

5. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Angeordnete Körper und Intervalle)

Sei (K, K_+) ein angeordneter Körper.

- (a) Seien $I, J \subseteq K$ Intervalle. Zeigen Sie, dass $I \cap J$ ein Intervall in K ist.
- (b) Seien $I, J \subseteq K$ Intervalle mit $I \cap J \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass $I \cup J$ ein Intervall in K ist.
- (c) Sei $(I_j)_{j \in J}$ eine Familie von Intervallen aus K . Zeigen Sie, dass $\bigcap_{j \in J} I_j$ ist ein Intervall in K ist.
- (d) Zeigen Sie, dass $\bigcup_{j \in J} I_j$ ein Intervall in K ist, wenn die Intervalle paarweise nicht disjunkt sind, das heißt, wenn $I_j \cap I_i \neq \emptyset$ für $i, j \in J$ gilt.

Aufgabe G2 (Suprema und monotone Funktionen)

Sei (K, K_+) ein angeordneter Körper. $f: K \rightarrow K$ heißt *monoton wachsend*, falls

$$(\forall a, b \in K) \quad a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$$

- (a) Seien $f: K \rightarrow K$ monoton wachsend, K vollständig angeordnet und eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subseteq K$ gegeben. Zeigen Sie: Falls $\sup A < \infty$, so gilt

$$\sup f(A) \leq f(\sup A).$$

- (b) Bestimmen Sie eine monoton wachsende Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ und eine Menge $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{Q}$ mit $\sup f(A) < f(\sup A)$.

Aufgabe G3 (Ein Infimum)

Seien (K, K_+) ein vollständig angeordneter Körper und $a \in K_+$. Zeigen Sie, dass $\inf\{\frac{a}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Aufgabe G4 (Bernoullische Ungleichung)

- (a) Verwenden Sie die Bernoullische Ungleichung um $2^n \geq 1 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ nachzuweisen.
- (b) Zeigen Sie die obige Ungleichung nun mit einer vollständigen Induktion.

Hausübungen

Aufgabe H1 (Iterierte Suprema; 5 Punkte)

Seien (K, K_+) ein vollständig angeordneter Körper. Ist $(a_i)_{i \in I}$ eine Familie von Elementen aus K , so schreiben wir $\sup_{i \in I} a_i := \sup\{a_i : i \in I\}$. Seien nun $I, J \neq \emptyset$ Mengen und $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ eine Familie von Elementen aus K mit $\sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} < \infty$. Zeigen Sie:

- (a) $\sup_{j \in J} a_{i_0,j} \leq \sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$ für alle $i_0 \in I$
- (b) $\sup_{i \in I} \sup_{j \in J} a_{i,j} \leq \sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$
- (c) $a_{i_0,j_0} \leq \sup_{i \in I} \sup_{j \in J} a_{i,j}$ für alle $i_0 \in I$ und $j_0 \in J$
- (d) $\sup_{i \in I} \sup_{j \in J} a_{i,j} = \sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j}$.

Aufgabe H2 (Einbettung von $\mathbb{Z}$; 5 Punkte)

Sei (K, K_+) ein angeordneter Körper. In der Vorlesung wurde die Abbildung $\mathbb{Z} \rightarrow K$, $z \mapsto z \cdot 1$ definiert. Hierbei haben wir $0 \cdot x := 0$ für $x \in K$ und $0 \in \mathbb{Z}$ definiert sowie rekursiv $n \cdot x := (n-1) \cdot x + x$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $n < 0$ haben wir $n \cdot x := -(-n \cdot x)$ definiert.

- (a) Zeigen Sie $(n \cdot 1)x = n \cdot x$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $x \in K$. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst den Fall $n \in \mathbb{N}_0$ per Induktion.)
- (b) Zeigen Sie nun $(n \cdot 1)(m \cdot 1) = (nm) \cdot 1$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe H3 (Rechenregeln für das Supremum; 5 Punkte)

Sei (K, K_+) ein angeordneter Körper, $N, M \subseteq K$. Zeigen Sie:

- (a) Wenn $\sup M$ und $\sup N$ in K existieren, dann existiert auch $\sup(M+N)$ in K und es gilt $\sup(M+N) = \sup(M) + \sup(N)$.
- (b) Wenn $\sup M$ und $\sup N$ in K existieren und $N, M \geq 0$ gilt, dann existiert auch $\sup(M \cdot N)$ in K und es gilt $\sup(M \cdot N) = \sup(M) \cdot \sup(N)$.

Aufgabe H4 (Ein Intervall; 5 Punkte)

Wir definieren die Menge $I := \{x \in \mathbb{Q}_+ : x^2 < 2\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass I in $\mathbb{Q}$ ein beschränktes Intervall ist.
- (b) Zeigen Sie, dass I nicht von der Form $]0, a]$ für ein $a \in \mathbb{Q}$ ist.
- (c) Zeigen Sie, dass I nicht von der Form $]0, a[$ für ein $a \in \mathbb{Q}$ ist. Sie dürfen verwenden, dass es kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $q^2 = 2$ gibt.

Sie müssen für diese Aufgabe nicht zeigen, dass in $\mathbb{Q}$ der Satz des Archimedes gilt. (Hinweis: Machen Sie sich klar, dass es für $p, q \in \mathbb{Q}_+$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $\frac{1}{n} \cdot q < q$)