Prof. Dr. Helge Glöckner

Wintersemester 2013/2014
21.11.2013

6. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Rationale Potenzen)

Seien (K, K_+) ein vollständig angeordneter Körper und $a, b \in K_+$.

(a) Zeigen Sie, dass die im Skript in Definition II.2.22 eingeführte rationale Potenz wohldefiniert ist. D.h., zu zeigen ist: Für alle $p, p' \in \mathbb{Z}$ und $q, q' \in \mathbb{N}$ mit $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ gilt $\sqrt[p]{a^q} = \sqrt[p']{a^{q'}}$.

(b) Zeigen Sie, $\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$.

Aufgabe G2 (Rechenregeln für rationale Potenzen)

Seien (K, K_+) ein vollständig angeordneter Körper und $a, b \in K_+$.

(a) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ aus $a < b$ auch $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ folgt.

(b) Zeigen Sie, dass für $r \in \mathbb{Q}_+$ aus $a < b$ auch $a^r < b^r$ folgt.

(c) Zeigen Sie, $(ab)^r = a^r b^r$ für $r \in \mathbb{Q}_+$ gilt. **Hinweis**: Man betrachte zuerst die Fälle $r \in \mathbb{N}_0$ und $r = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, und setze dann beides zusammen.

Aufgabe G3 (Die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel)

Seien $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_i > 0$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

(a) Sei $\overline{x} := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i$. Zeigen Sie mit Hilfe der bernoullischen Ungleichung, dass

$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n\overline{x}} \right)^n \geq \frac{x_n}{\overline{x}}$$

gilt.

(b) Zeigen Sie nun mit Hilfe von (a) und einer Induktion, dass

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Hausübungen

Aufgabe H1 (Fixpunkte von monotonen Funktionen auf $\mathbb{R}$; 5 Punkte)

Seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f(a) \geq a$, $f(b) \leq b$. Zeigen Sie, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = x$. Ein solches x nennt man übrigens Fixpunkt von f. **Hinweis:** Betrachten Sie doch mal den Punkt $z := \sup\{y \in \mathbb{R} : a \leq y \leq b, y \leq f(y)\}$.

Aufgabe H2 (Komplexe Zahlen; 5 Punkte)

(a) Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$: $z = \frac{2-5i}{4+3i}$, $z = \left(\frac{4i^{11}-i}{1+2i}\right)^2$.

(b) Zeigen Sie nun, dass $\mathbb{C}$ kein angeordneter Körper sein kann.

(c) Seien $w = u + iv$ und $z = x + iy \neq 0$ mit $u, v, x, y \in \mathbb{R}$ schreiben Sie $\frac{w}{z}$ in der Form $\alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(d) Seien $m < n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie $\sqrt[m]{a} \leq \sqrt[n]{a}$ falls $0 < a \leq 1$ und $\sqrt[m]{a} \geq \sqrt[n]{a}$ falls $a \geq 1$

Aufgabe H3 (Eine weitere Ungleichung; 5 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}_+$.

(a) Zeigen Sie

$$\frac{y^2}{x} - y + \frac{x^2}{y} - x \geq 0.$$

(b) Zeigen Sie

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}}.$$