

7. Übungsblatt zur „Analysis I“

Gruppenübungen

Aufgabe G1 (Die diskrete Metrik)

Sei X eine Menge. Wir definieren

$$d: X \times X \rightarrow [0, \infty[$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist. Man nennt, d die *diskrete Metrik* auf X .
- (b) Zeigen Sie, dass in einem beliebigen metrischen Raum alle Mengen genau dann offen sind, wenn alle einpunktigen Menge offen sind.
- (c) Zeigen Sie, dass in (X, d) alle Mengen offen und abgeschlossen sind.
- (d) Wir staten die Menge $M := \{\frac{1}{n} \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ mit der Metrik aus die von $\mathbb{R}$ kommt. Wir betrachten also die Metrik $d(x, y) = |x - y|$. Zeigen Sie dass auch in (M, d) alle Mengen offen und abgeschlossen sind, aber d nicht die diskrete Metrik ist.

Aufgabe G2 (Umgedrehte Dreiecksungleichung)

Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X, d) , die umgedrehte Dreiecksungleichung gilt, d.h. zeigen Sie:

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z)$$

für alle $x, y, z \in X$.

Aufgabe G3 (Offene und abgeschlossene Mengen)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Mengen offen bzw. abgeschlossen sind:

$$[a, b],]a, b], [a, b[,]a, b[.$$

Achtung, a priori ist nicht ausgeschlossen, dass eine Menge sowohl offen als auch abgeschlossen ist!

Hausübungen

Aufgabe H1 (Eine Ungleichung; 5 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{C}$, zeigen Sie

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{|a|+1} + \frac{|b|}{|b|+1}$$

Aufgabe H2 (Die französische Eisenbahnmotrik; 5 Punkte)

Seien $X \neq \emptyset$, $x_0 \in X$ und $f: X \rightarrow [0, \infty[$ mit $f(x_0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $x \neq x_0$. Setze

$$d_{SNCF}(x, y) = \begin{cases} f(x) + f(y) & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass (X, d_{SNCF}) ein metrischer Raum ist. (Interpretiert man x_0 als Paris und $f(x)$ als die Entfernung von x nach Paris, so entspricht $d_{SNCF}(x, y)$ der auf dem französischen Eisenbahnnetz von x nach y zurückzulegenden Strecke, wie böse Zungen behaupten.)

Aufgabe H3 (Abgeschlossene Kugeln; 5 Punkte)

Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X, d) jede der Mengen $\{x \in X : d(x, p) \leq r\}$ für $p \in X$ und $r \in \mathbb{R}$, abgeschlossen ist.

Aufgabe H4 (Offene und abgeschlossene Mengen II; 5 Punkte)

Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ bzgl. der normalen Metrik offen bzw. abgeschlossen sind. Skizzieren Sie zudem grob M_1 und M_2 .

- (a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$
- (b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 0 \text{ und } |z| \leq 1\}$
- (c) $M_3 := \mathbb{Q} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$