Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
07.11.2013

# 4. Übungsblatt zur „Analysis I“

## Gruppenübungen

**Aufgabe G1** (Induktion mit Abschätzung)

(a) Finden Sie mit Induktion die Menge aller $n \in \mathbb{N}$ mit $3n^2 - 2 \leq 2^n$.
(b) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt $2n + 1 \leq n^2$.
(c) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $2^n < n!$.

**Aufgabe G2** (Monotonie der $n$-ten Potenz)

Sei $K$ ein angeordneter Körper und seien $x, y \in K$ mit $0 < x < y$. Zeigen Sie (durch Induktion): Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < x^n < y^n$.

**Aufgabe G3** (Ungleichung vom arithmetischen Mittel)

Sei $K$ ein angeordneter Körper. Zeigen Sie:

(a) Mit $2 := 1 + 1$ gilt $0 < \frac{1}{2} < 1$.
(b) Für alle $x, y \in K, x < y$, gilt $x < \frac{x+y}{2} < y$.

## Hausübungen

**Aufgabe H1** (Binomialkoeffizient, Binomischer Lehrsatz und Bernoullische Ungleichung; 5 Punkte)

Verwenden Sie in dieser Aufgabe keine Induktion.

(a) Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, zeigen Sie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
(b) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$, $a, b \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, zeigen Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes $(a + b)^n \geq a^n + b^n$.
(c) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a, a + b \geq 0$. Zeigen Sie $(a + b)^n \geq a^n + na^{n-1}b$.

**Aufgabe H2** (Maxima und Minima; 5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen $M_j$ der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$:

$$M_0 = \left\{\frac{1}{n} \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}\right\},\ M_1 = \left\{n - \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}\right\},\ M_2 = \left\{\frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$M_3 = \{x \in \mathbb{Q} \in \mathbb{Q} : 0 < x \leq 1\},\ M_4 = \emptyset$$

Entscheiden Sie jeweils, ob Maximum bzw. Minimum existieren und bestimmen Sie diese im Falle der Existenz.

**Aufgabe H3** (Ein Körper der nicht existiert; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keinen endlichen angeordneten Körper geben kann.

**Aufgabe H4** (Eine Ungleichung; 5 Punkte)

(a) Sei $C \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\frac{C}{n} \leq 1$ gilt.
(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $k^n \leq n!$ gilt.