s,j} + B I_{s,e}, \quad (\nu^\top \cdot D \nabla \mathbf{v})|_{\partial \Omega} = 0,$$

$$\partial_t \mathbf{w} = c_5 \mathbf{v} - c_4 \mathbf{w}$$

- D – koerzive Diffusionsmatrix
- B – Eingangs-Operator
- \mathbf{v} – transmembranes elektrisches Potential
- \mathbf{w} – zelluläre Zustandsvariable
- I_{ion} – Ionenstrom durch die Membran
- $I_{s,j}$ – intrazellulärer Reizstrom
- $I_{s,e}$ – extrazellulärer Reizstrom

Monodomain-Gleichung – FitzHugh-Nagumo-Modell

$$p_3(v) = -c_1 v + c_2 v^2 - c_3 v^3,$$

$$\text{Ausgang: } y = B'v,$$

$$I_{ion}(v, w) = p_3(v) - w$$

$$\text{Eingang: } I_{s,e}(t)$$

A – elliptischer Neumann-Operator; falls $\partial\Omega$ und D hinreichend glatt:

$$Av = \operatorname{div}(D\nabla v), \quad \mathcal{D}(A) = \left\{ v \in W^{2,2}(\Omega) \mid (\nu^\top \cdot D\nabla v)|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

Monodomain-Gleichung – FitzHugh-Nagumo-Modell

$$p_3(v) = -c_1 v + c_2 v^2 - c_3 v^3,$$

$$\text{Ausgang: } y = B'v,$$

$$I_{ion}(v, w) = p_3(v) - w$$

$$\text{Eingang: } I_{s,e}(t)$$

A – elliptischer Neumann-Operator; falls $\partial\Omega$ und D hinreichend glatt:

$$Av = \operatorname{div}(D\nabla v), \quad \mathcal{D}(A) = \left\{ v \in W^{2,2}(\Omega) \mid (\nu^\top \cdot D\nabla v)|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

$$\text{FHN-Modell: } \quad \partial_t v(t) = Av(t) + p_3(v)(t) - w(t) + I_{s,i}(t) + BI_{s,e}(t),$$

$$\partial_t w(t) = c_5 v(t) - c_4 w(t),$$

$$y(t) = B'v(t)$$

Lösungen über schwache Formulierung

Monodomain-Gleichung – Eingangs-Ausgangskonfigurationen

- $q \in L^2(\Omega)$ und verteilter Eingang der Form $Bz = z \cdot q$, d.h. $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$

$$\implies y(t) = B'v(t) = \int_{\Omega} q(\xi) \cdot (v(t))(\xi) d\xi$$

Z.B. $q = \mathbb{1}_{\omega}$ für $\omega \subseteq \Omega$

Monodomain-Gleichung – Eingangs-Ausgangskonfigurationen

- $q \in L^2(\Omega)$ und verteilter Eingang der Form $Bz = z \cdot q$, d.h. $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, L^2(\Omega))$

$$\implies y(t) = B'v(t) = \int_{\Omega} q(\xi) \cdot (v(t))(\xi) \, d\xi$$

Z.B. $q = \mathbb{1}_{\omega}$ für $\omega \subseteq \Omega$

- $q \in L^2(\partial\Omega)$ und Eingangs-Operator $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, W^{1,2}(\Omega)')$ mit

$$B'z = \int_{\partial\Omega} q(\xi) \cdot z(\xi) \, d\sigma$$

entspricht Neumann-Rand-Steuerung

$$\nu(\xi)^{\top} \cdot (\nabla v(t))(\xi) = q(\xi) \cdot I_{s,e}(t), \quad \xi \in \partial\Omega$$

$$\implies y(t) = B'v(t) = \int_{\partial\Omega} q(\xi) \cdot (v(t))(\xi) \, d\sigma \quad (\text{Dirichlet-Randauswertung})$$

Monodomain-Gleichung – Funnel-Regler

$$\varphi \in \Phi_\gamma := \left\{ \varphi \in W^{1,\infty}([0, \infty); \mathbb{R}) \mid \forall \delta > 0 : \varphi|_{[0, \gamma]} = 0; \inf_{t \geq \gamma + \delta} \varphi(t) > 0 \right\}$$

→ Funnel-Rand $\psi(t) = 1/\varphi(t)$ für $t > \gamma$

$$\text{Regler: } I_{s,e}(t) = -\frac{k_0}{1 - \varphi(t)^2 \|B'v(t) - y_{\text{ref}}(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2} (B'v(t) - y_{\text{ref}}(t)),$$

$$\varphi \in \Phi_\gamma, y_{\text{ref}} \in W^{1,\infty}([0, \infty); \mathbb{R}^m)$$

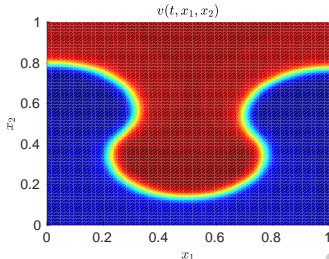
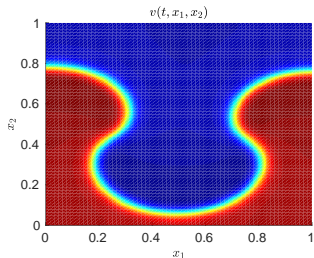
$$\forall t \in [0, \gamma] : I_{s,e}(t) = -k_0(B'v(t) - y_{\text{ref}}(t))$$

Monodomain-Gleichung – Simulation

$$\begin{aligned}
 \text{FHN-Modell:} \quad \partial_t v(t) &= Av(t) + p_3(v)(t) - w(t) + I_{s,i}(t) + BI_{s,e}(t), \\
 \partial_t w(t) &= c_5 v(t) - c_4 w(t), \quad y(t) = B'v(t)
 \end{aligned}$$

Beispiel: typischer Defibrillations-Prozess als Folgeregelungsproblem

$\Omega = (0, 1)^2$; $(v(0), w(0)) = (v_0^*, w_0^*)$ – Snapshot einer “reentry wave”,
welche dysfunktionalen Herzrhythmen entsprechen, die $I_{s,i}$ hemmen



Monodomain-Gleichung – Simulation

Aufgabe: entwerfe Reizstromverlauf $I_{s,e}$, welcher einen natürlichen Herzrhythmus wiederherstellt

Referenz $y_{\text{ref}} = B'v_{\text{ref}}$ entspricht Lösung $(v_{\text{ref}}, w_{\text{ref}})$ mit $(v_{\text{ref}}(0), w_{\text{ref}}(0)) = (0, 0)$, $I_{s,e} = 0$ und

$$I_{s,i}(t) = 101 \cdot q(\xi) (\mathbb{1}_{[49,51]}(t) + \mathbb{1}_{[299,301]}(t)),$$
$$q(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\xi_1 - \frac{1}{2})^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 \leq 0.0225, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Monodomain-Gleichung – Simulation

Aufgabe: entwerfe Reizstromverlauf $I_{s,e}$, welcher einen natürlichen Herzrhythmus wiederherstellt

Referenz $y_{\text{ref}} = B'v_{\text{ref}}$ entspricht Lösung $(v_{\text{ref}}, w_{\text{ref}})$ mit $(v_{\text{ref}}(0), w_{\text{ref}}(0)) = (0, 0)$, $I_{s,e} = 0$ und

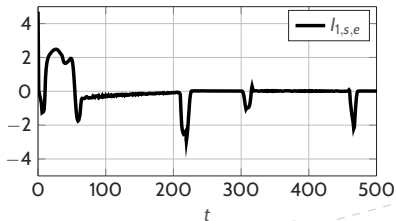
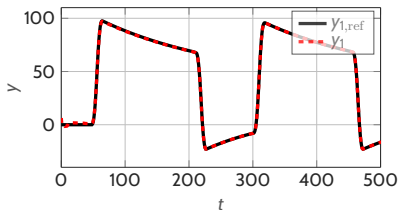
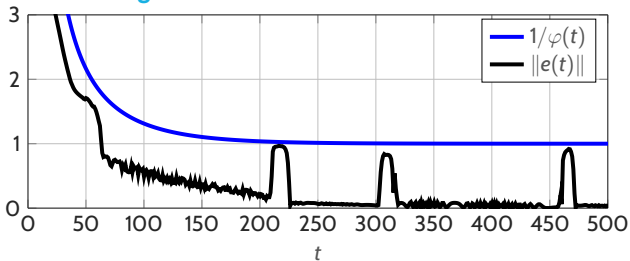
$$I_{s,i}(t) = 101 \cdot q(\xi) (\mathbb{1}_{[49,51]}(t) + \mathbb{1}_{[299,301]}(t)),$$

$$q(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } (\xi_1 - \frac{1}{2})^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 \leq 0.0225, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Regelung: Eingangs-Operator B entspricht **Randsteuerung**

$$I_{s,e}(t) = -\frac{0.75}{1 - \varphi(t)^2 \|B'v(t) - y_{\text{ref}}(t)\|_{\mathbb{R}^2}^2} (B'v(t) - y_{\text{ref}}(t))$$

Monodomain-Gleichung – Simulation



Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!