Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt

Sommersemester 2017
3.7.2017

10. Übungsblatt zur „Algebraischen Topologie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 26 Sei $\mathbb{R}P^n$ der n-dimensionale projektive Raum. Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{R}P^n$ ein Zellenkomplex ist, der aus je einer k-Zelle für $0 \leq k \leq n$ besteht. Aus Aufgabe G20 wissen wir bereits, dass $q\colon {}^{\mathbb{S}_n}/_{\sim} \to \mathbb{R}P^n,\ x \mapsto [x]$ ein Homöomorphismus ist, wobei $x \sim -x$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$e_n := \{[(x_1, \ldots, x_{n+1})] \in \mathbb{R}P^n \colon x_{n+1} \neq 0\}$$

homöomorph zu E_n ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Komplement e_{n-1} von e_n in $\mathbb{R}P^n$ homöomorph zu $\mathbb{R}P^{n-1}$ ist.

(c) Finden Sie einen Homöomorphismus $\Phi\colon D^n \to \mathbb{R}P^n$, sodass $\Phi(E_n) = e_n$ und $\Phi(\partial D^n) = e_{n-1}$.

(d) Folgern Sie, dass $\mathbb{R}P^n$ ein Zellenkomplex der beschriebenen Art ist.

Aufgabe G 27 Betrachte die Menge $[-1,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ als Zellenkomplex, wobei vier 0-Zellen die Ecken und vier 1-Zellen auf offensichtliche Weise die Kanten bilden. Weiterhin sei die charakteristische Abbildung der 2-Zelle durch $\Psi_2^{-1}\colon [-1,1]^2 \backslash \{0\} \to D_2$, $\psi_2^{-1}(x) := \frac{x}{\|x\|}$ und $\psi_2^{-1}(0) = 0$ gegeben. Sei $A := \{1\} \times [-1,1]$. Skizzieren Sie die im Beweis von Satz 6.12 definierte Menge $N_\varepsilon(A)$ wobei $\varepsilon_{\alpha,n} = \frac{1}{2}$ für $0 \leq n \leq 2$, $\alpha \in A_n$.

Aufgabe G 28 Es sei $X = X_1$ ein Graph mit dem 0-Skelett X_0, den charakteristischen Abbildungen $\psi_\alpha := \psi_{1,\alpha}\colon [-1,1] \to X$ für $\alpha \in A$ und den Kanten $\overline{e_\alpha} := \psi_\alpha([-1,1])$. In dieser Aufgabe nennen wir X *kombinatorisch zusammenhängend*, wenn X einpunktig ist oder für alle Ecken $x \neq y \in X_0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und Ecken $x = v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = y$ existieren, sodass v_{j-1} und v_j für alle $1 \leq j \leq n$ durch eine Kante verbunden sind. Wir nennen $v_0, \ldots, v_n$ einen Eckenweg von x nach y. Überlegen Sie sich zunächst, dass jeder kombinatorisch zusammenhängende Graph auch wegzusammenhängend ist. Jetzt soll die Umkehrung bewiesen werden. Sei also X wegzusammenhängend, $x \neq y \in X_0$ und $\gamma\colon [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y.

(a) Begründen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ von $[0,1]$ gibt, sodass für alle $0 \leq j \leq n$ das Bild $\gamma([t_j - 1, t_j])$ in $\psi_{\alpha_j}(]-1,1[) =: e_{\alpha_j}$ enthalten ist oder enthalten ist in der offenen Menge $N_{\frac{1}{2}}(\{w_j\})$ für eine Ecke $w_j \in X_0$.

(b) Finden Sie einen Weg γ' homotop relativ $\{0, 1\}$ zu γ, sodass $\gamma'^{-1}(X_0)$ endlich ist.

(c) In der Situation von (c) enthalte $\gamma'^{-1}(X_0)$ die Elemente $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = 1$. Zeigen Sie, dass $\gamma'(s_0), \ldots, \gamma'(s_m)$ ein Eckenweg von x nach y ist.