

1. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Aussagenlogik, Wahrheitstabellen)

Es seien p und q Aussagen.

- (a) Geben Sie die Wahrheitstabelle für die Aussage $s = “p \text{ oder } q”$ an.
- (b) Geben Sie die Wahrheitstabelle für die Aussage $t = “\text{entweder } p \text{ oder } q”$ an.
- (c) Finden Sie einen logischen Ausdruck in den Buchstaben p und q und der Konnektoren $\wedge$, $\vee$ und $\neg$, der eine logisch zu t äquivalente Aussage repräsentiert. Weisen Sie diese Äquivalenz anhand einer Wahrheitstabelle nach.

Aufgabe G2 (Das Lesen logischer Formeln; Beweis und Gegenbeispiel)

Formulieren Sie jede der folgenden Aussagen in natürlicher Sprache. Entscheiden Sie, welche der Aussagen wahr, welche falsch sind. Im Falle der Wahrheit begründen Sie diese; widerlegen Sie sie andernfalls, bei Allaussagen durch ein Gegenbeispiel.

- (a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})n^2 = k$
- (b) $(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})n^2 = k$
- (c) $(\exists! n \in \mathbb{N})n^2 - 3n + 2 = 0$
- (d) $(\forall n \in \mathbb{N})((\exists k \in \mathbb{N})n^2 = 5k) \Rightarrow (\exists l \in \mathbb{N})n = 5l$.

Aufgabe G3 (Das Negieren von Aussagen)

Man nehme an, dass es Töpfe und Deckel jeder Form und Größe gebe. Ein Deckel passe genau dann auf einen Topf, wenn beide die gleiche Form und Größe besitzen. Entscheiden Sie unter diesen Annahmen, welche der folgenden Aussagen wahr, welche falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung. Formulieren Sie im Anschluss für jede der Aussagen ihre Negation (in möglichst knapper Form).

- (a) Auf jeden Topf passt ein Deckel.
- (b) Es gibt einen Topf, auf den alle Deckel passen.
- (c) Jeder Deckel passt auf mindestens einen Topf.
- (d) Es gibt einen Topf, auf den ein Deckel passt.
- (e) Auf jeden Topf passen alle Deckel.
- (f) Es gibt einen Deckel, der auf alle Töpfe passt.

Negieren Sie nun die folgende Aussage: $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})m > n$.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Beweis durch Fallunterscheidung)

Es seien p , q und r Aussagen. Zeigen Sie:

$$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow r.$$

(Dies bezeichnet man als Beweis durch Fallunterscheidung.) Satz I.1.5 aus dem Skript wurde durch Fallunterscheidung bewiesen. Bestimmen Sie die Aussagen p , q und r in diesem Beweis.

Aufgabe H2 (Das Aufstellen logischer Formeln; Beweis und Gegenbeispiel)

Stellen Sie die folgenden Aussagen in Form logischer Formeln auf, negieren Sie diese und begründen Sie jeweils, welche wahr ist, die Aussage oder die Negation.

- (a) Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es Primzahlen p und q , deren Produkt n teilt.
(Formulieren Sie nicht aus, was es heißt eine Primzahl zu sein.)
- (b) Jede ungerade natürliche Zahl besitzt einen ungeraden Teiler, der ungleich 1 ist.
- (c) Alle geraden natürlichen Zahlen haben nur einen ungeraden Teiler, nämlich 1.
- (d) Für alle natürlichen Zahlen n und m gilt, falls m größer oder gleich n ist und n größer oder gleich m , dass m und n gleich sind.

Aufgabe H3 (Indirekter Beweis)

Es sei M eine Menge. Zeigen Sie: $(\exists x)x \notin M$.

Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und leiten Sie hieraus einen Widerspruch her.