Prof. Dr. Helge Glöckner
Jakob Schütt Sommersemester 2017
10.7.2017

11. Übungsblatt zur „Algebraischen Topologie“

Gruppenübungen

Aufgabe G 29 Zeigen Sie: Ist X ein Graph und $Y \subseteq X$ ein Unterkomplex, so ist Y ein starker Deformationsretrakt von $N_\varepsilon(Y)$, wobei $\varepsilon_{\alpha,1} = \frac{1}{2}$ für alle α.

Aufgabe G 30 In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass jeder Baum kontrahierbar ist. Ein *Baum* ist ein wegzusammenhängender Graph X mit Eckenmenge X_0 und Kantenmenge $\{\overline{e_\alpha} := \psi_\alpha([-1,1])\colon \alpha \in A\}$, sodass gilt:

(i) für alle $\alpha \in A$ ist $\psi_\alpha(-1) \neq \psi_\alpha(1)$ (d.h. keine Kante ist eine Schleife)

(ii) jede Kante ist durch $\{\psi_\alpha(-1), \psi_\alpha(1)\}$ festgelegt (d.h. jede Kante ist einfach)

(iii) für jeden Eckenweg (siehe G28) $v_1, \ldots, v_n$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$, $i, j < n$ gilt $v_1 \neq v_n$ (d.h. es gibt keine Kreise im Graph)

Seien $x, y \in X_0$. Wir setzen $d(x,x) := 0$ und definieren für $x \neq y$ die natürliche Zahl $d(x,y)$ als das Minimum aller $n \in \mathbb{N}$, sodass es einen Eckenweg $x = v_0, \ldots, v_n = y$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass es für alle $x, y \in X_0$, $x \neq y$ einen eindeutigen Eckenweg von x nach y wie in (iii) gibt. Zeigen Sie weiter, dass er minimale Länge hat.
Hinweis: Nutzen Sie Induktion nach $d(x,y)$.

(b) Sei $x \in X_0$. Zeigen Sie, dass $\{x\}$ ein starker Deformationsretrakt von X ist.
Hinweis: Definieren Sie die Homotopie stückweise, indem Sie in geeigneter Weise dem direkten Weg nach x folgen. Achten Sie darauf, dass die Homotopie für verschiedene α wohldefiniert sein muss.

(c) Folgern Sie, dass $\{x\}$ für jedes $x \in X$ ein starker Deformationsretrakt ist.

Aufgabe G 31 Sei X ein wegzusammenhängender Graph mit Eckenmenge X_0 und Kantenmenge $\{\overline{e_\alpha} := \psi_\alpha([-1,1])\colon \alpha \in A\}$. Weiter sei $x_0 \in X_0$ und $\mathcal{T}$ die Menge der Unterkomplexe T von X, sodass $x_0 \in T$ und T ein Baum ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ unter der Inklusion induktiv geordnet ist und somit ein maximaler Baum $T^* \subseteq X$ mit $x_0 \in T^*$ existiert.

(b) Zeigen Sie, dass $X_0 \subseteq T^*$ gilt.

(c) Sei $\alpha \in A$, sodass $\overline{e_\alpha} \nsubseteq T^*$ und $v_0, \ldots, v_n$ der kürzeste Eckenweg in T^* von $\psi_\alpha(-1)$ nach $\psi_\alpha(1)$, wobei $v_{j-1}, v_j \in \overline{e_{\alpha_j}} \subseteq T^*$. Zeigen Sie, dass $Y := \overline{e_\alpha} \cup \bigcup_{j=1}^n \overline{e_{\alpha_j}}$ ein starker Deformationsrektrakt von $\overline{e_\alpha} \cup T^*$ ist.