Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Sommersemester 2017
29.5.2017

6. Übungsblatt zur „Algebraischen Topologie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 13 Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 2.44, d.h. zeigen Sie, dass die *stereographische Projektion*

$$\varphi\colon \mathbb{S}_n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n \quad (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto \left(\tfrac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \tfrac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe G 14 Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum. Zeigen Sie, dass A genau dann ein Retrakt von X ist, wenn jede stetige Abbildung $f\colon A \to Y$ eine stetige Fortsetzung $g\colon X \to Y$ hat.

Aufgabe G 15 Gegeben ist die Abbildung $r\colon [0,1] \times \{0,1\} \to [0,1] \times \{0\}$, $\quad r(x,y) := (x,0)$. Dies ist eine Retraktion von $X := [0,1] \times \{0,1\}$ auf $A := [0,1] \times \{0\}$. Zeigen Sie, dass r keine Deformationsretraktion ist.

Aufgabe G 16 Skizzieren Sie die folgenden Mengen A und X. Zeigen Sie, dass A jeweils ein starker Deformationsretrakt von X ist:

(a) $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig mit Zentrum $z \in X$ und $A := \{z\}$

(b) $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \frac{1}{2} < \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\}$, $A := \mathbb{S}_1$

(c) $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \frac{1}{2} < \sqrt{x^2+y^2} < 2\}$, $A := \mathbb{S}_1$;

(d) $X := ([0,2] \times [0,1]) \cup ([0,1] \times [0,3]) \cup ([0,2] \times [2,3])$,
$A := \{(x,y) \in [0,2] \times [0,3]\colon x = 0 \text{ oder } y = 0 \text{ oder } y = 3\}$

(e) A wie in (d), $X := [0,2] \times [0,3]$

Hausübungen

Aufgabe H 10 Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $x \in U$. In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $\pi_1(U, x)$ abzählbar ist. Wir wählen hierzu eine abzählbare dichte Teilmenge $D \subseteq U$. Wir definieren den *Polygonzug durch* $x_0, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ als den Weg $\eta\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$, der auf dem Intervall $\left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right]$ die Punkte x_{k-1} und x_k geradlinig verbindet, also

$$\eta(t) := \frac{\frac{k}{m} - t}{\frac{1}{m}} x_{k-1} + \frac{t - \frac{k-1}{m}}{\frac{1}{m}} x_k, \quad \text{für } t \in \left[\tfrac{k-1}{m}, \tfrac{k}{m}\right].$$

(a) Sei $\gamma\colon [0,1] \to U$ ein Weg. Zeigen Sie, dass für genügend großes $m \in \mathbb{N}$ auch der Polygonzug η durch $\gamma(0), \gamma\left(\frac{1}{m}\right), \ldots, \gamma\left(\frac{m-1}{m}\right), \gamma(1)$ ganz in U verläuft.
Hinweis: Nach dem Lemma über gleichmäßige Umgebungen, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $\bigcup_{t \in [0,1]} B_\varepsilon^{\mathbb{R}^n}(\gamma(t)) \subseteq U$. Weiter ist γ gleichmäßig stetig.

(b) Zeigen Sie, dass für genügend großes m in (a) γ zu η in U homotop ist (relativ $\{0,1\}$).

(c) Zeigen Sie, dass in (a) und (b) $z_k \in D$ für $k \in \{1, \ldots, m-1\}$ so nahe bei $\gamma\left(\frac{k}{m}\right)$ gewählt werden können, dass auch der Polygonzug ζ durch $\gamma(0), z_1, \ldots, z_{m-1}, \gamma(1)$ ganz in U verläuft und in U zu η homotop ist (relativ $\{0,1\}$).

(d) Zeigen Sie, dass für festes x die Menge aller Polygonzüge ζ der in (c) beschriebenen Form abzählbar ist. Folgern Sie, dass $\pi_1(U, x)$ abzählbar ist.

Aufgabe H 11 Zeigen Sie, dass für einen topologischen Raum folgende Eigenschaften äquivalent sind:

(a) X ist kontrahierbar.

(b) Für ein $x \in X$ ist die Abbildung $c_x\colon X \to \{x\}, \quad y \to x$ eine Homotopieäquivalenz.

(c) X ist homotopieäquivalent zu einem einpunktigen topologischen Raum $\{p\}$.