

2. Übungsblatt zur „Analysis I“

Wichtig: Bitte geben Sie die Hausübungen in ihrer jeweiligen Übungsgruppe ab.

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Rechnen mit Mengen)

Sei X eine Menge und seien $A, B \subseteq X$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) $A \cap B = A$
- (ii) $A \subseteq B$
- (iii) $A \cup B = B$.

Hinweis: Weisen Sie die Äquivalenz durch einen Ringschluss nach, d.h., beweisen Sie $(i) \Rightarrow (ii)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$ und $(iii) \Rightarrow (i)$

Aufgabe G2 (De Morgansche Regeln für Mengen und Ausmultiplizieren von Mengen)

Seien X, A, B Mengen. Zeigen Sie:

- (a) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
- (b) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
- (c) $X \cap (A \cup B) = (X \cap A) \cup (X \cap B)$
- (d) $X \cup (A \cap B) = (X \cup A) \cap (X \cup B)$.

Aufgabe G3 (Formale Definition eines geordneten Paares)

Für Elemente x und y definieren wir $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Machen Sie sich klar, dass diese formale Definition der natürlichen Vorstellung eines geordneten Paares entspricht.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Bilder und Urbilder)

Seien X, Y Mengen, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ Teilmengen und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Es gilt $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ und $A \subseteq f^{-1}(f(A))$.

Aufgabe H2 (De Morgansche Regeln II)

Seien X, J Mengen, $J \neq \emptyset$ und $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie von Mengen. Zeigen Sie:

- (a) $X \setminus \bigcup_{j \in J} X_j = \bigcap_{j \in J} (X \setminus X_j)$
- (b) $X \setminus \bigcap_{j \in J} X_j = \bigcup_{j \in J} (X \setminus X_j)$

Aufgabe H3 (Operationstreue der Urbildfunktion)

Seien X, Y, J Mengen, $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung und für jedes $j \in J$ sei $Y_j \subseteq Y$. Für Aufgabenteil (c) seien zudem $A, B \subseteq Y$. Zeigen Sie:

- (a) $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} Y_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$
- (b) $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} Y_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$
- (c) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$

Aufgabe H4 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität)

Seien $f: X \rightarrow Y$ und $h: Y \rightarrow Z$ Funktionen. Zeigen Sie:

- (a) f ist genau dann bijektiv, wenn eine Funktion $g: Y \rightarrow X$ existiert, sodass $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$.
- (b) Sind h und f injektiv, dann ist auch $h \circ f$ injektiv.
- (c) Sind h und f surjektiv, dann ist auch $h \circ f$ surjektiv.