Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Sommersemester 2017
12.6.2017

7. Übungsblatt zur „Algebraischen Topologie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 17 Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.6: Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen, $A := \coprod_{i\in I} G_i$ und R die Menge der reduzierten Wörter in $W(A)$. Zeigen Sie, dass für festes $i \in I$ die Abbildung

$$\bullet\colon G_i \times R \to R, \quad (g,(a_1,\ldots,a_n)) \mapsto g \bullet (a_1,\ldots,a_n)$$

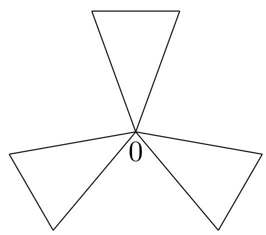
mit

$$g \bullet (a_1,\ldots,a_n) := \begin{cases} (a_1,\ldots,a_n) & \text{falls } g = 1_{G_i}, \\ (g,a_1,\ldots,a_n) & \text{falls } a_1 \notin G_i, g \neq 1_{G_i} \text{ oder } n = 0, \\ (ga_1,\ldots,a_n) & \text{falls } a_1 \in G_i \text{ und } a_1 \neq g^{-1}, \\ (a_2,\ldots,a_n) & \text{falls } a_1 \in G_i \text{ und } a_1 = g^{-1} \end{cases}$$

eine Gruppenwirkung ist.

Aufgabe G 18 Sei J eine Menge. Zeigen Sie, dass die freie Gruppe über J die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jede Gruppe H und jede Abbildung $f\colon J \to H$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\overline{f}\colon *_{i\in J}\mathbb{Z} \to H$ mit $\overline{f}(a_j) = f(j)$.

Aufgabe G 19 Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,0)$ der folgenden Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^2$ mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen:



Hausübungen

Aufgabe H 12 Sei G eine Gruppe. Eine abelsche Gruppe A zusammen mit einem Gruppenhomomorphismus $\phi\colon G \to A$ heißt *Abelisierung* von G, falls die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:

Für jede abelsche Gruppe H und jeden Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to H$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $g\colon A \to H$ mit $f = g \circ \phi$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "g"] \\ & H. \end{tikzcd}$$

(a) Zeigen Sie, dass für jede Gruppe G eine Abelisierung existiert. Betrachten Sie dazu die *Kommutatorgruppe*

$$[G,G] := \langle \{[a,b]\colon a,b \in G\} \rangle \quad \text{mit} \quad [a,b] := aba^{-1}b^{-1},$$

d.h. die von den *Kommutatoren* $[a,b]$ erzeugte Untergruppe. Zeigen Sie, dass der Quotient $G_{ab} := {}^{G}/_{[G,G]}$ eine wohldefinierte Gruppe ist und zusammen mit der Quotientenabbildung $q_G\colon G \to G_{ab}$ eine Abelisierung von G bildet.

(b) Zeigen Sie, dass die Abelisierung eindeutig bis auf einen eindeutig bestimmten Isomorphismus ist.

(c) Seien G und H Gruppen und $\varphi\colon G \to H$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi_{ab}\colon G_{ab} \to H_{ab}$ gibt, sodass $\varphi_{ab} \circ q_G = q_H \circ \varphi$.